

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 61 (1970)
Heft: 12

Artikel: Mathematische Programmierung und Spieltheorie
Autor: Künzi, H.P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-915950>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Mathematische Programmierung und Spieltheorie ¹⁾

Von H. P. Künzi, Zürich

736-741

65.012.122:518.9

1. Die lineare Optimierung

In der linearen Optimierung befasst man sich mit der Maximierung oder Minimierung einer linearen Funktion, genannt Zielfunktion, deren Variablen x_1, \dots, x_n einer Anzahl von Nebenbedingungen, gegeben durch lineare Ungleichungen (oft auch Gleichungen), unterworfen sind.

Die Maximumaufgabe lässt sich wie folgt formulieren:

Gesucht sind die Grössen x_1, x_2, \dots, x_n , für die der lineare Ausdruck

$$Q = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

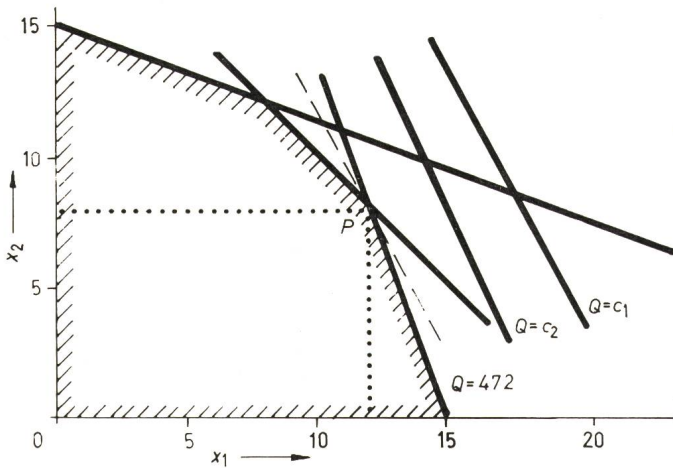


Fig. 1

Graphische Lösung der Maximumaufgabe

maximiert wird. Bezüglich der m Restriktionen

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq s_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq s_2$$

•

•

•

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq s_m$$

und den Vorzeichenrestriktionen

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

oder kürzer geschrieben:

$$Q = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

werde maximiert bezüglich

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq s_j \quad (j = 1, \dots, m)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Typische Beispiele aus dem ökonomisch-betrieblichen Bereich, die auf die lineare Optimierung führen, sind z. B. Produktionsplanungen in einem Betrieb. Es sei angenommen, eine Firma kann n Produkte mit den Mengen x_1, x_2, \dots, x_n herstellen, für die sie (nach Abzug der Stückkosten) die Nettopreise p_1, p_2, \dots, p_n je Stück lösen kann. Für die Produktion benötigt man m nicht in beliebiger Menge vorhandene Produktionsfaktoren (Arbeitskräfte, Maschinen, Rohstoffe, Energie usw.), und zwar pro Stück i die Menge a_{ji} des Produktionsfaktors j ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$). Die Produktionsfaktoren stehen nur bis zu den Höchstmengen s_1, s_2, \dots, s_m in der betrachteten Periode zur Verfügung. Welches ist das optimale Produktionsprogramm, wenn die Firma ihren Periodengewinn maximieren will?

Ein anderes Beispiel: Ein Betrieb fabriziert zwei verschiedene Typen von Verstärkern, nämlich V_1 und V_2 . Unter anderem befinden sich in jedem Verstärker Röhren und Transformatoren; diese beiden Teile sowie die verfügbare Arbeitszeit stehen dem Betrieb nur in beschränkter Masse zur Verfügung. Bei konstantem Gewinn pro Einheit suche man diejenige Produktion, die bezüglich der Restriktionen den grössten Gewinn abwirft.

Der Tabelle I können die verschiedenen Konstanten entnommen werden.

Konstanten zum aufgeführten Beispiel

Tabelle I

	V_1	V_2	Tageskapazität
Nettogewinn pro Einheit	28	27	—
Arbeitsstunden pro Einheit	3	7	105
Transformator pro Einheit	1	1	20
Röhren pro Einheit	8	3	120

Bezeichnet man mit x_1 bzw. x_2 die Anzahl der zu fabrizierenden Einheiten von V_1 und V_2 , so ergibt sich der folgende Modellansatz einer linearen Optimierungsaufgabe:

Man maximiere

$$Q = 28 x_1 + 27 x_2$$

bezüglich der drei Restriktionen

$$3 x_1 + 7 x_2 \leq 105$$

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

$$8 x_1 + 3 x_2 \leq 120$$

und

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Da man hier nur zwei Variable hat, kann das Problem graphisch gelöst werden (Fig. 1). Die Restriktionen besagen, dass der Lösungspunkt im schraffierten Bereich liegen muss. Die optimale Lösung liegt in der «äussersten Ecke» bezüglich der Geradenschar $Q = \text{const}$.

Analog zur Maximumaufgabe lässt sich auch eine Minimumaufgabe formulieren:

¹⁾ Vortrag, gehalten im Rahmen des Vortragszyklus über den Stand in wichtigen Bereichen der Elektronik des Eidg. Personalamtes in Bern.

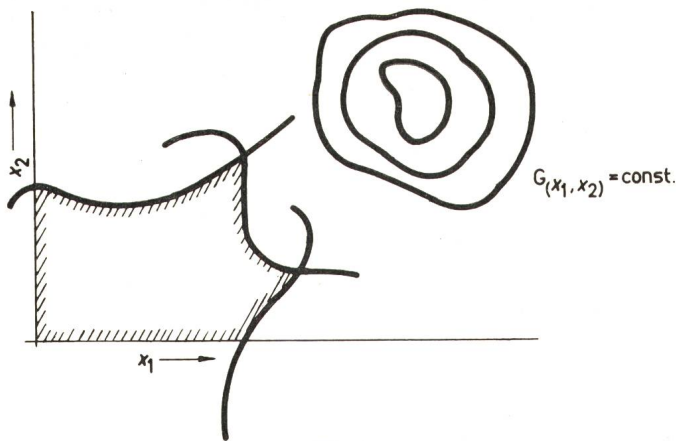


Fig. 2
Graphische Lösung der Optimierung einer Zielfunktion

m Variable sind zu suchen, nämlich w_1, w_2, \dots, w_m derart, dass der lineare Ausdruck

$$K = s_1 w_1 + s_2 w_2 + \dots + s_m w_m$$

minimiert wird unter den n Nebenbedingungen

$$a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m \geq p_1$$

$$a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m \geq p_2$$

.

.

.

$$a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m \geq p_n$$

und

$$w_1 \geq 0, \dots, w_m \geq 0$$

In dieser Formulierung liegt eine gewisse Symmetrie zur Maximumaufgabe. Man nennt diese Minimaufgabe die duale Aufgabe zum Maximumproblem und man kann zeigen, dass das Maximum von Q gleich dem Minimum von K wird, also:

$$Q_{\max} = K_{\min}$$

Zur allgemeinen Lösung einer linearen Optimierungsaufgabe stehen heute verschiedene Algorithmen zur Verfügung. Erwähnt sei der berühmte Simplex-Algorithmus, den wir weitgehend *G. B. Dantzig* verdanken. Er arbeitet iterativ, indem man von einer Lösung ausgeht, die wohl das Restriktionssystem befriedigt, aber noch nicht das Optimum angibt.

Schrittweise verbessert man diese Lösung, bis man im Optimum anlangt. Das Verfahren von *Dantzig* bricht nach endlich vielen Iterationen mit Bestimmtheit ab und eignet sich sehr gut zur Anwendung auf dem Computer.

2. Verwandte Probleme zur linearen Optimierung

2.1 Das Transportproblem

Generell lässt sich das Transportproblem folgendermassen formulieren:

n Bestimmungsorte (Lager) sind von m Ausgangsorten (Fabriken) mit einer Ware zu beliefern; dabei benötigt der j -te Bestimmungsort b_j Wareneinheiten, während im i -ten Ausgangsort a_i Einheiten zur Verfügung stehen. Es wird weiter vorausgesetzt, dass:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Die Transportkosten für eine Wareneinheit vom i -ten Ausgangsort zum j -ten Bestimmungsort werden mit c_{ij} bezeichnet, die zu befördernde Menge mit x_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$).

Die sich stellende Aufgabe lautet jetzt: Man bestimme die zu transportierenden Mengen x_{ij} , so dass alle in den Ausgangsorten verfügbaren Mengen nach dem Bedarf der Bestimmungsorte verteilt werden, so dass die Transportkosten ein Minimum aufweisen. Dies führt zur folgenden Aufgabe:

Man minimiere

$$K = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

bezüglich der Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Die Restriktionen enthalten hier genau $m + n$ Gleichungen in denen sämtliche Koeffizienten der Variablen den Wert 1 aufweisen.

Zur Lösung dieser speziellen Aufgabe eignet sich vor allem die Stepping Stone-Methode von *Charnes* und *Cooper*.

2.2 Die ganzzahlige lineare Optimierungsaufgabe

Schon beim Transportproblem handelt es sich um einen Spezialfall der ganzzahligen Optimierung, d. h. man verlangt zusätzlich, dass die Werte x_1, \dots, x_n nur ganzzahlige Werte annehmen dürfen. Diese Voraussetzung spielt für die Praxis oft eine wichtige Rolle. Wenn es sich um ganzzahlige Probleme handelt, eignet sich der Algorithmus von *Gomory*, der allerdings schlecht konvergiert für grosse m und n .

2.3 Die stochastische Optimierung

Will man Optimierungsaufgaben, so wie sie in den vorangegangenen Kapiteln behandelt wurden, in der Praxis anwenden, so stösst man oft auf die Schwierigkeit, dass die erforderlichen Konstanten p_i, a_{ji} oder s_j nicht mit Sicherheit angegeben werden können. Oft kann man für diese Grössen lediglich obere und untere Schranken festlegen oder kennt für sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Unter solchen Voraussetzungen ist es nicht mehr möglich, die in den vorhergehenden Kapiteln entwickelte Simplexmethode anzuwenden; man muss sich dann der sog. stochastischen Optimierung zuwenden. Es ist hier nicht möglich, tiefer in diesen Zweig der Optimierung vorzudringen, der sich noch in voller Entwicklung befindet.

3. Die nichtlineare Optimierung

Bei der allgemeinen nichtlinearen Optimierung sind Zielfunktion und/oder Restriktionen nicht mehr linear in den Variablen x_1, \dots, x_n . Die Aufgabe heisst dann:

Man suche das Optimum (Minimum oder Maximum) der Zielfunktion

$$G(x_1, \dots, x_n)$$

bezüglich der Nebenbedingungen

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

und

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Die geometrische Interpretation für $n = 2$ ist analog zu Fig. 1, nur sind jetzt die Geraden durch Kurven ersetzt (Fig. 2). Es gibt heute keinen Algorithmus, der eine Aufgabe in so allgemeiner Form lösen kann.

Beschränkt man sich auf konvexe bzw. konkave Funktionen, so ist es möglich, die optimale Lösung rechnerisch zu bestimmen, doch benötigen die Verfahren oft recht komplizierte mathematische Überlegungen.

In der Praxis treten oft Probleme auf, in denen die Zielfunktion quadratisch ist und die Restriktionen linear bleiben. Für diesen Fall gibt es sehr gute Algorithmen.

4. Die dynamische Optimierung

Oft treten Probleme auf, bei denen Entscheidungen über mehrere Stufen zu treffen sind, wobei wiederum eine Zielgrösse einen optimalen Wert erhalten soll. Dies trifft häufig bei bestimmten Produktionsprozessen zu, z. B. wenn ein Unternehmer jeden Monat seine Entscheidung für den folgenden Monat zu treffen hat. Bei vielen Problemen dieser Art ist es im allgemeinen richtig, den Aufwand für jede einzelne Periode zu minimieren, denn unter Umständen kann ein kleiner Verzicht auf Erträge anfangs des Jahres für spätere Monate einen grösseren Ertrag liefern. In solchen Fällen ist es zweckmässig, die von *R. Bellman* entwickelte Methode der dynamischen Optimierung (Entscheidungsprozesse) zu verwenden, die an einem kleinen Beispiel erläutert werden soll:

Der Produktionsprozess eines verderblichen Gutes sei derart, dass die Kosten, die durch die Veränderung der Produktion von Monat zu Monat verursacht werden, das doppelte des Quadrates der Produktionsveränderung betragen. Produktionsmengen, die am Ende eines Monats nicht verkauft sind, müssen vernichtet werden. Diese Vernichtungskosten sollen pro Einheit Fr. 20.— betragen. Für die vier ersten Monate eines Jahres mögen folgende Bestellungen vorliegen:

Monat	Jan.	Feb.	März	April
Bestellung	210	220	195	180

Im Dezember des vorangegangenen Jahres wurden 200 Einheiten produziert. Man bestimme einen Produktionsplan, der die Kosten bei Befriedigung der Nachfrage minimiert.

Zur Lösung dieser Aufgabe soll im Sinne der dynamischen Optimierung ein Stufenverfahren angegeben werden. Im folgenden soll n stets die Anzahl der noch bevorstehenden Produktionsmonate bezeichnen. Dementsprechend sei mit p_n die kostenminimale Produktion bezeichnet, und allgemein mit x_n die Produktion in einem Monat, dem noch n Produktionsmonate folgen, sowie mit b_n die Bestellung im folgenden Monat. Schliesslich seien $F_n(x_{n+1})$ die Gesamtkosten für n noch bevorstehende Monate, abhängig von der Produktion x_{n+1} des Vormonates. Dann gilt die rekursive Relation:

$$F_n(p_{n+1}) = \text{Min}_{x_n \geq b_n} \left\{ 2(x_n - p_{n+1})^2 + 20(x_n - b_n) + F_{n-1}(x_n) \right\}$$

denn die Kosten setzen sich additiv zusammen aus den Umstellungskosten, Vernichtungskosten und den Kosten $F_{n-1}(x_n)$ der noch folgenden $n-1$ Monate.

Die Zahl $F_{n-1}(p_n)$ gibt die Kosten für die kostenminimale Produktion an, wenn über die letzten $n-1$ Monate minimiert wird. Da aber in der obigen Funktion $F_n(p_{n+1})$ über die letzten n Monate minimiert wird, kann sich die kostenminimale Produktion in den schon betrachteten Monaten noch ändern, so dass sie in $F_{n-1}(\cdot)$ als variabel angesetzt werden muss.

Es erweist sich als zweckmässig, die Werte $F_n(p_{n+1})$ für aufeinanderfolgende Monate, mit dem letzten beginnend, auszurechnen, indem man mit $F_1(p_2)$ für den Monat April beginnt

und dann stufenweise rückwärts auf $F_4(p_5)$ für den Monat Januar schliesst. Während nur $p_5 = 200$ nach Voraussetzung gegeben ist, kann man die anderen Werte $p_4 \dots p_1$ erst am Schluss der Rechnung bestimmen, diese Werte sind zunächst noch variable Parameter. Entsprechend der obigen Beziehung für $F_n(p_{n+1})$ erhält man für $n = 1$:

$$F_1(p_2) = \text{Min}_{x_1 \geq 180} \left\{ 2(x_1 - p_2)^2 + 20(x_1 - 180) \right\}$$

Das ist die Relation für den Monat April. Für den Monat März erhält man:

$$F_2(p_3) = \text{Min}_{x_2 \geq 192} \left\{ 2(x_2 - p_3)^2 + 20(x_2 - 195) + F_1(x_2) \right\}$$

usw.

Es sei hier auf eine detailliertere Behandlung verzichtet. Als Resultat erhält man:

Die totalen minimalen Produktionskosten belaufen sich auf Fr. 1450.—.

Die Produktionsgrössen (Entscheidungsvariablen) betragen:

Januar:	210,
Februar:	220,
März:	210,
April:	205.

Abschliessend sei noch das diesem Verfahren zugrunde liegende Optimalitätskriterium erwähnt:

Ein optimales Verhalten hat die Eigenschaft, ungeachtet des Anfangszustandes und der Anfangsentscheidung, für die verbleibenden Entscheidungen ein optimales Verfahren hinsichtlich des aus der ersten Entscheidung resultierenden Zustandes darzustellen.

5. Spieltheorie

Wenn eine, zwei oder mehrere Personen im üblichen Sinne ein Spiel durchführen, so heisst das, dass nach bestimmten Regeln ein bestimmtes Ziel angestrebt wird. Spricht man innerhalb des Operations Research von Spieltheorie, so denkt man in erster Linie an die Theorie der strategischen Spiele, deren grundlegende Arbeiten auf *J. von Neumann* zurückgehen.

Eine allgemeine Beschreibung der Spieltheorie oder deren Ansätze würde sicherlich den Rahmen dieser Abhandlung sprengen, so dass es sich als zweckmässig erweist, lediglich eine spezielle Klasse von Spielen herauszugreifen, nämlich die sog. Zweipersonen-Nullsummenspiele, bei denen zwei Personen oder auch zwei Gruppen beteiligt sind, so dass der Gewinn der einen Gruppe dem Verlust der anderen entspricht.

Man betrachte z. B. ein Spiel, an dem die Personen X und Y beteiligt sind. Jeder Spieler hat eine gewisse Anzahl von Verhaltensmöglichkeiten oder, wie man mit dem Fachausdruck sagt, Strategien, die er zur freien Verfügung besitzt. In Tabelle II, die die sog. Gewinnmatrix für einen Spieler angibt (in diesem Falle für X), sind auch die verschiedenen Strategien zusammengestellt.

Gewinnmatrix für X

Tabelle II

Y \ X	1	2	3
1	3	7	2
2	4	5	3
3	4	6	10
4	5	9	4

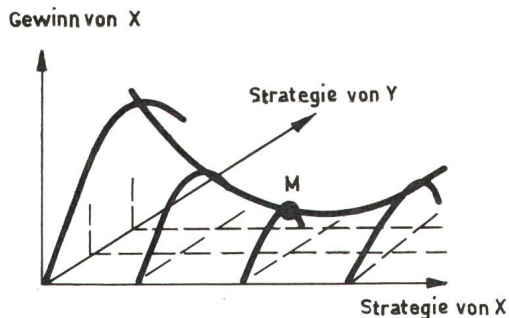


Fig. 3
Bestimmung des Sattelpunktes

Spieler X verfügt im Beispiel über drei Strategien, Y über deren vier. Die Zahlen in der Matrix geben die Gewinne für X an, wenn mit den betreffenden Strategien gespielt wird, und zugleich die Verluste für Y. X will natürlich seinen Gewinn maximieren, Y hingegen die Verluste minimieren. Wählt z. B. X seine 1. Strategie, so reagiert Y vernünftigerweise ebenfalls mit seiner 1. Strategie. Für X ist es klug, bei jeder ihm zur Verfügung stehenden Strategie (Spalte) die kleinste Gewinnchance herauszusuchen (rund umrandet) und unter diesen Minima das Maximum zu bestimmen. Für Y ist es vernünftig, das umgekehrte Verfahren einzuschlagen. Er sucht für jede Strategie (Zeile), die ihm zur Verfügung steht, das Maximum und wählt unter diesen Maxima das Minimum. Nach diesem Vorgehen müssen sich die beiden Spieler je für ihre zweite Strategie entschliessen, denn für diese gilt in der Matrix:

$$\text{Max. der Spaltenminima} = \text{Min. der Zeilenmaxima} = 5.$$

Wird so gespielt, so ist es Y nicht möglich, den Gewinn von X zu verkleinern, andererseits kann X den Verlust von Y auch nicht mehr vergrössern.

Die Lösung des Spieles wird, wie eben erläutert wurde, nach dem Minimax-Prinzip gesucht. Graphisch heisst das, man bestimmt den sog. Sattelpunkt der Matrix (Fig. 3).

Häufig kommt es aber vor, dass ein Spiel keinen Sattelpunkt aufweist, und man hat es dann mit den «nicht strikte definierten» Spielen zu tun. Ein Beispiel dafür ist die stumme Mora. Dabei wird gespielt, indem der Spieler X auf Gerade und der Spieler Y auf Ungerade setzt. Ergibt die Zahl der ausgestreckten Finger eine gerade Summe, so hat X, andernfalls Y eine Einheit gewonnen.

Werden solche Spiele öfters gespielt, so kommt es darauf an, mit welcher Häufigkeit die einzelnen Strategien zur Anwendung gelangen. Man spricht von einer optimalen gemischten Strategie, wenn ein Spieler diejenige Gewinnerwartung maximiert, die sein Gegner nicht verhindern kann. Man kann beweisen, dass auch bei solchen allgemeineren Spielen ein Minimax-Prinzip gilt, nach dem die grösste Gewinnerwartung

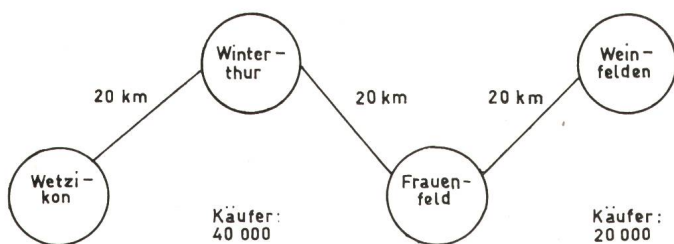


Fig. 4
Darstellung von Lage, Distanz und Käuferzahl

des einen Spielers, die er mit Sicherheit erwarten darf, mit der kleinsten Verlusterwartung des anderen Spielers, die sich dieser sichern kann, übereinstimmt.

Um die Gewinnerwartung sowie die gemischten Strategien bei solchen Zweipersonen-Nullsummenspielen zu bestimmen, bedient man sich der Methoden der linearen Programmierung.

In einem weiteren Beispiel soll nun ein ökonomisches Problem erörtert werden, das auf ein Spiel mit Sattelpunkt hinausläuft.

Angenommen, zwei Grossunternehmen X und Y (X sei grösser als Y) beabsichtigen, in einer der vier Städte Wetzikon/Winterthur/Frauenfeld/Weinfelden ein Warenhaus zu errichten. Lage, Distanz und Käuferzahlen der vier Städte sind in Fig. 4 angegeben.

Aus statistischen Erhebungen, die die beiden Geschäftsfirmen führten, ging hervor, dass 80 % des Gesamtumsatzes in einer Stadt auf X fallen, wenn sein Warenhaus der Stadt näher liegt als dasjenige von Y. Hingegen fallen 60 % des Gesamtumsatzes auf X, wenn die Kaufhäuser der beiden Unternehmungen in der gleichen Stadt liegen. Befindet sich aber Y näher als X, dann soll das Haus X 40 % des Umsatzes auf sich vereinigen.

Man nimmt jetzt an, jeder oben angegebene Käufer kaufe in der Woche für Fr. 1.— und der Gewinn sei dem Umsatz proportional. Mit spieltheoretischen Überlegungen sollen nun die optimalen Standpunkte der beiden Firmen errechnet werden.

In der Umsatzmatrix (Tabelle III) ist der Umsatz von X dargestellt in Abhängigkeit der Handlungsweisen von X und Y. Die Gesamtumsatzsumme für beide Unternehmungen betrage in der Woche Fr. 100 000. Im Schema sind die Umsatzwerte von X in Einheiten von Fr. 1000 dargestellt.

Umsatzmatrix

Tabelle III

Y \ X	Wetzikon	Winterthur	Frauenfeld	Weinfelden
Wetzikon	60	72	64	56
Winterthur	48	60	56	52
Frauenfeld	56	64	60	48
Weinfelden	64	68	72	60

Nach den früheren Erörterungen im Zusammenhang mit dem Minimax-Prinzip muss sich X für Winterthur entscheiden, denn dann ist sein maximaler Minimumumsatz Fr. 60 000 in der Woche, und dieser Umsatz kann von der Konkurrenz auf keinen Fall reduziert werden. Klugerweise wird auch Y die Strategie Winterthur wählen, denn dann beträgt sein minimaler Maximumumsatz Fr. 40 000, den X nicht beeinträchtigen kann.

Vorausgesetzt, dass die beiden Geschäftspartner die Situation voll überblicken können und alle möglichen Chancen ausnützen, so ist die Platzfrage eindeutig bestimmt. Würde der eine Partner aus irgendeinem Grunde einem anderen Ort den Vorrang geben, so geschähe dies zum Vorteil seines Konkurrenten.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. H. P. Künzi, Institut für Operations Research und elektronische Datenverarbeitung der Universität Zürich, Sumatrastrasse 30, 8006 Zürich.