

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

**Band:** 61 (1970)

**Heft:** 21

**Artikel:** Der Stoßspannungsteiler mit Zuleitung

**Autor:** Zaengl, W.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-915987>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

Gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV)  
und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)

## Der Stoßspannungsteiler mit Zuleitung

Von W. Zaengl, Zürich

2067-2082

621.317.727.1:621.3.015.33

Wegen der grossen räumlichen Abmessungen der Stoßspannungsmesskreise bei insbesondere hohen Spannungen in der Grössenordnung von Millionen Volt werden die frequenzabhängigen Übertragungseigenschaften, die zur Beurteilung der vor allem bei kurzzeitigen Spannungsimpulsen auftretenden Messfehler bekannt sein müssen, sehr stark von den unvermeidlichen elektrischen und magnetischen Streufeldern beeinflusst. Von besonderer Bedeutung wird dabei die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Vorgänge, welche in erster Näherung durch Wanderwellenvorgänge erfasst werden kann.

In der nachfolgenden Arbeit wird die Schrittantwort (unit step response; Übergangsfunktion; Einheitssprungantwort) und insbesondere die Antwortzeit (response time) dieser Übergangsfunktion von Messkreisersatzschaltungen, bei denen eine übliche metallische Zuleitung zum Spannungsteiler grundsätzlich durch eine Wanderwellenleitung und die Spannungsteiler teilweise durch Kettenleiter nachgebildet werden, systematisch untersucht. Die Ergebnisse zeigen den grossen Einfluss einer bedämpften oder unbedämpften Zuleitung auf das Übertragungsverhalten des gesamten Messkreises und geben wertvolle Hinweise, die bei einer experimentellen Bestimmung der Schrittantwort beachtet werden müssen.

Par suite des grandes dimensions des circuits de mesure des tensions de choc, en particulier dans les tensions élevées de plusieurs millions de volts, les propriétés de transmission dépendant de la fréquence, et qui doivent être connues afin d'évaluer les erreurs de mesure essentiellement produites lors de brèves impulsions de tension, sont fortement influencées par les inévitables champs de fuite électriques et magnétiques. Une importance particulière se rapporte alors à la vitesse de propagation fine des phénomènes électromagnétiques qui peuvent en première approximation être conçus par des phénomènes d'ondes progressives.

L'exposé étudie systématiquement la réponse de pas (unit step response; fonction de transition; réponse transitoire unitaire), et en particulier le temps de réponse (response time), de cette fonction transitoire des circuits équivalents de mesure dans lesquels l'aménée métallique usuelle au diviseur de tension est simulée par une ligne d'ondes progressives, et le diviseur de tension partiellement par un réseau récurrent. Les résultats prouvent la grande influence d'une aménée amortie ou non-amortie sur le comportement de transmission de tout le circuit de mesure, et fournissent des indications précieuses qui doivent être observées lors de la détermination expérimentale de la réponse de pas.

### 1. Einleitung

Im Zusammenhang mit den bereits laufenden Entwicklungsarbeiten für Drehstrom-Übertragungsspannungen für einen Spannungsbereich von 1100/1500 kV werden Stoßspannungen für Prüf- und Forschungszwecke benötigt, welche 5 bis 6 Millionen Volt betragen. Um diese Spannungen zu messen, werden Spannungsteiler mit Bauhöhen von etwa 15 m notwendig. Da die weitgehend fehlerfreie Erfassung derartiger Spannungsimpulse hohe Anforderungen an die frequenzabhängigen Übertragungseigenschaften des Messkreises, welche sich durch den Frequenzgang oder die Sprungantwort ausdrücken lassen, stellt, wird es notwendig, die damit im Zusammenhang stehenden Fragen theoretisch und praktisch immer genauer zu untersuchen. Die grossen Abmessungen zwingen dabei dazu, die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Vorgänge, also Laufzeiteffekte, bei der Aufstellung von Ersatzschaltungen zu berücksichtigen.

Aus Isolationsgründen lassen sich Stoßspannungsteiler nur in der Weise konstruktiv ausbilden, dass man die aktiven Bauelemente — Widerstände, Kondensatoren, Abschirm- und Steuerelektroden — zu einer vertikal auf dem Boden stehenden hohen Säule zusammenbaut. Die Bodenfläche, vorzugsweise grossflächig und metallisch ausgebildet, stellt das Bezugs- oder

Erdpotential dar, und die sich zwischen dem Teiler und dieser Gegenelektrode ausbildenden elektrischen und magnetischen Felder unterliegen somit einer Beeinflussung durch benachbarte, potentialführende Gegenstände. Eine Störung dieses Feldverlaufs liegt bereits vor, wenn die Hochspannungselektrode des Teilers mit dem Prüfobjekt, an dem eine anliegende Spannung gemessen werden soll, über eine längere, metallische und üblicherweise horizontal vom Teiler wegführende Leitung verbunden wird. Diese Zuleitung wird dann zum integrierten Bestandteil des Stoßspannungsmesskreises und stellt selbst wieder ein Übertragungsglied dar, welches die Sprungantwort der Anordnung stark verändert. In Fig. 1 wurde dieser Messkreis, zusammen mit der Stoßspannungsquelle und der Anordnung des Prüfobjektes, dargestellt. Anhand dieses schematischen Aufbaues ist ersichtlich, dass bei zu kleinen Abständen auch noch die vereinfachend als quasistationär wirkenden Felder des Prüfobjektes und der Spannungsquelle auf den Messkreis einwirken können. Eine quantitative Erfassung derartiger Vorgänge ist jedoch wegen des Variationsreichtums im detaillierten Aufbau der gesamten Anordnung nicht mehr möglich.

In engem Zusammenhang mit dieser Problematik steht auch die Aufgabe, die frequenzabhängigen Übertragungseigenschaf-

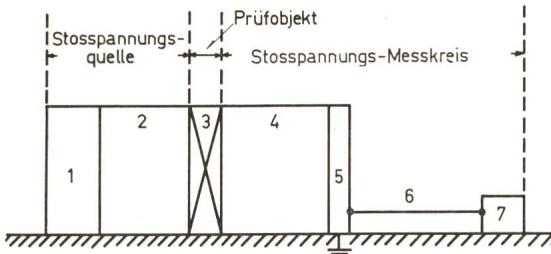


Fig. 1

**Schema-Darstellung eines Stoßspannungskreises**

1 Stoßgenerator; 2 Zuleitung zum Prüfobjekt; 3 Prüfobjekt; 4 Zuleitung zum Stoßspannungsteiler; 5 Stoßspannungsteiler; 6, 7 Messkabel und Oszilloskop

ten des Messkreises experimentell zu bestimmen. Dies geschieht üblicherweise durch die oszillographische Messung der Schrittantwort am Messkreisausgang beim Anlegen eines Spannungssprunges am Eingang des Messkreises. Dieser Eingang wird aber durch die Erdelektrode und das dem Teiler abgewandte Ende der Zuleitung gebildet, also von Anschlusspunkten, welche bei der eigentlichen Stoßspannungsmessung räumlich weit voneinander entfernt sind. Ein Spannungssprung mit unendlich steiler Anstiegsflanke kann wegen der *Définition* des Spannungsbegriffes weder theoretisch auftreten, noch ist er praktisch erzeugbar. Aber selbst ein Spannungssprung mit endlich steiler Anstiegsflanke und zeitlich eindeutigem Verlauf lässt sich experimentell nicht verwirklichen, da dies eine Spannungsquelle mit einem im Vergleich zur Eingangsimpedanz des Messkreises vernachlässigbar kleinen Innenwiderstand voraussetzen würde. Es ist daher nur verständlich, dass man üblicherweise die Zuleitung zum Spannungsteiler für eine derartige Messung zusätzlich bis zur Erdelektrode verlängert, auf der ein Sprungspannungs- oder Rechteckgenerator aufgestellt wird, der die genannten Bedingungen erfüllt. Damit verändert man aber auch die Übertragungseigenschaften des Messkreises.

Eine quantitative Beurteilung des Zuleitungseinflusses und insbesondere von Eigenschaftsänderungen, welche durch zuleitungsbedingte Messkreisveränderungen hervorgerufen werden, lässt sich nur vornehmen, wenn die Zusammenhänge zwischen den erfassbaren Schaltelementen und den Messgrößen – im vorliegenden Fall der Sprungantwort und der Antwortzeit – in möglichst analytischer Form vorliegen. Die nachfolgenden, vorwiegend theoretischen Untersuchungen stützen sich daher auf verschiedenartige, vollständige Ersatzschaltungen von Stoßspannungsmesskreisen, bei denen einheitlich eine vorzugsweise bedämpfte Zuleitung als Wanderwellenleitung und die wesentlichen Spannungsteilertypen (Ohmisch und kapazitiv) durch konzentrierte oder fein verteilte Schaltelemente ersetzt werden. Digital berechnete Übergangsfunktionen zeigen die Komplexität der Vorgänge in deren zeitlichem Ablauf; die analytisch berechnete Antwortzeit lässt aber recht einfache Gesetzmäßigkeiten erkennen, welche bereits an anderer Stelle dazu benutzt wurden, ein neuartiges experimentelles Verfahren zur Messung der Übertragungseigenschaften von Stoßspannungsmesskreisen vorzuschlagen [1]<sup>1)</sup>.

Eingehende Untersuchungen der Sprungantwort von Stoßspannungsmesskreisen wurden bereits von *Creed* u.a. [8] auf der Grundlage des Wanderwellencharakters der Zuleitung zum Spannungsteiler durchgeführt. Dieses Verfahren geht aber

nicht von verschiedenartigen Ersatzschaltungen für die Dämpfungswiderstände und Spannungsteiler aus, so dass die Zusammenhänge zwischen den Messkreis-Schaltelementen und den Übergangsfunktionen, bzw. deren Antwortzeit, nicht erkennbar werden.

## 2. Ersatzschaltungen

Bei der Ersatzschaltung des Messkreises wird man nur das Übertragungssystem Zuleitung–Spannungsteiler berücksichtigen und somit das Messkabel und den Oszilloskop (siehe Fig. 1) vernachlässigen. Diese Vernachlässigung ist zulässig, da die kleine Teilausgangsspannung nicht auf die Vorgänge auf der Hochspannungsseite rückwirken kann. Die berechneten Ergebnisse setzen somit voraus, dass die Eingangsimpedanz des Messkabels im Niederspannungsteil des Teilers enthalten ist.

Folgende zwei grundsätzliche Ersatzschaltbilder ergeben sich dann bei einer vierpoltheoretischen Darstellung: Fig. 2a kann dazu dienen, die Vorgänge am hochspannungsseitigen Eingang des Teilers zu berechnen. Die Impedanz  $Z_t$  stellt hier die Eingangsimpedanz des Teilers dar, was vor allem bei einer Kettenleiternachbildung beachtet werden muss. Fig. 2b liefert die Vorgänge am unbelasteten, niederspannungsseitigen Ausgang, wobei die Kettenmatrix  $(A)^{(t)}$  die gegebenenfalls frequenzabhängigen Übertragungseigenschaften des Teilers kennzeichnet. Beiden Ersatzschaltungen gemeinsam sind die Vierpollemente  $(A)^{(d)}$ ,  $(A)^{(L)}$  und  $(A)^{(P)}$ . Die Kettenmatrix  $(A)^{(d)}$  berücksichtigt einen der Zuleitung vorgeschalteten Dämpfungswiderstand mit der Impedanz  $Z_d$ , welcher möglichst rein Ohmisch und aus wanderwellentheoretischen Überlegungen stets am Anfang der Zuleitung anzubringen ist. Er dient dazu, vom Spannungsteiler reflektierte Wellen abzudämpfen, da ein Teiler nur in Ausnahmefällen eine Leitung wirklich reflexionsfrei abschliessen könnte. Die Zuleitung wird durch ihren Wellenwiderstand  $\Gamma = \sqrt{L'/C'}$  und die Laufzeit  $\tau = l/\sqrt{L' C'}$  gekennzeichnet, wobei  $L'$  den Induktivitätsbelag,  $C'$  den Kapazitätsbelag und  $l$  die Länge der Zuleitung bedeuten. Die damit vorausgesetzte Verlustfreiheit stellt keine nennenswerte Vernachlässigung dar, da stets sehr gut leitende, metallische Verbindungen verwendet werden. Ein wirklich konstanter Wellenwiderstand liegt hingegen auch bei einer parallel zu einer grossflächigen, ebenen Erdelektrode angeordneten Zuleitung sicher-

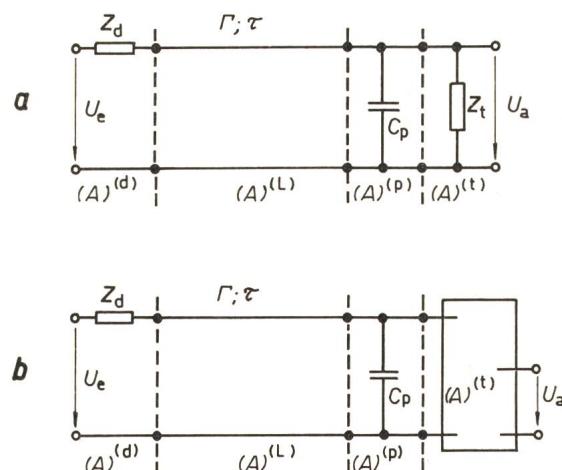


Fig. 2  
Der Stoßspannungs-Messkreis in Vierpol-Ersatzschaltung  
Erklärungen siehe im Text

<sup>1)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

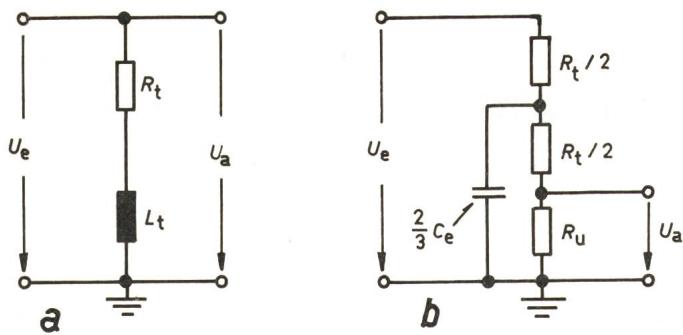


Fig. 3

**Einfache Ersatzschaltungen Ohmscher Teiler**

- a Teiler als induktivitätsbehafteter Widerstand;  
 b Aus Fig. 5 ableitbare Ersatzschaltung (gleiche Antwortzeit der Schrittantwort)  
 $C_e$  gesamte Erdverkettungskapazität des Teilers;  $L_t$  Gesamtinduktivität des Teilers;  $R_t$  Gesamtwiderstand des Teilers;  $R_u$  Niederspannungswiderstand;  $U_e$  Spannung am Teiler-Eingang;  $U_a$  Spannung am Teiler-Ausgang

lich nicht vor. Eine in das Meßsystem einlaufende Wanderwelle wird sich aber mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_0 = 1/\sqrt{L'C}$  ausbreiten, so dass sich die Laufzeit eindeutig aus der Zuleitungslänge berechnen lässt. Die Grösse  $\Gamma$  repräsentiert dann einen mittleren Wellenwiderstand, der sich aus der einfachen Beziehung

$$\Gamma = \frac{l}{c_0 C}$$

ergibt. Die Gesamtkapazität  $C$  lässt sich dabei entweder unmittelbar messen oder berechnen [2]. Die Parallelkapazität  $C_p$  schliesslich soll jene elektrischen Feldlinien, die von den hochspannungsseitigen Elektroden des Spannungsteilers ausgehen und unmittelbar zum Erdpotential verlaufen, also nicht mit dem Aktivteil des Spannungsteilers verkettet sind, berücksichtigen.

Die Fig. 3, 4 und 5 enthalten die Ersatzschaltungen für die Spannungsteiler. Die einfachen Nachbildungen, Fig. 3a und Fig. 4a, dienen zur Berechnung der Vorgänge am Eingang sowohl Ohmscher als auch kapazitiver, insbesondere gedämpft kapazitiver Teiler, Fig. 3b und Fig. 4b zur Berechnung der Vorgänge am Ausgang der Teiler. Fig. 5 ersetzt Ohmsche

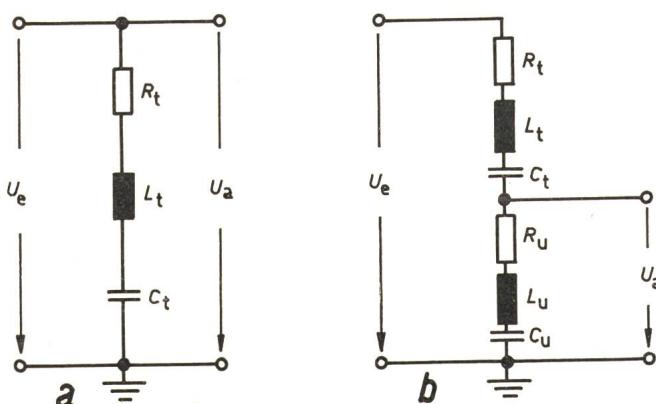


Fig. 4

**Einfache Ersatzschaltung kapazitiver Teiler**

- a Teiler als induktivitätsbehaftete Serienschaltung von Widerständen und Kondensatoren;  
 b Aufspaltung von a in Hoch- und Niederspannungsteil;  
 $C_t$  gesamte Längskapazität des Teilers;  $C_u$  Kapazität des Niederspannungsteiles;  $L_u$  Induktivität des Niederspannungsteiles  
 Weitere Bezeichnungen siehe Fig. 3

( $C_t \rightarrow \infty$ ) und kapazitive ( $C_t$  endlich) Teiler durch einen homogen aufgebauten Kettenleiter. Der wesentliche Unterschied zwischen den vereinfachten Nachbildungen und einer Kettenleiterersatzschaltung mit Längsinduktivitäten  $L_t'$  besteht dabei darin, dass die letztere ein ausgeprägtes Laufzeitverhalten aufweisen kann, d. h. dass die Spannung am Ausgang zeitlich verzögert gegenüber der Spannung am Eingang einsetzt. Dieser in der Praxis einwandfrei vorhandene Effekt wird jedoch durch die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitenden, nicht leitungsgebundenen elektromagnetischen Vorgänge stark verdeckt. Sie beeinflussen den unmittelbaren Anfang jeder experimentell zu messenden Übergangsfunktion. Zur einfachen Erklärung für diese Störeinflüsse kann man sich Koppelkapazitäten vorstellen, welche zwischen der Zuleitung und dem Teiler und längs des Teilers wirksam sind.

Auch die vorliegenden Ersatzschaltungen sind noch fehlerbehaftet. Der Übergang auf kontinuierlich verteilte Schaltelemente, wie dieser durch die Ersatzschaltung der Zuleitung als Wanderwellenleitung oder des Teilers als Kettenleiter durchgeführt wurde, setzt voraus, dass quasistationäre elektrische und magnetische Felder die damit noch leitungsgebundenen Vorgänge bestimmen. Die tatsächlichen Abmessungen

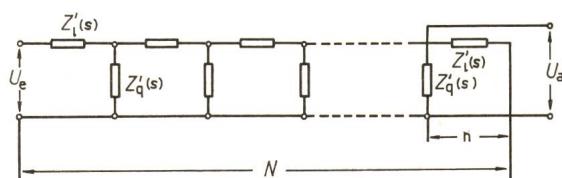


Fig. 5

**Kettenleiterersatzschaltung Ohmscher ( $C_t \rightarrow \infty$ ) und gedämpft kapazitiver Spannungsteiler**

$$Z'_1(s) = R'_t + s L'_t + \frac{1}{s C'_t} \quad Z'_q(s) = \frac{1}{s C'_t} ;$$

$$Z_1(s) = N \cdot Z'_1(s) \quad Z_q(s) = \frac{1}{N} \cdot Z'_q(s) ;$$

$$\frac{N}{n} \text{ Übersetzungsverhältnis des Teilers } (\gg 1)$$

Weitere Bezeichnungen siehe Fig. 3

der Messkreise für insbesondere extrem hohe Stoßspannungen sind jedoch so gross, dass die Gültigkeit der Wanderwellentheorie in Zeitbereichen von wenigen Nanosekunden ihre Gültigkeit verliert. Diese Tatsache steht aber im engsten Zusammenhang mit dem noch schwerwiegenderen Fehler, den man begeht, wenn man die begrenzte Gültigkeit des Spannungsbegriffes schlechthin nicht beachtet. Eine an einem Prüfobjekt zu messende Spannung lässt sich nur so lange eindeutig definieren, als diese noch aus dem Wegintegral über die elektrische Feldstärke, welche die Isolation des Prüfobjektes beansprucht, berechnet werden kann. Diese Bedingung setzt aber ein quasistationäres Feld voraus, welches bei zu raschen Ausgleichsvorgängen nicht mehr vorliegt. Weiterhin ist zu beachten, dass sich die Spannung am Prüfobjekt im wesentlichen aus einem rein elektrischen Feld und nicht aus einem elektrischen Strömungsfeld ergibt. Letzteres ist der Fall, wenn beispielsweise ein Prüfobjekt die Isolierfähigkeit verliert und durchschlägt. Die dann fliessenden, hohen und transienten Leitungsströme induzieren in der Schleife des Spannungsmesskreises über das mit ihnen verbundene Magnetfeld Spannungen, deren Betrag bei schnellen Stromänderungen sehr

erheblich werden kann. Nur unter grossem Vorbehalt können somit die vorliegenden Betrachtungen auch auf Vorgänge angewandt werden, die sich bei der Messung von Spannungs-zusammenbrüchen an Funkenstrecken ergeben.

### 3. Analytische Berechnung der Schrittantwort $\gamma(t)$

Das Zusammenwirken einer homogenen elektrischen Leitung (Wanderwellenersatzschaltung der Zuleitung) mit im allgemeinen Fall komplexen Widerständen am Anfang und komplexen Widerständen oder Kettenleitern am Ende der Zuleitung begrenzt die Möglichkeiten einer analytischen Berechnung des Systems ganz erheblich. Die Schrittantwort lässt sich aber allgemein im Bildbereich der Laplace-Transformation mit Hilfe der Übertragungsfunktionen der einzelnen Glieder angeben, da das System im unerregten Zustand energiefrei ist. Die Diskussion einfach analytisch berechenbarer Sonderfälle lässt jedoch das grundsätzliche Verhalten des Messkreises erkennen und dürfte zum Verständnis der Vorgänge beitragen.

Unter Verwendung des üblichen Korrespondenzzeichens (DIN 5487) und mit  $s$  als Laplace-Operator erhält man die Schrittantwort  $\gamma(t)$  auf eine Einheitssprungfunktion  $\varepsilon(t)$  aus der Beziehung

$$\gamma(t) \circ \bullet \frac{1}{s} \cdot G(s) \quad (1)$$

wobei  $G(s)$  die Übertragungsfunktion darstellt, welche das Verhalten des Übertragungssystems im stationären Zustand kennzeichnet. Die Vierpoldarstellung ermöglicht eine systematische Berechnung der Übertragungsfunktion. Die Eingangs- und Ausgangsgrößen (Spannungen und Ströme) eines einzelnen Vierpols sind durch das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} U_e(s) \\ I_e(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}(s) & A_{12}(s) \\ A_{21}(s) & A_{22}(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_a(s) \\ I_a(s) \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} U_a(s) \\ I_a(s) \end{pmatrix} \quad (2)$$

verknüpft. Die Kettenmatrix von hintereinandergeschalteten Vierpolen erhält man dann in einfacher Weise durch die bekannte Matrix-Multiplikation

$$(A) = (A)^{(1)} \cdot (A)^{(2)} \cdot (A)^{(3)} \cdots \cdot (A)^{(n)} \quad (3)$$

Die zu berechnenden Übergangsfunktionen beziehen sich auf das Spannungsübertragungsverhalten. Wie vorausgesetzt, ist der letzte Vierpol am Ausgang stets unbelastet. Damit wird die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{1}{A_{11}(s)} \quad (4)$$

Anhand der Gl. (2) bis (4) und den als bekannt vorausgesetzten Kettenmatrix-Größen für die in Fig. 2a und 2b gemeinsam vorhandenen Teil-Vierpole  $(A)^{(d)}$ ,  $(A)^{(L)}$  und  $(A)^{(p)}$  folgt:

$$G(s) = \frac{1}{A_{11}(s)} = \frac{1}{S(s) \cdot \sinh(\tau s) + C(s) \cdot \cosh(\tau s)},$$

mit

$$S(s) = A_{11}^{(t)}(s) \left[ \frac{Z_d(s)}{\Gamma} + s \cdot \Gamma \cdot C_p \right] + A_{21}^{(t)}(s) \cdot \Gamma; \quad (5)$$

$$C(s) = A_{11}^{(t)}(s) \left[ 1 + s \cdot Z_d(s) \cdot C_p \right] + A_{21}^{(t)}(s) \cdot Z_d(s)$$

Die normierte Übergangsfunktion wird somit unter Verwendung von Gl. (1):

$$\gamma_0(t) \circ \bullet \frac{1}{s} \cdot G_0(s) = \frac{1}{s} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A_{11}(s)}{A_{11}(s)} \quad (6)$$

Die Rücktransformation von Gl. (6) unter Beachtung der in Gl. (5) enthaltenen verschiedenartigen Matrix-Elemente  $A_{11}^{(t)}(s)$ , welche dem Anhang I zu entnehmen sind, bereitet grosse Schwierigkeiten, insbesondere für den Fall der Kettenleiter-Ersatzschaltung der Spannungsteiler nach Fig. 5, da das Übertragungsverhalten sowohl der Zuleitung als auch des Teilers durch transzendentale, nichtalgebraische Hyperbel-funktionen gekennzeichnet wird. Grundsätzlich bestehen zwei bekannte Lösungswege:

Die Entwicklung von Gl. (5) nach den Eigenschwingungen, also eine Anwendung des Heavisideschen Entwicklungssatzes, erfordert einen sehr grossen numerischen Rechenaufwand zur Lösung jeder speziellen Aufgabe. Als Beweis dafür sei das von *H. Kaden* [3] veröffentlichte Beispiel angeführt, welches lediglich den Einschaltvorgang einer durch eine Kapazität abgeschlossenen und widerstandslos eingespeisten Leitung behandelt. Die von *K. W. Wagner* [4] vorgeschlagene Lösung vermittelt hingegen einen besseren Einblick in den physikalischen Ablauf des Übergangsvorganges. Die dabei vorgenommene Reihenentwicklung der Übertragungsfunktion — Gl. (5) — lässt bereits im Unterbereich die auf der Leitung laufenden Wellen erkennen und weist auf die nur in Zeitintervallen gültige Stetigkeit der Sprungantwort im Falle von Reflexionen am Anfang und Ende der Leitung hin. Dieser Lösungsweg wird angewandt, um die Vorgänge kurz zu erläutern:

#### 3.1 Spannungsteiler-Eingang

Für eine Berechnung der Sprungantwort am *Eingang* der Spannungsteiler kann die Eingangsimpedanz  $Z_t(s)$  für alle Ersatzschaltungen gefunden werden (siehe Anhang I). Mit den komplexen Reflexionsfaktoren

$$r_d(s) = \frac{Z_d(s) - \Gamma}{Z_d(s) + \Gamma} \quad r_t(s) = \frac{Z_t(s) - \Gamma}{Z_t(s) + \Gamma} \quad (7)$$

wird die übersichtlichste Form für die Schrittantwort:

$$\gamma_0(t) \circ \bullet \frac{e^{-\tau s}}{s} \cdot \frac{1 + Z_d(0) / Z_t(0)}{1 + Z_d(s) / Z_t(s)} \cdot \frac{1 - [r_d(s) \cdot r_t(s)]}{1 - [r_d(s) \cdot r_t(s)] e^{-2\tau s}} \quad (8)$$

mit

$$Z_d(0) = \lim_{s \rightarrow 0} [Z_d(s)] \quad Z_t(0) = \lim_{s \rightarrow 0} [Z_t(s)]$$

Die gleichwertige Darstellung nach der Entwicklung des letzten Faktors in eine geometrische Reihe lautet:

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) \circ \bullet & \frac{e^{-\tau s}}{s} \cdot \frac{1 + Z_d(0) / Z_t(0)}{1 + Z_d(s) / Z_t(s)} \times \\ & \times [1 - r_d(s) \cdot r_t(s)] \left\{ 1 + [r_d(s) \cdot r_t(s)] e^{-2\tau s} \right. \\ & \left. + [r_d(s) \cdot r_t(s)]^2 \cdot e^{-4\tau s} + [r_d(s) \cdot r_t(s)]^3 \cdot e^{-6\tau s} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

Diese Darstellung lässt den grundsätzlichen Verlauf der Sprungantwort erkennen:

Der erste Faktor  $e^{-\tau s}$  bedeutet nach dem ersten Verschiebungssatz der Laplace-Transformation, dass die Spannung am Teiler-Eingang gegenüber dem Einschaltzeitpunkt um die Laufzeit  $\tau$  der Zuleitung verzögert erscheint. Dieser Effekt ist messtechnisch bedeutungslos. Sind beide Reflexionskoeffizienten endlich gross, so bleiben sämtliche Glieder der Reihe erhalten, und die Sprungantwort wird jeweils nur stückweise, in Zeitintervallen von  $2\tau$ , stetig. Die Sprungantwort in jedem neuen, zu grösseren Zeiten hin verschobenen Intervall setzt

sich wegen der stetig höher werdenden Ordnung der Faktoren  $r_d(s) \cdot r_t(s)$  aus mehreren Teilvergängen zusammen, die physikalisch durch die Überlagerung der reflektierten Wellen entstehen. Die Rücktransformation von Gl. (9) wird somit für jedes zusätzliche Zeitintervall schwieriger.

Ein schnelles Einschwingen der Schrittantwort kann nur dann erreicht werden, wenn wenigstens einer der Reflexionsfaktoren verschwindet, was für  $Z_d(s) = \Gamma$  oder  $Z_t(s) = \Gamma$  der Fall ist. Damit verschwindet der dritte Faktor in Gl. (8), und die auf den Zeitpunkt des Eintreffens der Spannungswelle am Teiler bezogene Übergangsfunktion vereinfacht sich zu:

$$\gamma_0(t - \tau) \circ \bullet \frac{1}{s} \cdot \frac{1 + Z_d(0)/Z_t(0)}{1 + Z_d(s)/Z_t(s)} \quad (10)$$

Der Einfluss der Zuleitung ist damit, abgesehen von der zeitlichen Verschiebung, verschwunden, so dass die Sprungantwort aus der einfachen Spannungsteilung zwischen  $Z_d$  und  $Z_t$  zu berechnen ist.

In der Stoßspannungsmesstechnik kann der Fall  $Z_t = \Gamma$  kaum verwirklicht werden, da derartig niederohmige, rein Ohmsche Spannungsteiler nur in Sonderfällen angewandt werden können. Ein Dämpfungswiderstand am Anfang der Zuleitung lässt sich hingegen mit beliebigem Widerstandswert, also auch mit der Bedingung  $Z_d = \Gamma$ , konstruktiv leicht herstellen, da die Spannungsbeanspruchung relativ klein und damit auch die Baulänge kurz bleibt. Für diesen wichtigen Fall wurden in Anhang II die Übergangsfunktionen der vorliegenden Ersatzschaltungen zusammengestellt.

Gl. (9) kann natürlich auch dazu verwendet werden, eine sehr einfache Ersatzschaltung eines Messkreises zu untersuchen und die Schrittantwort anzugeben. Gemeint ist damit der Fall, dass sowohl die Impedanz des Dämpfungswiderstandes als auch die des Teilers rein Ohmsch, also  $Z_d(s) = R_d$  und  $Z_t(s) = R_t$ , ist. Die Reflexionskoeffizienten in Gl. (7) werden dann reell, und Gl. (9) vereinfacht sich zu:

$$\gamma_0(t) \circ \bullet \frac{e^{-\tau s}}{s} (1 - r_d r_t) \cdot \left[ 1 + (r_d r_t) e^{-2\tau s} + (r_d r_t)^2 \cdot e^{-4\tau s} + \dots \right] \quad (11)$$

Die Schrittantwort ist zwar nur stückweise stetig, die Amplituden in jedem Zeitintervall sind jedoch konstant:

$$\begin{aligned} \tau < t < 3\tau: \quad \gamma_0(t - \tau) &= (1 - r_d r_t) \\ 3\tau < t < 5\tau: \quad \gamma_0(t - 3\tau) &= (1 - r_d r_t) [1 + r_d r_t] \\ 5\tau < t < 7\tau: \quad \gamma_0(t - 5\tau) &= (1 - r_d r_t) [1 + r_d r_t + (r_d r_t)^2]; \text{ usf.} \end{aligned} \quad (12)$$

Obwohl dieser Fall eine unzulässig grosse Vernachlässigung darstellt, erläutert er das prinzipielle Verhalten eines Teilers mit Zuleitung in grundlegender Weise. Die in Fig. 6 aufgezeichneten Beispiele von Übergangsfunktionen nach Gl. (12) lassen den extrem starken Einfluss erkennen, den verschieden grosse Dämpfungswiderstände ausüben müssen.

### 3.2 Spannungsteiler-Ausgang

Die Gl. (5) und (6) können auch dazu dienen, die Sprungantwort am Spannungsteiler-Ausgang zu berechnen, wobei man sich wiederum auf den Sonderfall einer völlig bedämpften Zuleitung [ $Z_d(s) = \Gamma$ ] beschränken muss. Die Ergebnisse einer derartigen Berechnung für die vereinfachten Ersatzschaltungen Ohmscher (Fig. 3b) und kapazitiver (Fig. 4b) Teiler sind im Anhang III angegeben. Da bei einer Kettenleiterersatzschal-

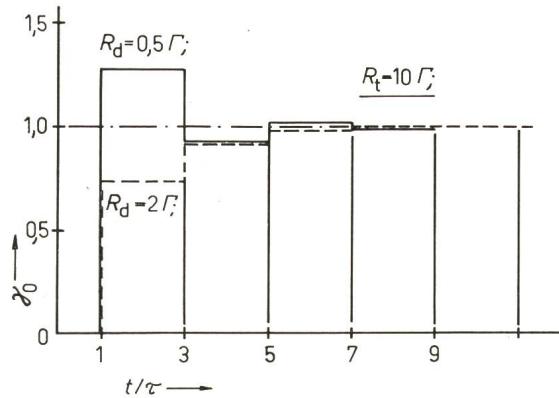
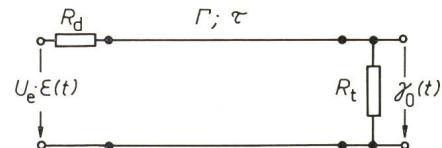


Fig. 6  
Typische Schrittantwort einer stark vereinfachten Messkreis-Ersatzschaltung mit Ohmschem Spannungsteiler  
 $R_d$  Dämpfungswiderstand der Zuleitung;  $t$  Zeit-Parameter;  $U_e$  Eingangsspannung;  $\gamma_0(t)$  Einheitssprungfunktion;  $\tau$  Laufzeit der Zuleitung;  
Erklärungen siehe im Text

tung bereits am Teiler-Eingang äusserst verwickelte Übergangsfunktionen vorliegen, wurde auf eine Berechnung am Teiler-Ausgang verzichtet. Bei einer Auswertung von Gl. (6), Anhang II, stellt man fest, dass bei bedämpften Zuleitungen die Eingangsspannung an gedämpft kapazitiven Teilern zunächst zwar schnell, dann aber nur sehr langsam den stationären Endwert erreicht. Bei der Diskussion von Gl. (2), Anhang III, ergibt sich zwar, dass man durch eine entsprechende Dimensionierung des Niederspannungswiderstandes  $R_u$  die Sprungantwort am Teiler-Ausgang in einfacher Weise so verändern kann, dass diese sehr schnell den stationären Endwert erreicht. Eine endgültige Auskunft über eine für beliebig stark bedämpfte Zuleitungen gültige Dimensionierungsregel von  $R_u$  erhält man aber erst aus den nachfolgenden Untersuchungen.

### 4. Analytische Berechnung der Antwortzeit T

Die mögliche vollständige Beschreibung der frequenzabhängigen Übertragungseigenschaften eines Meßsystems mit Hilfe der Schrittantwort besitzt bekanntlich den Vorteil, dass diese vor allem bei Stoßspannungsmesskreisen recht einfach experimentell bestimmt werden kann und zusammen mit den insbesondere graphisch oder digital jederzeit auswertbaren Duhamelschen Integralen eine Berechnung der Ausgangsgrößen des Meßsystems ermöglicht, wenn der zeitliche Verlauf der Eingangsgröße bekannt ist. Die letztgenannte Voraussetzung ist zwar in der Praxis niemals gegeben, da nur die fehlerbehafteten Ausgangsspannungen vorliegen und eine Rückrechnung auf die Eingangsspannung wegen des möglichen totalen Verlustes an Informationsinhalt durch das Übertragungssystem grundsätzlich scheitern muss. Man kann jedoch weitgehend linear ansteigende Spannungen (Keilwellen) erzeugen und diese allgemeinen Berechnungen zugrundelegen, so

dass die Anwendung des Duhamel-Integrals zu den bekannten Zusammenhängen zwischen den Ausgangs- und Eingangsgrößen führt, wobei die Antwort-Zeit als eine von mehreren charakteristischen Kenngrößen einer Sprungantwort eine recht bedeutende Rolle spielt [5].

Die Antwortzeit (response time) wird üblicherweise durch das einfache, bestimmte Integral

$$T = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t [1 - \gamma_0(t)] dt \quad (13)$$

mit

$$\gamma_0(t) = \frac{\gamma(t)}{\gamma(t \rightarrow \infty)}$$

definiert und stellt somit die Fläche dar, die der zeitliche Verlauf der normierten Schrittantwort mit deren stationärem Endwert 1 — unter Beachtung der Vorzeichen — einschliesst. Für die gestellte Aufgabe ist eine Auswertung von Gl. (13) deshalb nicht sinnvoll, da analytische Ausdrücke für die Übergangsfunktionen  $\gamma_0(t)$  nur für wenige Sonderfälle vorliegen. Abgesehen von seltenen Ausnahmen kann die Antwortzeit aber auch aus der normierten Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  berechnet werden, so dass die so schwierige Rücktransformation in die Zeit-Ebene unterbleiben kann. Der Zusammenhang zwischen Antwortzeit  $T$  und Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  kann leicht abgeleitet werden:

Ein bekannter Grenzwertsatz der Laplace-Transformation [6] besagt, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot y(s)] \quad (14)$$

ist. Hierin ist  $y(s)$  die Bildfunktion einer gegebenen Zeitfunktion  $y(t)$ , und es muss vorausgesetzt werden, dass  $y(s)$  gegen Null konvergiert, wenn  $s$  auf einem Strahl der komplexen Ebene gegen Unendlich strebt, der eine Neigung  $< \pi/2$  gegen die positive, reelle Achse besitzt. Diese Bedingung ist in der Regel erfüllt, wenn man die Gl. (13) als unbestimmtes Integral und als die in Gl. (14) erscheinende Zeitfunktion betrachtet:

$$T = \lim_{t \rightarrow \infty} [T(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \int_0^t [1 - \gamma_0(\xi)] d\xi \right] \quad (15)$$

Da  $1 - \frac{1}{s}$  und  $\gamma_0(t) - \frac{1}{s}$  ist, lässt sich mit Hilfe des Integralsatzes der Laplace-Transformation das unbestimmte Integral auf der rechten Seite von Gl. (15) in den Bildbereich transformieren:

$$\int_0^t [1 - \gamma_0(\xi)] d\xi \rightarrow -\frac{1}{s} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s} G_0(s) \right] \quad (16)$$

Die Anwendung des Grenzwertsatzes, Gl. (14) liefert somit zunächst:

$$T = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} G_0(s) \right) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - G_0(s)}{s} \right] \quad (17)$$

Eine unmittelbare Anwendung von Gl. (17) scheitert an der Unbestimmtheit des Grenzwertes für  $s \rightarrow 0$ , da die normierte Übertragungsfunktion für  $s \rightarrow 0$  definitionsgemäß den Wert 1 annimmt. Eine Entwicklung von  $G_0(s)$  in eine Taylor-Reihe um den Wert  $s = 0$  oder die unmittelbare Anwendung der Regel von Bernoulli liefert den gesuchten Zusammenhang:

$$T = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ -\frac{d G_0(s)}{ds} \right] \quad (18)$$

Gl. (18) kann dazu benutzt werden, die vorliegenden Ersatzschaltungen zu berechnen. Die normierte Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  ist in den Gl. (5) und (6) bereits implizit enthalten, und es lässt sich leicht nachprüfen, dass bei Verwendung der Stammfunktion  $A_{11}(s)$  der folgende Grenzwert zu berechnen ist:

$$T = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{ds} [A_{11}(s)]}{A_{11}(s)} \quad (19)$$

mit

$$A_{11}(s) = S(s) \cdot \sinh(\tau s) + C(s) \cdot \cosh(\tau s)$$

und

$$S(s), C(s) \text{ gemäß Gl. (5).}$$

Die notwendige Ableitung der Stammfunktion führt zum Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [A_{11}(s)] &= [S'(s) + \tau \cdot C(s)] \sinh(\tau s) + \\ &+ [\tau \cdot S(s) + C'(s)] \cosh(\tau s) \end{aligned} \quad (20)$$

Setzt man die Kettenmatrix-Elemente nach Anhang I in die Faktoren  $S(s)$  und  $C(s)$  ein, so stellt man fest, dass sie aus recht umfangreichen rationalen oder transzendenten Funktionen bestehen, so dass die Rechenarbeit zur Auswertung der Gl. (19) sehr gross werden kann. Für die vorliegenden Ersatzschaltungen streben aber die Grenzübergänge

$$\lim_{s \rightarrow 0} S(s) \neq \infty; \quad \lim_{s \rightarrow 0} S'(0) \neq \infty; \quad \lim_{s \rightarrow 0} C(s) \neq 0$$

einem endlichen Zahlenwert zu, so dass der erste Summand in Gl. (20) stets entfällt. Gl. (19) geht dann in den vereinfachten Ausdruck über:

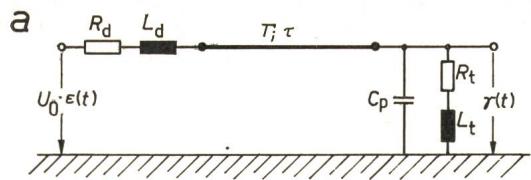
$$T = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{C(s)} \left[ \tau \cdot S(s) + \frac{d}{ds} C(s) \right] \right\} \quad (21)$$

$S(s); C(s)$  siehe Gl. (5)

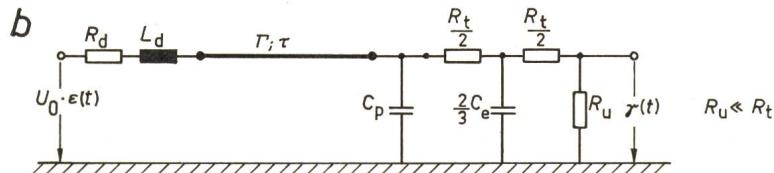
Die nach Gl. (18), bzw. Gl. (19) und (21) berechnete Antwort-Zeit entspricht der Integration aus einer Übergangsfunktion, deren Zeitpunkt  $t = 0$  identisch ist mit dem Erscheinen des Spannungssprunges am Eingang des Meßsystems. Wegen der Laufzeit der Zuleitung beginnt die Sprungantwort am Eingang des Teilers aber erst zur Zeit  $t = \tau$ . Dasselbe gilt für die Übergangsfunktion am Ausgang der Spannungsteiler für alle Teiler-Ersatzschaltungen, bei denen keine Kettenleiterersatzschaltung mit eindeutigem Laufzeitcharakter vorliegt. Da die mangelnde Koinzidenz zwischen der Eingangs- und Ausgangsspannung bei der Messung einer einzelnen Stoßspannung bedeutungslos ist, gibt man sinnvollerweise die analytisch berechnete Antwortzeit so an, dass der Beginn der Schrittantwort mit dem Eintreffen der Spannungswelle am Teilereingang zusammenfällt:

$$T_\tau = T - \tau \quad (22)$$

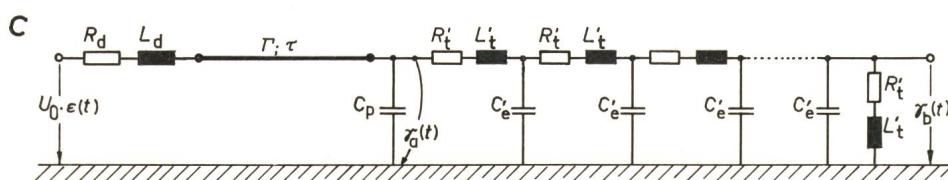
Für sämtliche Ersatzschaltungen wurde diese Antwortzeit  $T_\tau$  berechnet, die Ergebnisse in den Fig. 7 und 8 zusammengefasst. Am Beispiel der Ersatzschaltung Ohmscher und gedämpft kapazitiver Spannungsteiler durch eine Kettenleiterersatzschaltung ist in Anhang IV die Ableitung der Ergebnisse unter Angabe der wesentlichen Zwischenrechnungen wiedergegeben.



$$\tau = \frac{1}{1 + \frac{R_d}{R_t}} \left[ \frac{R_d}{R_t} \left( \frac{L_d}{R_d} - \frac{L_t}{R_t} \right) + R_d C_p - \tau \left( 1 - \frac{R_t}{R_d} \right) \left( 1 - \frac{R_d}{R_t} \right) \right]$$



$$\tau = \frac{1}{1 + \frac{R_d}{R_t}} \left[ \frac{R_d}{R_t} \cdot \frac{L_d}{R_d} + \frac{R_t C_e}{6} + R_d (C_p + \frac{C_e}{3}) - \tau \left( 1 - \frac{R_t}{R_d} \right) \left( 1 - \frac{R_d}{R_t} \right) \right]$$



$$\tau_a(t): \tau = \frac{1}{1 + \frac{R_d}{R_t}} \left[ \frac{R_d}{R_t} \left( \frac{L_d}{R_d} - \frac{L_t}{R_t} \right) + R_d C_p - \tau \left( 1 - \frac{R_t}{R_d} \right) \left( 1 - \frac{R_d}{R_t} \right) \right]$$

$$\tau_b(t): \tau = \frac{1}{1 + \frac{R_d}{R_t}} \left[ \frac{R_d}{R_t} \left( \frac{L_d}{R_d} - \frac{L_t}{R_t} \right) + \frac{R_t C_e}{6} + R_d (C_p + \frac{C_e}{2}) - \tau \left( 1 - \frac{R_t}{R_d} \right) \left( 1 - \frac{R_d}{R_t} \right) \right]$$

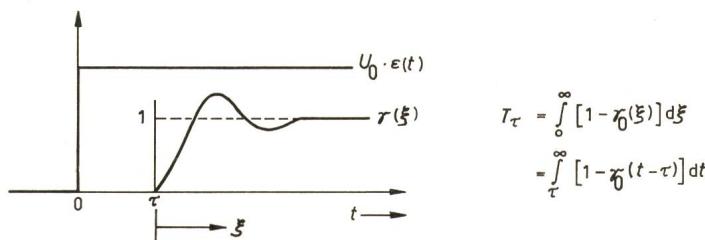


Fig. 7  
Berechnete Antwortzeiten Ohmscher Spannungsteiler  
Bezeichnungen siehe Fig. 3, 4 und 5

Diese analytischen Ergebnisse lassen nun die Zusammenhänge in einem Stoßspannungsmesskreis zwischen den Schalt-elementen und der Antwortzeit sehr eindeutig erkennen:

#### 4.1 Ohmsche Spannungsteiler (Fig. 7)

Erstaunlicherweise ist die Antwortzeit am Teiler-Eingang unabhängig von der Ersatzschaltung des Teilers (vgl. Fig. 7a und 7c). Die Erdkapazität  $C_e$  tritt hier noch nicht in Erscheinung, sondern erst am Teiler-Ausgang, im wesentlichen durch die bekannte Zeitkonstante  $R_t C_e/6$ , welche sich auch aus einer Berechnung des Übertragungsverhaltens für einen Ohmschen Spannungsteiler ohne Zuleitung ergibt.

Alle sonstigen Glieder werden stark von der Grösse des Dämpfungswiderstandes  $R_d$  und der Länge der Zuleitung — Laufzeit  $\tau$  — beeinflusst. Insbesondere verkleinert eine unbe-

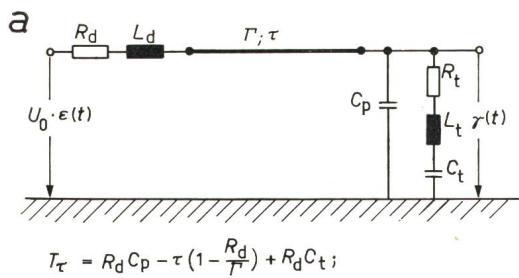
dämpfte Zuleitung ( $R_d = 0$ ) die Antwortzeit des gesamten Messkreises praktisch um den Wert  $\tau$ , da üblicherweise der Teilerwiderstand gross gegenüber dem Wellenwiderstand ist. Der Einfluss der Zuleitungslänge auf die Antwortzeit verschwindet aber, wenn  $R_d = \Gamma$  ist. Die Antwortzeit wird dann aber grösser als die des Teilers alleine, da zusätzliche Zeitkonstanten zwischen dem Dämpfungswiderstand und den sonstigen Streukapazitäten ( $C_p, C_e$ ) auftreten. Erfreulicherweise spielen die induktiven Zeitkonstanten von Dämpfungswiderstand ( $L_d/R_d$ ) und Teiler ( $L_t/R_t$ ) eine nur nebensächliche Rolle, da sie sich subtrahieren und darüber hinaus mit dem Widerstandsverhältnis  $R_d/R_t$  multipliziert auftreten.

#### 4.2 Kapazitive Spannungsteiler (Fig. 8)

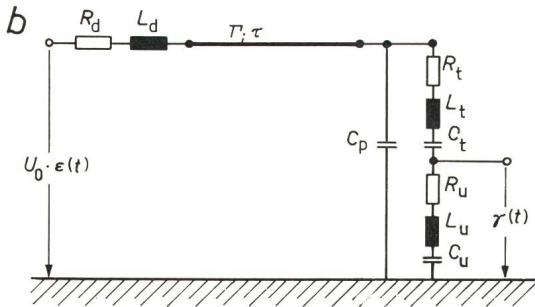
Vor allem am hochspannungsseitigen Eingang weichen die Ergebnisse für die Antwortzeit bei kapazitiven Teilern stark von denen bei den Ohmschen Teilern ab. Erklärbar ist dieser Unterschied aus der stark unterschiedlichen Frequenzabhängigkeit des Impedanzverlaufes des Teilers einerseits und des Dämpfungswiderstandes andererseits. Für kleine Frequenzen strebt die Impedanz des Dämpfungswiderstandes dem Wert  $R_d$  und die Impedanz des Teilers dem Wert Unendlich zu. Ein Serienwiderstand  $R_t$  im Teiler beeinflusst daher die Antwortzeit auch nicht (siehe Fig. 8a und 8c), die ganz wesentlich von der Zeitkonstante  $R_t C_t$  abhängt, sofern die Zuleitung bedämpft wird.

Für die Stoßspannungsmessung interessiert nun aber allein die Sprungantwort am Ausgang des Teilers, die sich beliebig stark von

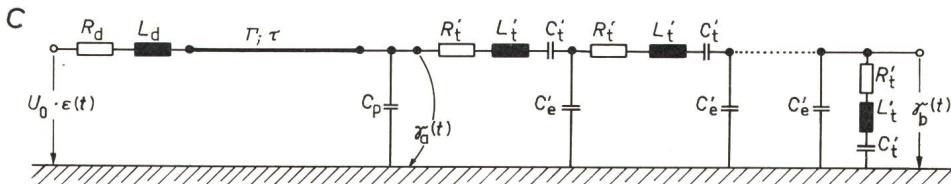
dem Vorgang am Teiler-Eingang unterscheidet, wenn der Niederspannungswiderstand  $R_u$  variiert wird. Sichtbar wird dies unmittelbar aus der Messkreis-Ersatzschaltung Fig. 8b, die den Spannungsteiler in einen Hoch- und einen Niederspannungsteil aufspaltet. Wählt man die Eigen-Zeitkonstanten dieser beiden Elemente ( $R_t C_t$ , bzw.  $R_u C_u$ ) gleich gross, so stellen sich gleiche Verhältnisse wie auf der Hochspannungsseite ein. Nun lässt sich aber der Niederspannungswiderstand  $R_u$  in der Praxis beliebig verändern, so dass man durch eine Vergrösserung von  $R_u$  die störende Zeitkonstante  $R_d C_t$  leicht zum Verschwinden bringen kann. Dabei taucht wiederum die Frage auf, in welcher Weise  $R_u$  dimensioniert werden muss, um ein möglichst schnelles Einschwingen in den stationären Endwert bei der Übergangsfunktion zu erreichen. Ein einfacher Gedankengang ermöglicht bereits an dieser Stelle, eine allge-



$$T_{\tau} = R_d C_p - \tau \left(1 - \frac{R_d}{\Gamma}\right) + R_d C_t;$$



$$T_{\tau} = R_d C_p - \tau \left(1 - \frac{R_d}{\Gamma}\right) + (R_d + R_t) C_t - R_u C_u; \text{ für } L_t/R_t = L_u/R_u$$



$$\begin{aligned} z_a(t): T_{\tau} &= R_d (C_p + \sqrt{C_e C_t} \cdot \coth \sqrt{\frac{C_e}{C_t}}) - \tau \left(1 - \frac{R_d}{\Gamma}\right); \\ &\approx R_d (C_p + \frac{C_e}{3}) - \tau \left(1 - \frac{R_d}{\Gamma}\right) + R_d C_t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_b(t): T_{\tau} &= R_d C_p + (R_d + \frac{R_t}{2}) \sqrt{C_e C_t} \cdot \coth \sqrt{\frac{C_e}{C_t}} - \frac{R_t C_t}{2} - \tau \left(1 - \frac{R_d}{\Gamma}\right) \\ &\approx \frac{R_t C_e}{6} + R_d (C_p + \frac{C_e}{3}) - \tau \left(1 - \frac{R_d}{\Gamma}\right) + R_d C_t; \end{aligned}$$

meingültige Dimensionierungsregel anzugeben, wenn man die Ersatzschaltung Ohmscher Teiler nach Fig. 7a mit der gleichwertigen Ersatzschaltung kapazitiver Teiler nach Fig. 8b vergleicht. Für die hochfrequenten Vorgänge bleiben die Längskapazitäten  $C_t$  des kapazitiven Teilers weitgehend wirkungslos, da sie eine gegenüber  $R_t$  kleine Impedanz aufweisen. In kurzen Zeitbereichen muss demnach, wie auch jegliche praktische Erfahrung zeigt, ein gedämpft kapazitiver Teiler denselben Einschwingvorgang wie ein niederohmiger, Ohmscher Teiler besitzen, dessen Übergangsfunktion sehr schnell den stationären Endwert erreichen kann. Damit müssten auch die analytischen Ausdrücke für die Antwortzeit gleich werden. Setzt man nun die Ausdrücke für die Antwortzeit der beiden Ersatzschaltungen einander gleich und beachtet, dass die induktiven Zeitkonstanten  $L_d/R_d$  und  $L_t/R_t$  bei kapazitiven Teilern ohnehin keinen Beitrag liefern, so ergibt diese Bedingungsgleichung die wichtige Beziehung

$$R_u C_u = (R_d + R_t) C_t + \frac{R_d / R_t}{1 + R_d / R_t} \cdot \left[ R_d C_p + \left( \frac{R_d}{\Gamma} - \frac{\Gamma}{R_d} \right) \right] \quad (23)$$

Eine ähnliche Rechnung führt bei einem Vergleich der Antwortzeiten am Ausgang der Kettenleiterersatzschaltungen

Fig. 8  
Berechnete Antwortzeiten kapazitiver Spannungsteiler  
Bezeichnungen siehe Fig. 3, 4, 5 und 7

(ersetze  $R_d C_t$  in Fig. 8c durch  $[(R_d + R_t) C_t - R_u C_u]$  zu demselben Ergebnis, wobei in Gl. (23) lediglich  $C_p$  durch  $C_p + \frac{C_e}{3}$  zu ersetzen ist.

Auch wenn  $R_u C_u$  im wesentlichen durch die Zeitkonstante  $(R_d + R_t) C_t$  bestimmt wird, vermeidet man durch die kleine Korrekturgrösse bei bedämpften Zuleitungen ein wenn auch nur sehr schwach ausgeprägtes Anschleichen des Endwertes der Übergangsfunktion in grösseren Zeitbereichen. Ein Beweis für die Gültigkeit dieser Gedankengänge kann jedoch nur anhand digital berechneter Übergangsfunktionen erbracht werden, welche im nächsten Abschnitt kurz beleuchtet werden.

Alle analytischen Ausdrücke für die Antwortzeit bei kapazitiven Teilern nach Fig. 8 besitzen somit für die Praxis nur eine untergeordnete Bedeutung. Dimensioniert man den Niederspannungsteil in Übereinstimmung mit Gl. (23), so verhält sich ein gedämpft kapazitiver Teiler wie ein Ohmscher Teiler, d. h. die Antwortzeit am Teiler-Ausgang gehorcht der aus Fig. 7c ersichtlichen Abhängigkeit.

## 5. Digitale Berechnung der Schrittantwort

Die Ausgleichsvorgänge innerhalb der vorliegenden Ersatzschaltungen lassen sich, wenn man allein die Zeit-Ebene betrachtet,

durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die konzentrierten Schaltelemente und partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung für die verlustlose Leitung beschreiben. Eine geschlossene analytische Lösung dieses Gleichungssystems ist aber nicht möglich.

Wandelt man aber die gewöhnlichen Differentialgleichungen in Differenzengleichungen um und wählt die von Bergeron ursprünglich im Jahre 1928 angegebene Methode zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen, so gelangt man zu einem linearen Gleichungssystem, mit dem die Zustände im gesamten Netzwerk in diskretisierten Zeitschritten beschrieben werden können. Da jede numerische Berechnung von Aufgaben mit Hilfe eines Digitalrechners notwendigerweise ebenfalls diskretisierte Ergebnisse liefert, stellt dieses Verfahren einen ausgezeichneten Algorithmus zur digitalen Lösung von Übergangsvorgängen in Netzwerken dar. Die Umwandlung der gewöhnlichen Differentialgleichungen in Differenzengleichungen ist zwar grundsätzlich fehlerbehaftet. Das Leistungsvermögen moderner Rechner erlaubt es aber, die Zeitintervalle  $\Delta t$  für diese Diskretisierung so klein zu machen, dass eine beliebig grosse Genauigkeit erzielbar ist.

Die digitalen Berechnungen wurden mit Hilfe eines von H. W. Dommel erstellten Programmes durchgeführt, dessen

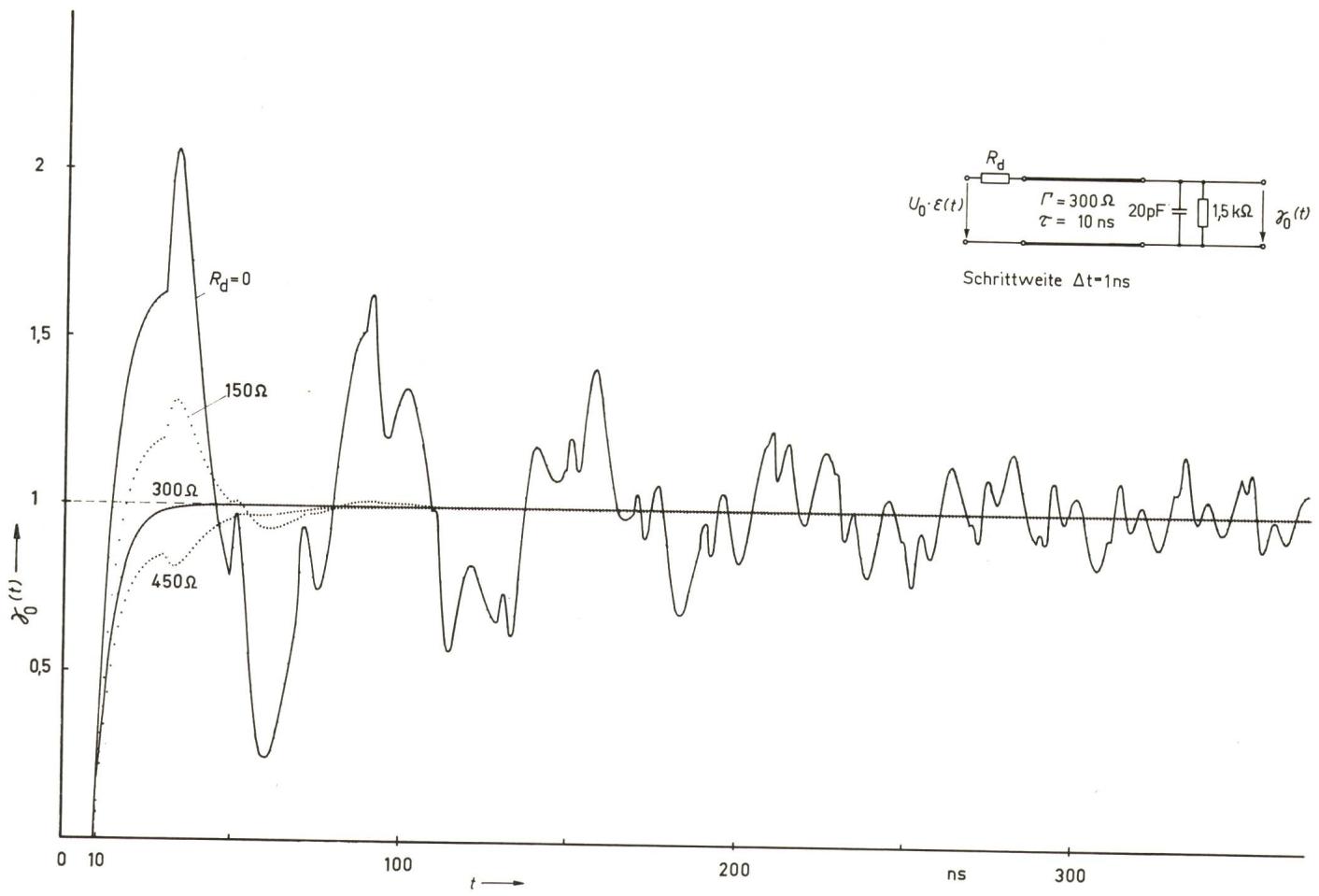


Fig. 9  
**Schrittantwort am Eingang eines niederohmigen Ohmschen Teilers**  
 $t$  Zeit-Parameter;  $\gamma_0(t)$  normierte Schrittantwort;  $R_d$  Dämpfungswiderstand der Zuleitung;  $U_0 \cdot \epsilon(t)$  Schrittspannung;  $\Gamma$  Wellenwiderstand der Zuleitung;  $\tau$  Laufzeit der Zuleitung

Grundlagen in [7] eingehend erläutert sind. Die Zeitschritte  $\Delta t$  wurden jeweils zu einem Zehntel der Laufzeit der Zuleitung gewählt, was zu einer Genauigkeit führte, die für die gewählte graphische Wiedergabe der Ergebnisse völlig ausreichend ist.

Eine kleine Auswahl digital berechneter Übergangsfunktionen in den Fig. 9 bis 15 soll vor allem dazu dienen, die durch die Zuleitung zu einem Spannungsteiler hervorgerufenen komplexen Vorgänge zu erläutern, die Ursachen für die Veränderungen der Antwortzeit mit der Dämpfung der Zuleitung aufzudecken und auf einige Besonderheiten hinzuweisen, die für die Praxis der Stoßspannungsmesstechnik von Wichtigkeit sind:

In Fig. 9 und 10 ist der Spannungsteiler nur durch einen Widerstand ersetzt, dem eine konzentrierte Kapazität parallel geschaltet wurde. Diese Parallelkapazität bildet den einzigen Unterschied zu den in Fig. 6 dargestellten Vorgängen. Man sieht, vor allem bei einer unbedämpften Zuleitung, dass die Treppenförmigkeit der Wanderwellenvorgänge durch diese Parallelkapazität verloren geht und ein ausgeprägter Schwingungsvorgang angeregt wird, der durch die Überlagerung von Teilreflexionen am Ein- und Ausgang der Zuleitung entsteht. In der Praxis dämpft das Übertragungsverhalten des Teilers und des sonstigen Netzwerkes (Kabel, Oszilloskop) diese Schwingungen. Nur eine insbesondere kritisch bedämpfte Zuleitung ( $R_d = \Gamma$ ) kann zu einem kontinuierlichen Spannungsverlauf am Teiler führen, wobei die Anstiegszeit aber durch die Parallelkapazität stark vergrößert wird.

Schwingungen in der Sprungantwort können oft allein durch die induktiven Komponenten der Widerstände hervorgerufen werden, wie Fig. 11 zeigt. Von besonderem Interesse ist hierbei ein Vergleich der Antwortzeiten für die dargestellten Fälle. Setzt man die Netzkreisdaten in die in Fig. 7a angegebene Gleichung ein, so erhält man für  $L_d/R_d = L_t/R_t$  einen Zahlenwert für die Antwortzeit von 14,775 ns. Fehlt die induktive Zeitkonstante  $L_t/R_t$ , so ändert sich die Antwortzeit selbst bei  $L_d/R_d = 20$  ns nur um 0,3 ns. In der Tat gelten die angegebenen drei Übergangsfunktionen sowohl für  $L_d/R_d = L_t/R_t$  als auch für  $L_t/R_t = 0$ . Die Unterschiede im Kurvenverlauf sind, wie bereits die unerhebliche Veränderung der Antwortzeit vermuten lässt, so gering, dass sie sich zeichnerisch nicht mehr darstellen lassen. Die Schwingungen werden somit praktisch ausschließlich vom induktiven Anteil des Dämpfungswiderstandes verursacht.

Die Kreisdaten der Ersatzschaltung von Fig. 12 wurden auf Grund von experimentellen Untersuchungen an einem extrem gut gesteuerten, Ohmschen Spannungsteiler für eine Spannung von 1 MV ausgewählt. Anhand dieser Übergangsfunktionen kann der Zeitablauf der Vorgänge anschaulich demonstriert werden. Wie auch bei allen übrigen Darstellungen beginnt die Zeitachse ( $t = 0$ ) mit dem Einsatz der Sprungfunktion  $\epsilon(t)$  am Eingang des Messkreises. Die Sprungantwort am Teilereingang  $[\gamma_0(t)]_a$  erscheint nach Ablauf der Zuleitungslaufzeit von 20 ns. Die Kettenleiterersatzschaltung des Teilers selbst verzögert den Einsatz der Übergangsfunktion am Teilerausgang  $[\gamma_0(t)]_b$  wie-

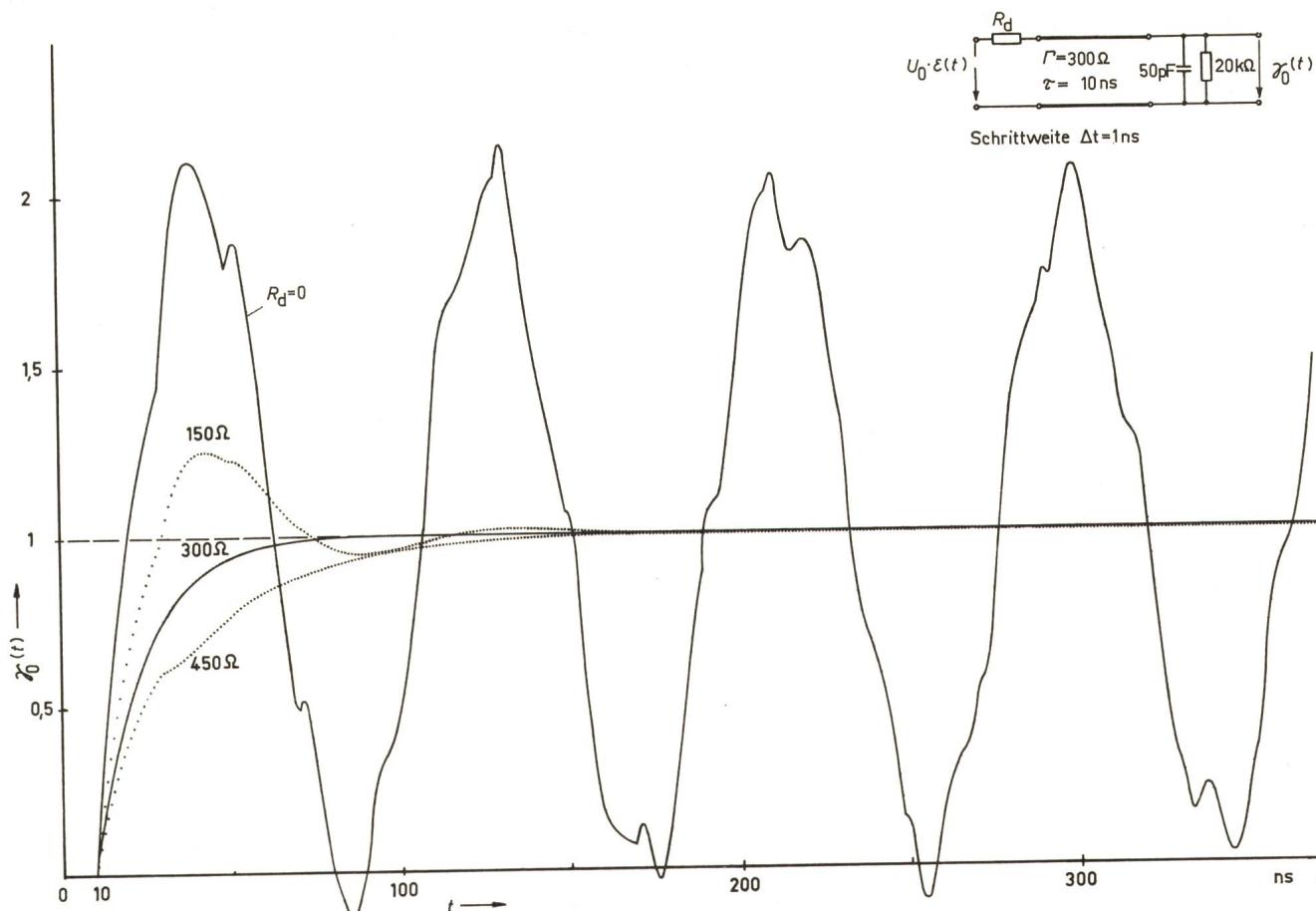


Fig. 10  
Schrittantwort am Eingang eines hochohmigen Ohmschen Teilers

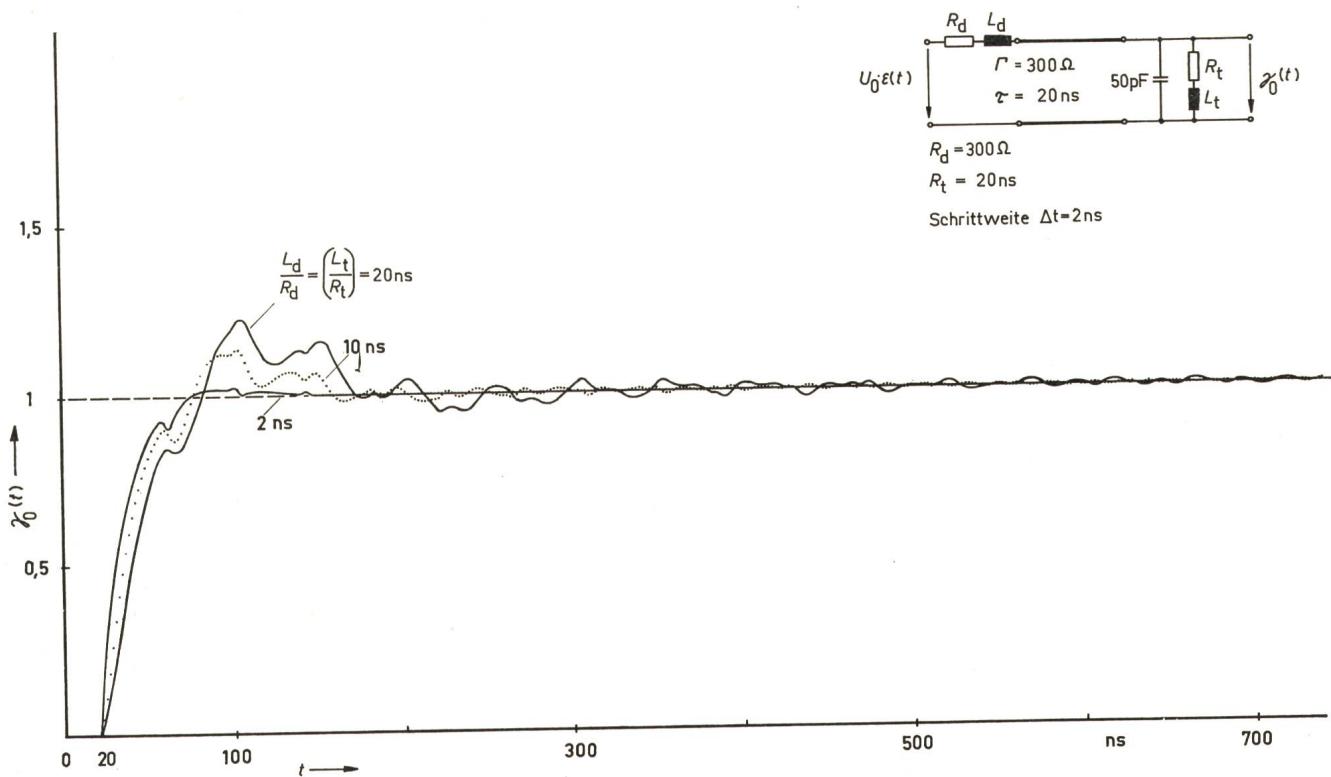


Fig. 11  
Schrittantwort am Eingang eines hochohmigen Ohmschen Teilers mit induktionsbehafteten Widerständen  
 $L_d$  Induktivität des Dämpfungswiderstandes;  $L_t$  Teiler-Induktivität;  $R_t$  Teiler-Widerstand  
Weitere Bezeichnungen siehe Fig. 9

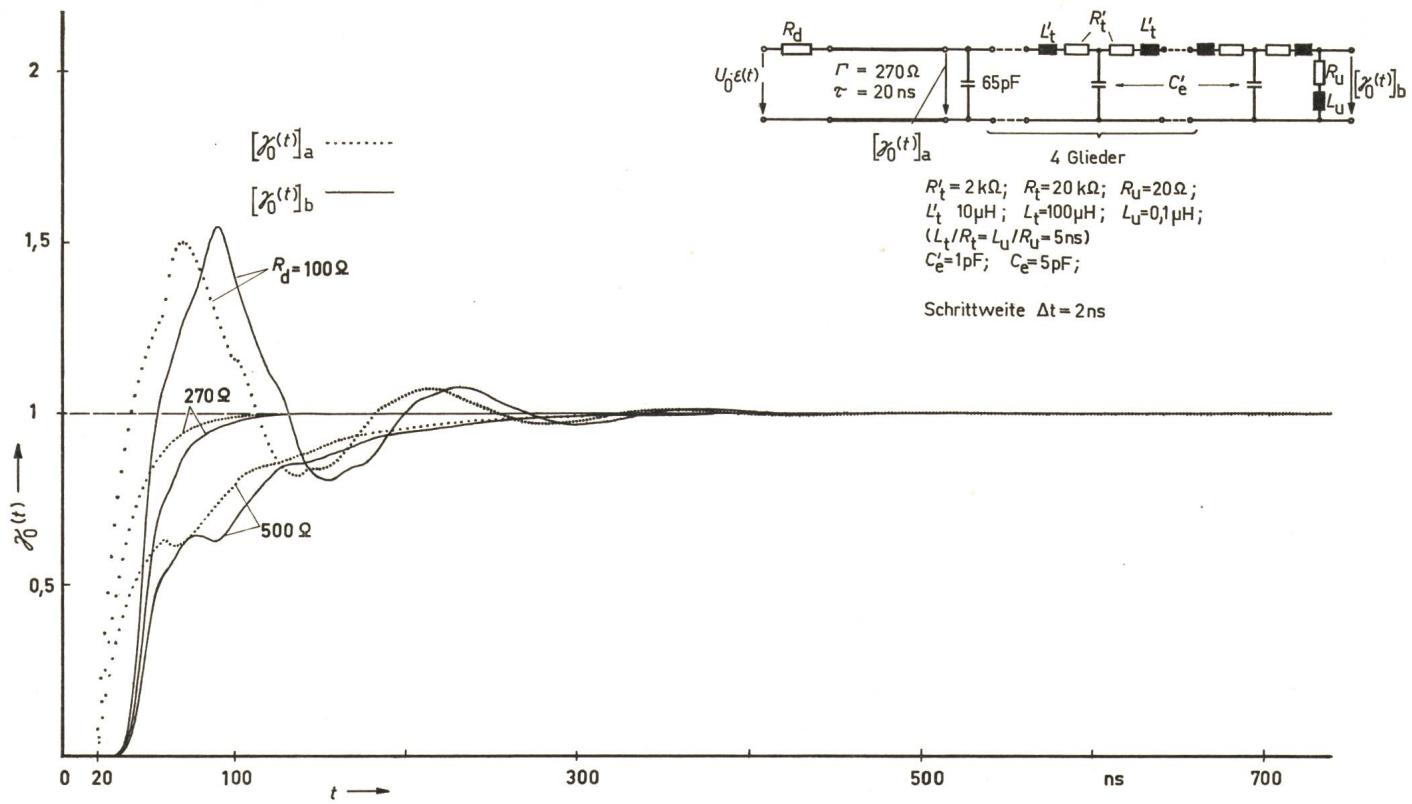


Fig. 12  
Schrittantwort am Eingang und Ausgang eines hochohmigen Ohmschen Teilers in Kettenleiterersatzschaltung

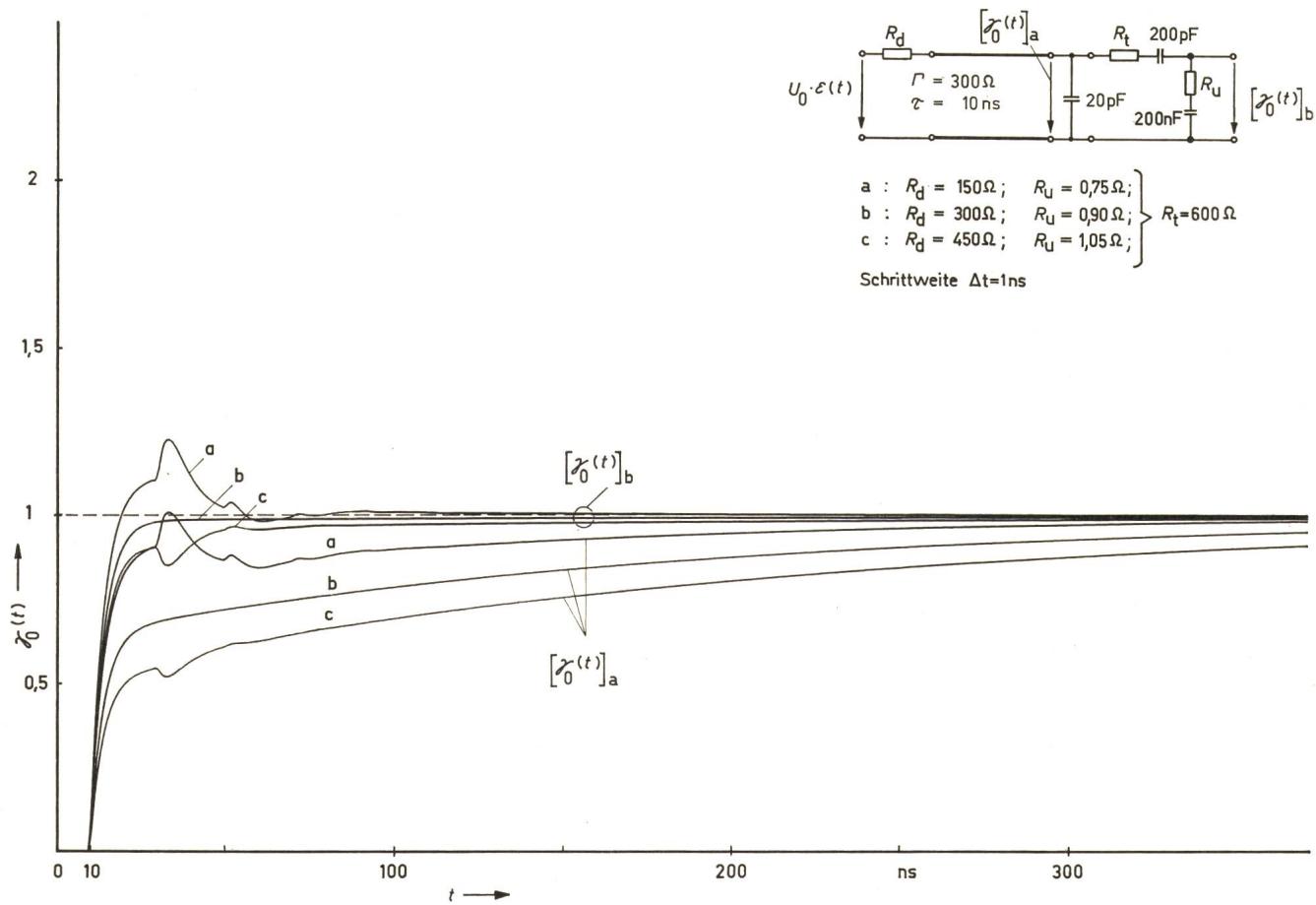


Fig. 13  
Schrittantwort am Ein- und Ausgang gedämpft kapazitiver Teiler: Falsche Auslegung des Niederspannungsteiles

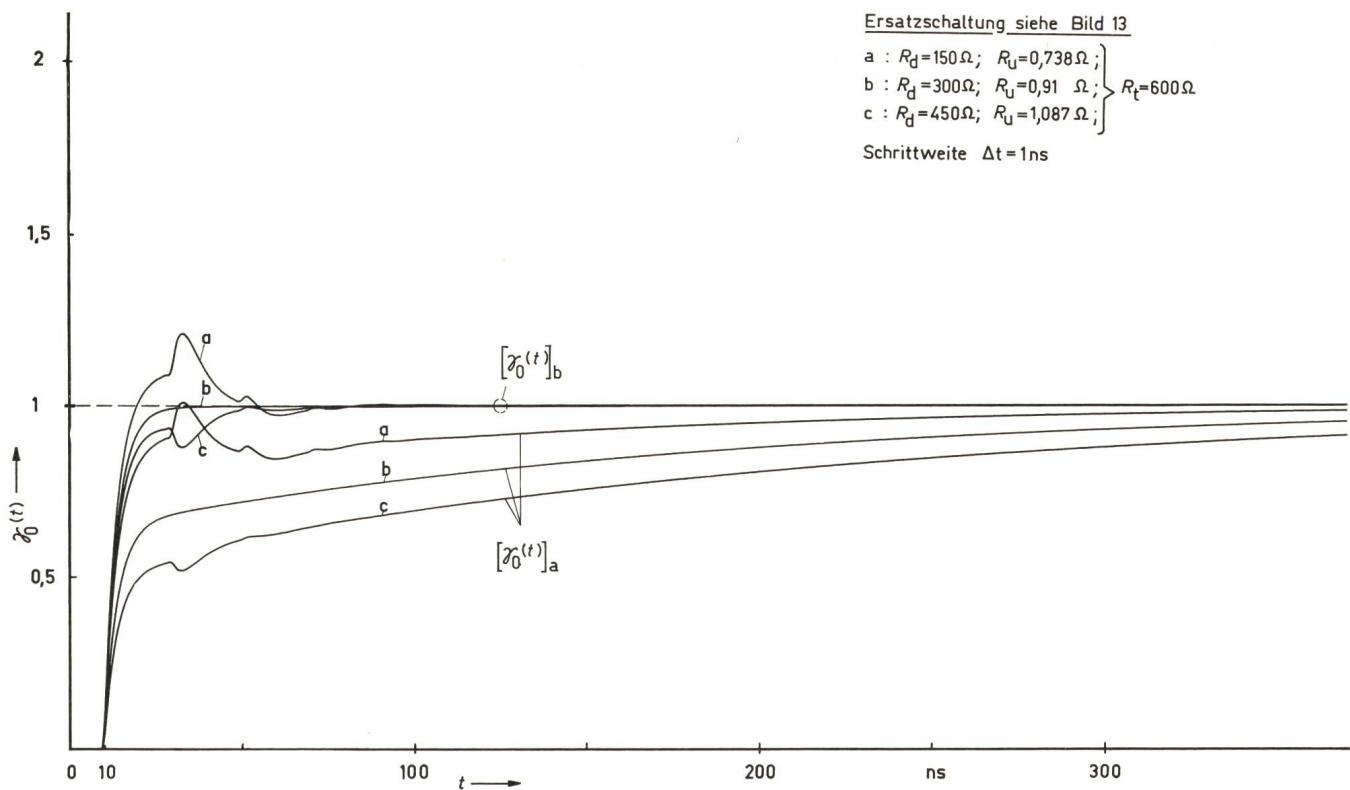


Fig. 14  
Schrittanwort am Ein- und Ausgang gedämpft kapazitiver Teiler: Richtige Auslegung des Niederspannungsteiles

derum, und zwar im wesentlichen um die Eigenlaufzeit des Teilers:

$$\tau_t = \sqrt{L_t C_e} = 22,4 \text{ ns}$$

Die vorgenommene Kettenleiternachbildung durch nur fünf T-Glieder ergibt natürlich einen verschliffenen Einsatz der digital berechneten Übergangsfunktion. Es sei aber nochmals darauf hingewiesen, dass die analytisch berechneten Antwortzeiten  $T_\tau$  davon ausgehen, dass die Übergangsfunktion zum Zeitpunkt  $t = \tau$  beginnt. Eine praktisch gemessene Antwortzeit eines Messkreises kann somit durchaus kleiner sein, als aufgrund der theoretischen Abhängigkeiten zu erwarten wäre.

Die restlichen Übergangsfunktionen wurden ausgewählt, um die Vorgänge bei gedämpft kapazitiven Teilern zu erläutern. Würde man den in Gl. (23) erscheinenden zweiten Summanden bei einer Dimensionierung des Niederspannungsteiles nicht berücksichtigen, so wird der Endwert der Sprungantwort nach dem ersten, schnellen Einschwingungsvorgang erst nach langer Zeit erreicht, wobei entweder ein Anschleichen der Übergangsfunktion bei kleinem  $R_d$  von oben oder bei zu grossem  $R_d$  von unten her erfolgt (Fig. 13). Berücksichtigt man jedoch den zweiten Summanden in Gl. (23), so verschwindet diese Erscheinung völlig (Fig. 14). Dass mit dieser Dimensionierung auch bei einer Kettenleiterersatzschaltung gedämpft kapazitiver Teiler derselbe Effekt erzielt wird, zeigt schliesslich Fig. 15. Der hier angegebene, normierte Endwert 1 bezieht sich auf das Nennübersetzungsverhältnis kapazitiver Teiler ohne Berücksichtigung der Erdkapazitäten  $C_e$ . Bekanntlich wird aber die Ausgangsspannung bei kapazitiven Teilern frequenzunabhängig um  $\frac{C_e}{6C_t} 100\%$  verringert, was in dem vorliegenden Beispiel einem Wert von ca. 3 % entspricht. Alle berechneten Übergangsfunktionen schwingen in diesem Falle auf diesen um 3 % erniedrigten Endwert ein, womit die Gültigkeit der Gl. (23) nochmals bewiesen wird.

Die digitalen Berechnungen wurden am Leibniz-Rechenzentrum der Bayerischen Akademie der Wissenschaften durchgeführt, welches dankenswerterweise grössere Rechenzeiten kostenlos zur Verfügung stellte. Ein besonderer Dank des Autors gilt auch Dipl.-Ing. Grötzbach, der im Rahmen einer am Institut für Hochspannungs- und Anlagentechnik der Technischen Hochschule München angefertigten Arbeit tatkräftig bei der analytischen Berechnung der Antwortzeiten und digitalen Ermittlung der Übergangsfunktionen mitwirkte.

#### Anhang I Zusammenstellung einiger Matrix-Elemente

a) Ersatzschaltungen nach Fig. 3a und 4a

$$A_{11}^{(t)}(s) = 1$$

$$A_{12}^{(t)}(s) = 0$$

$$A_{21}^{(t)}(s) = \frac{1}{Z_t(s)}$$

$$A_{22}^{(t)}(s) = 1$$

$$\text{Fig. 3a: } Z_t(s) = R_t + sL_t$$

$$\text{Fig. 4a: } Z_t(s) = R_t + sL_t + \frac{1}{sC_t}$$

b) Ersatzschaltung nach Fig. 3b

$$A_{11}^{(t)}(s) = 1 + \frac{R_t}{R_u} + s \left( 1 + \frac{R_t}{2R_u} \right) \left( \frac{R_t C_e}{3} \right)$$

$$A_{12}^{(t)}(s) = R_t + s \frac{R_t}{2} \cdot \frac{R_t C_e}{3}$$

$$A_{21}^{(t)}(s) = \frac{1}{R_u} + s \left[ \frac{2C_e}{3} + \frac{R_t}{R_u} \cdot \frac{C_e}{3} \right]$$

$$A_{22}^{(t)}(s) = 1 + s \frac{R_t C_e}{3}$$

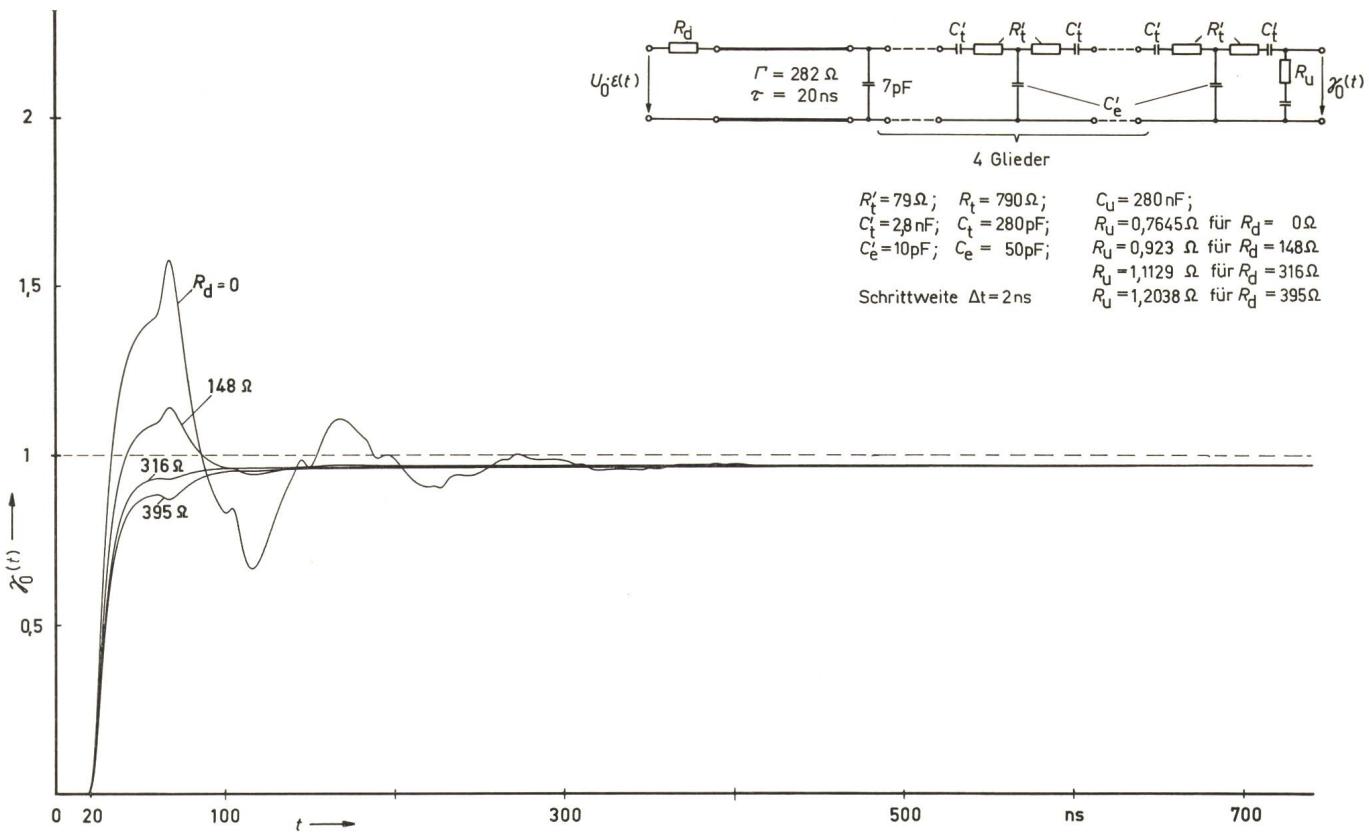


Fig. 15  
Schrittantwort gedämpft kapazitiver Teiler in Kettenleiterersatzschaltung

c) Ersatzschaltung nach Fig. 4b

$$A_{11}^{(t)}(s) = 1 + \frac{C_u}{C_t} \cdot \frac{1 + s R_t C_t + s^2 L_t C_t}{1 + s R_u C_u + s^2 L_u C_u}$$

$$A_{12}^{(t)}(s) = \frac{1}{s C_t} (1 + s R_t C_t + s^2 L_t C_t)$$

$$A_{21}^{(t)}(s) = \frac{s C_u}{1 + s R_u C_u + s^2 L_u C_u}$$

$$A_{22}^{(t)}(s) = 1$$

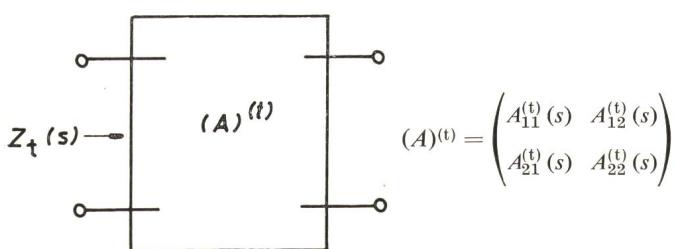
d) Ersatzschaltung nach Fig. 5

$$A_{11}^{(t)}(s) = \frac{\sinh \sqrt{Z_1(s) / Z_q(s)}}{\sinh \frac{n}{N} \sqrt{Z_1(s) / Z_q(s)}}$$

$$A_{12}^{(t)}(s) = \sqrt{Z_1(s) \cdot Z_q(s)} \cdot \sinh \frac{N-n}{N} \sqrt{Z_1(s) / Z_q(s)}$$

$$A_{21}^{(t)}(s) = \frac{1}{\sqrt{Z_1(s) \cdot Z_q(s)}} \cdot \frac{\cosh \sqrt{Z_1(s) / Z_q(s)}}{\sinh \frac{n}{N} \sqrt{Z_1(s) / Z_q(s)}}$$

$$A_{22}^{(t)}(s) = \cosh \frac{N-n}{N} \sqrt{Z_1(s) / Z_q(s)}$$



Wegen der Kleinheit der Ausgangsspannung erhält man die Eingangsimpedanz  $Z_t(s)$  des Vierpols aus der Beziehung

e) Eingangsimpedanz von Spannungsteilern

$$Z_t(s) = \frac{A_{12}^{(t)}(s)}{A_{22}^{(t)}(s)}$$

Anhang II  
Die Schrittantwort am Spannungsteiler-Eingang  
für  $Z_q(s) = \Gamma$

I. Ohmsche Teiler; Ersatzschaltung in Fig. 3a

$$T_1 = \frac{R_t}{R_t}; \quad T_2 = \Gamma C_p; \quad \beta^2 = \frac{1}{T_1 T_2} \left( 1 + \frac{\Gamma}{R_t} \right);$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)$$

a) Schwingender Verlauf:  $\beta^2 > \alpha^2$

$$\gamma_0(t - \tau) = 1 - e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha - \beta^2 T_1}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right)$$

$$\omega = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \quad (1A)$$

b) Aperiodischer Verlauf:  $\alpha^2 > \beta^2$

$$\gamma_0(t - \tau) = 1 - e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha - \beta^2 T_1}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right)$$

$$\omega = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \quad (2A)$$

c) Aperiodischer Grenzfall:  $\alpha^2 = \beta^2$

$$\gamma_0(t - \tau) = 1 - e^{-\alpha t} [(\alpha - \beta^2 T_1) t + 1] \quad (3A)$$

d) Sonderfälle

$$L_t = 0: \gamma_0(t - \tau) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \text{ mit } T = \frac{R_t C_p}{R_t + \Gamma} C_p \quad (4A)$$

$$C_p = 0: \gamma_0(t - \tau) = 1 + \frac{\Gamma}{R_t} e^{-\frac{t}{T}} \text{ mit } T = \frac{L_t}{R_t + \Gamma} \quad (5A)$$

## 2. Gedämpft kapazitive Spannungsteiler; Ersatzschaltung in Fig. 4a

$$T_1 = R_t C_t; T_2 = \Gamma C_p; \beta^2 = \frac{1}{T_1 T_2}; \alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \left( 1 + \frac{\Gamma}{R_t} \right) \right]$$

z) Für den allein interessierenden aperiodischen Spannungsverlauf  $\alpha^2 > \beta^2$  und der stets zulässigen Vernachlässigung von  $L_t$  (wegen

$R_t C_t \gg \frac{L_t}{R_t}$ ) wird:

$$\gamma_0(t-\tau) = 1 - e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha - \beta^2 T_1}{\omega} \sinh \omega t + \cosh \omega t \right) \quad (6A)$$

$$\omega = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

β) Sonderfall:  $C_p = 0; (L_t = 0)$

$$\gamma_0(t-\tau) = 1 - \frac{\Gamma}{\Gamma + R_t} e^{-\frac{t}{T}} \text{ mit } T = (R_t + \Gamma) C_t \quad (7A)$$

### 3. Kettenleiter-Ersatzschaltung in Fig. 5

Die Eingangsimpedanz der Teiler wird nach Anhang I, d) und e)

$$Z_t(s) = \sqrt{Z_1(s) \cdot Z_q(s)} \cdot \tanh \sqrt{\frac{Z_1(s)}{Z_q(s)}}$$

Wegen dieser transzendenten Abhängigkeit gehorcht die Sprungantwort sehr verwickelten Funktionen, die sich bei grösseren Zeiten durch die in 1. und 2. angegebenen Übertragungsfunktionen beschreiben lassen, wenn dort die Parallelkapazität  $C_p$  durch angenähert  $\left( C_p + \frac{C_e}{3} \right)$  ersetzt wird. Für kleine Zeiten kann die Eingangsimpedanz der Teiler durch dessen Wellenwiderstand  $\Gamma_t$  ersetzt werden, da

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Z_t(s) = \sqrt{\frac{L_t}{C_e}} = \Gamma_t$$

wird. Für Ohmsche Spannungsteiler berechnet sich dann die Schrittantwort mit

$$T = \frac{\Gamma \Gamma_t}{\Gamma + \Gamma_t} C_p$$

zu:

$$\gamma_0(t-\tau) = \frac{1 + \frac{\Gamma}{R_t}}{1 + \frac{\Gamma}{\Gamma_t}} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (8A)$$

und für gedämpft kapazitive Spannungsteiler zu:

$$\gamma_0(t-\tau) = \frac{1}{1 + \frac{\Gamma}{\Gamma_t}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (9A)$$

### Anhang III

## Die Schrittantwort am Spannungsteiler-Ausgang für $Z_d(s) = \Gamma$

### 1. Ohmsche Teiler; Ersatzschaltung in Fig. 3b

$R_u$  ist stets gegenüber  $R_t$  vernachlässigbar. Mit

$$T_1 = \frac{R_t C_p}{2}; T_2 = \Gamma C_p; T_t = \frac{R_t C_e}{6};$$

$$\beta^2 = \frac{1}{T_t T_2} \left( 1 + \frac{\Gamma}{R_t} \right); \alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_t} \right]$$

wird bei dem für alle üblichen Kreisdaten gültigen aperiodischen Spannungsverlauf  $\alpha^2 > \beta^2$  die Übergangsfunktion:

$$\gamma_0(t-\tau) = 1 - e^{-\alpha t} \left[ \frac{\alpha}{\omega} \sinh \omega t + \cosh \omega t \right] \quad (10A)$$

$$\omega = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

### 2. Gedämpft kapazitive Spannungsteiler; Ersatzschaltung in Fig. 4b

Wegen  $R_t C_t \approx R_u C_u \gg \frac{L_t}{R_t} \approx \frac{L_u}{R_u}$  können die Teilerinduktivitäten  $L_t$  und  $L_u$  vernachlässigt werden. Mit

$$T_1 = R_t C_t; T_2 = \Gamma C_p; T_u = R_u C_u;$$

$$\beta^2 = \frac{1}{T_1 T_2}; \alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \left( 1 + \frac{\Gamma}{R_t} \right) \right]$$

wird damit die für alle üblichen Kreisdaten gültige, aperiodisch verlaufende Schrittantwort ( $\alpha^2 > \beta^2$ ):

$$\gamma_0(t-\tau) = 1 - e^{-\alpha t} \left[ \frac{\alpha - \beta^2 T_u}{\omega} \sinh \omega t + \cosh \omega t \right]$$

$$\omega = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \quad (11A)$$

Für  $T_u = T_1$  würde die Übergangsfunktion wegen der stark unterschiedlichen Zeitkonstanten  $T_1$  und  $T_2$  nur sehr langsam den Endwert erreichen. Man erkennt dies, wenn in Gl. (11A) die Hyperbelfunktionen durch Exponentialfunktionen ersetzt werden:

$$\gamma_0(t-\tau) = 1 - \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\alpha - \beta^2 T_u}{\omega} \right) e^{-(\alpha - \omega)t} + \left( 1 - \frac{\alpha - \beta^2 T_u}{\omega} \right) e^{-(\alpha + \omega)t} \right] \quad (12A)$$

Der durch das erste Exponentialglied bedingte, langsam abklingende Vorgang vollzieht sich mit der grossen Zeitkonstanten

$$\frac{1}{\alpha - \omega} \approx (R_t + \Gamma) C_t$$

Dieses Glied verschwindet aber, wenn der Faktor dieses Exponentialgliedes verschwindet:

$$1 + \frac{\alpha - \beta^2 T_u}{\omega} = 0$$

Dies ist der Fall, wenn die Bedingung

$$T_u = R_u C_u = (R_t + \Gamma) C_t + \frac{\frac{\Gamma}{R_t}}{1 + \frac{\Gamma}{R_t}} \Gamma C_p \quad (13A)$$

erfüllt ist. Gl. (13A) stellt somit eine wichtige Dimensionierungsvorschrift für gedämpft kapazitive Teiler für den Sonderfall  $R_d = \Gamma$  dar.

## Anhang IV

### Beispiele zur Berechnung der Antwortzeit $T$

#### a) Ohmsche Teiler. Kettenleiterersatzschaltung nach Fig. 5

Zur Berechnung von Gl. (21) benötigt man zunächst die aus Anhang I d) ableitbaren Kettenmatrix-Grössen ( $C_t \rightarrow \infty$ ):

$$A_{11}^{(t)}(s) = \frac{\sinh \sqrt{(R_t + s L_t) s C_e}}{\sinh \frac{n}{N} \sqrt{(R_t + s L_t) s C_e}}$$

$$A_{21}^{(t)}(s) = \sqrt{\frac{s C_e}{R_t + s L_t}} \cdot \frac{\cosh \sqrt{(R_t + s L_t) s C_e}}{\sinh \frac{n}{N} \sqrt{(R_t + s L_t) s C_e}}$$

Die Impedanz des induktivitätsbehafteten Dämpfungswiderstandes ist:

$$Z_d(s) = R_d + s L_d$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Faktoren  $S(s)$  und  $C(s)$  — siehe Gl. (5) — ein, so wird für  $s \rightarrow 0$  zunächst:

$$S(0) = \frac{N}{n} \left( \frac{R_d}{\Gamma} + \frac{\Gamma}{R_t} \right) \quad (14A)$$

$$C(0) = \frac{N}{n} \left( 1 + \frac{R_d}{R_t} \right) \quad (15A)$$

Zu differenzieren ist der Ausdruck

$$C(s) = \frac{A(s) + B(s)}{N(s)}$$

mit den Abkürzungen

$$A(s) = (1 + s R_d C_p + s^2 L_d C_p) \sinh \sqrt{(R_t + s L_t) s C_e}$$

$$B(s) = (R_d + s L_d) \sqrt{\frac{s C_e}{R_t + s L_t}} \cosh \sqrt{(R_t + s L_t) s C_e}$$

$$N(s) = \sinh \frac{n}{N} \sqrt{(R_t + s L_t) s C_e}$$

Die numerische Durchführung dieser Differentiation erfordert einen grösseren Rechenaufwand. Zur Bildung des Grenzwertes

$$C'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{d}{ds} C(s) \right]$$

entwickelt man die nach der Differentiation enthaltenen Hyperbelfunktionen in eine Reihe, wobei es ausreichend ist, für  $s \rightarrow 0$  folgende Glieder zu berücksichtigen:

$$C'(0) = C(0) \left[ R_d C_p + \left( R_d + \frac{R_t}{2} \right) \sqrt{C_e C_t} \cdot \coth \sqrt{\frac{C_e}{C_t}} - \frac{n}{N} \cdot \frac{R_t}{2} \sqrt{C_e C_t} \cdot \coth \frac{n}{N} \sqrt{\frac{C_e}{C_t}} \right]$$

$$\sinh \sqrt{X(s)} = \sqrt{X(s)} \cdot \left( 1 + \frac{1}{6} X(s) \right)$$

$$\cosh \sqrt{X(s)} = 1 + \frac{1}{2} X(s)$$

$$\sinh \frac{n}{N} \sqrt{X(s)} = \frac{n}{N} \sqrt{X(s)}$$

$$\cosh \frac{n}{N} \sqrt{X(s)} = 1$$

mit

$$X(s) = (R_t + s L_t) s C_e$$

Mit der Durchführung des Grenzüberganges erhält man schliesslich:

$$C'(0) = \frac{N}{n} \left[ \frac{R_d}{R_t} \left( \frac{L_d}{R_d} - \frac{L_t}{R_t} \right) + R_d \left( C_p + \frac{C_e}{2} \right) + \frac{R_t C_e}{6} \right] \quad (16A)$$

Setzt man die Gl. (14A), (15A) und (16A) dieses Anhanges in die Gl. (21) und (22) ein, so wird die gesuchte Antwort-Zeit:

$$T_\tau = \frac{1}{1 + \frac{R_d}{R_t}} \cdot \left[ \frac{R_t C_e}{6} + R_d \left( C_p + \frac{C_e}{2} \right) + \frac{R_d}{R_t} \left( \frac{L_d}{R_d} - \frac{L_t}{R_t} \right) - \tau \left( 1 - \frac{R_d}{R_t} \right) \left( 1 - \frac{R_d}{\Gamma} \right) \right] \quad (17A)$$

### b) Gedämpft kapazitiver Teiler. Kettenleiterersatzschaltung nach Fig. 5

Führt man die Berechnung der Antwortzeit für die Ersatzschaltungen nach Fig. 4a und 4b durch, so erkennt man, dass die Induktivität des Dämpfungswiderstandes  $L_d$  und des Teilers  $L_t$  keinen Beitrag zur Antwortzeit liefern. Vernachlässigt man diese Induktivitäten für den hier betrachteten Kettenleiter von Anfang an, so werden die wiederum aus Anhang I, d) ableitbaren Kettenmatrix-Grössen:

$$A_{11}^{(t)}(s) = \frac{\sinh \sqrt{C_e / C_t + s R_t C_e}}{\sinh \frac{n}{N} \sqrt{C_e / C_t + s R_t C_e}}$$

$$A_{21}^{(t)}(s) = s \sqrt{\frac{R_t C_e}{1 + s R_t C_e}} \cdot \frac{\cosh \sqrt{C_e / C_t + s R_t C_e}}{\sinh \frac{n}{N} \sqrt{C_e / C_t + s R_t C_e}}$$

Weiterhin ist mit  $L_d = 0$ :

$$Z_d(s) = R_d$$

Die Grenzübergänge für die Faktoren  $S(s)$  und  $C(s)$  lassen sich unmittelbar ausführen:

$$S(0) = \frac{\sinh \sqrt{C_e / C_t}}{\sinh \frac{n}{N} \sqrt{C_e / C_t}} \cdot \frac{R_d}{\Gamma} \quad (18A)$$

$$C(0) = \frac{\sinh \sqrt{C_e / C_t}}{\sinh \frac{n}{N} \sqrt{C_e / C_t}} \quad (19A)$$

Das zu differenzierende Glied  $C(s)$  lässt sich in folgender Form anschreiben:

$$C(s) = \frac{A(s) + B(s)}{N(s)}$$

mit

$$A(s) = (1 + s R_d C_p) \sinh \sqrt{C_e / C_t + s R_t C_e}$$

$$B(s) = s R_d \sqrt{C_e C_t} \cdot \cosh \frac{\sqrt{C_e / C_t + s R_t C_e}}{\sqrt{1 + s R_t C_e}}$$

$$N(s) = \sinh \frac{n}{N} \sqrt{C_e / C_t + s R_t C_e}$$

Die Durchführung der Differentiation führt wieder auf umfangreiche Ausdrücke, die nicht angegeben werden. Für  $s \rightarrow 0$  gelangt man schliesslich zu:

$$\text{Beachtet man, dass } \frac{n}{N} \sqrt{\frac{C_e}{C_t}} \ll 1 \text{ ist, so lässt sich beim Vorhandensein dieses Ausdrucks als Argument bei den Hyperbelfunktionen der } \cosh \text{ durch den Zahlenwert 1, der } \sinh \text{ durch das Argument selbst ersetzen:}$$

$$C'(0) = C(0) \cdot \left[ R_d C_p + \left( R_d + \frac{R_t}{2} \right) \sqrt{C_e C_t} \cdot \coth \sqrt{\frac{C_e}{C_t}} - \frac{R_t C_t}{2} \right] \quad (20A)$$

Setzt man nun die Gl. (18A), (19A) und (20A) dieses Anhanges in die Gl. (21) und (22) ein, so wird die gesuchte Antwort-Zeit:

$$T_\tau = R_d C_p + \left( R_d + \frac{R_t}{2} \right) \cdot \sqrt{C_e C_t} \cdot \coth \sqrt{\frac{C_e}{C_t}} - \frac{R_t C_t}{2} - \tau \left( 1 - \frac{R_d}{\Gamma} \right) \quad (21A)$$

Bei allen kapazitiven Teilern muss das Kapazitätsverhältnis  $\frac{C_e}{C_t} \ll 1$  gehalten werden, um den Einfluss der Erdkapazitäten auf das Übertragungsverhältnis klein zu halten, auch wenn dieser Einfluss frequenzunabhängig ist. Daher entwickelt man zweckmässigerweise den  $\coth \sqrt{\frac{C_e}{C_t}}$  in eine Reihe und erhält eine ausreichende Genauigkeit, wenn man nur die ersten beiden Glieder der Reihenentwicklung berücksichtigt. Die Gl. (21A) geht dann über in

$$T_\tau \approx R_d \left( C_p + C_t + \frac{C_e}{3} \right) + \frac{R_t C_e}{6} - \tau \left( 1 - \frac{R_d}{\Gamma} \right) \quad (22A)$$

Dieses Ergebnis gilt unter den getroffenen Annahmen: Die Kettenleiterersatzschaltung geht von der Voraussetzung aus, dass sämtliche Teilerelemente gleich gross sind, was den Fall einschliesst, dass auch der Niederspannungsteil dieselben Zeitkonstanten besitzt wie die Elemente des Hochspannungsteiles. Die Frage der bestmöglichen Dimensionierung des Niederspannungsteiles wird im Text behandelt.

### Literatur

- [1] W. Zaengl: Zur Ermittlung der vollständigen Übertragungseigenschaften eines Stoßspannungs-Messkreises. ETZ-A, 90(1969)19, S. 457...462.
- [2] W. Zaengl: Kapazität eines Zylinders gegen senkrecht aufeinander stehende Ebenen. ATM, Z 130-3(April 1969)399, S. 91...92.
- [3] H. Kaden: Wanderwellen auf Leitungen mit kapazitivem Anschluss. Arch. Elektrotechnik 50(1966)4, S. 201...206.
- [4] K. W. Wagner: Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation. J. A. Barth, Leipzig 1950 (2. Auflage).
- [5] A. J. Schwab: Hochspannungsmesstechnik. Messgeräte und Messverfahren. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1969.
- [6] G. Doetsch: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. München, R. Oldenbourg, 1956.
- [7] H. W. Dommel: Digital computer solution of electromagnetic transients in single- and multiphase networks. Trans. IEEE, PAS-88(1969)4, S. 388...399.
- [8] F. C. Creed, T. Kawamura und G. Newi: Step Response of Measuring Systems for High Impulse Voltages. Trans. IEEE, Vol. PAS-86(1967)11, S. 1408...1420.

### Adresse des Autors:

Prof. Dr.-Ing. W. Zaengl, Laboratorium für Hochspannungstechnik der ETH, Gloriastrasse 35, 8006 Zürich.