

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 60 (1969)
Heft: 19

Artikel: Die Dreieck-Stern-Transformation von Vierpolen
Autor: Herzog, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-916179>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Dreieck-Stern-Transformation von Vierpolen¹⁾

Von W. Herzog, Mainz
41-46

Es werden die Widerstands- und Leitwertmatrizen von vier Anordnungen aus je drei Vierpolen berechnet. Die unter sich dualen Dreieck- und Sternanordnungen werden miteinander in Beziehung gesetzt und die Transformationsgleichungen angegeben.

On calcule les matrices des résistances et des conductibilités spécifiques de quatre dispositions réalisées par trois quadripôles. Les dispositions en triangle et en étoile, réciproquement binaires, sont mises en relation en indiquant les équations de transformation.

1. Zum Problem

Cauer [1]²⁾ benutzte Dreieckschaltungen von Vierpolen als Weichen. Die vorteilhafte Schaltung eines Vierpols vor einer Weiche [2] führt bereits zur Sternschaltung von drei Vierpolen. Eine Anwendung könnte bei den Vierpolbrücken [3] vorliegen, in gleicher Weise wie die Dreieck-Stern-Transformation bei einer Brücke eine leichte Umwandlung und Berechnung gestattet. Eine Erweiterung auf mehr als drei Vierpole entsprechend der Umwandlung von n -strahligen Stern und n -Eck [4] ist möglich. Drei Vierpole lassen sich parallel, in Reihe und in Kombinationen der beiden Arten schalten. Zunächst seien die Formeln für die Dreieckschaltungen von Vierpolen parallel und in Serie angegeben, wobei von den Kombinationen abgesehen wird.

2. Die Dreieckschaltungen

2.1 Die Parallelschaltung von drei Vierpolen

Fig. 1 zeigt die Parallelschaltung von drei passiven unsymmetrischen Vierpolen. Eine Erweiterung auf aktive Vierpole bringt keine Schwierigkeiten. Fig. 1a ist — räumlich betrachtet — symmetrisch aufgebaut. Hierbei liegen die Punkte 1, 2, 3 in einer Ebene und ebenso die Punkte 1', 2', 3'. Fig. 1b ist eine Umzeichnung von Fig. 1a in die Ebene mit Spannungsverlauf U_1, U_2, U_3 entgegen dem Uhrzeiger. Fig. 1c ist ebenfalls eine Umzeichnung von Fig. 1a in die Ebene. Durch Kreuzen der Klemmen lassen sich die Richtungen der Spannungen U_1, U_2, U_3 zum Vergleich nach Bedarf umdrehen (z. B. Fig. 1c).

Aus Fig. 1 sind die Leitwertdarstellungen der drei Vierpole ablesbar:

$$\begin{pmatrix} I_1' \\ I_2 - I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

¹⁾ Mitteilung des Instituts für Elektrotechnik der Universität Mainz.

²⁾ Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

$$\begin{pmatrix} I_2' \\ I_3 - I_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} I_3' \\ I_1 - I_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3 \\ U_1 \end{pmatrix}$$

Hierbei sind U_1, U_2, U_3 die Spannungen, I_1, I_2, I_3 und I_1', I_2', I_3' die Ströme (s. Fig. 1). Die Kurzschlussleitwerte Y_{1k} und Y_{2k} sowie die Kernleitwerte Y_{12} erhalten einen weiteren Index zur Zuordnung zu dem entsprechenden Vierpol.

Durch Eliminierung der mit einem Strich versehenen Ströme ergibt sich die gesuchte Leitwertmatrix der Dreiecksanordnung:

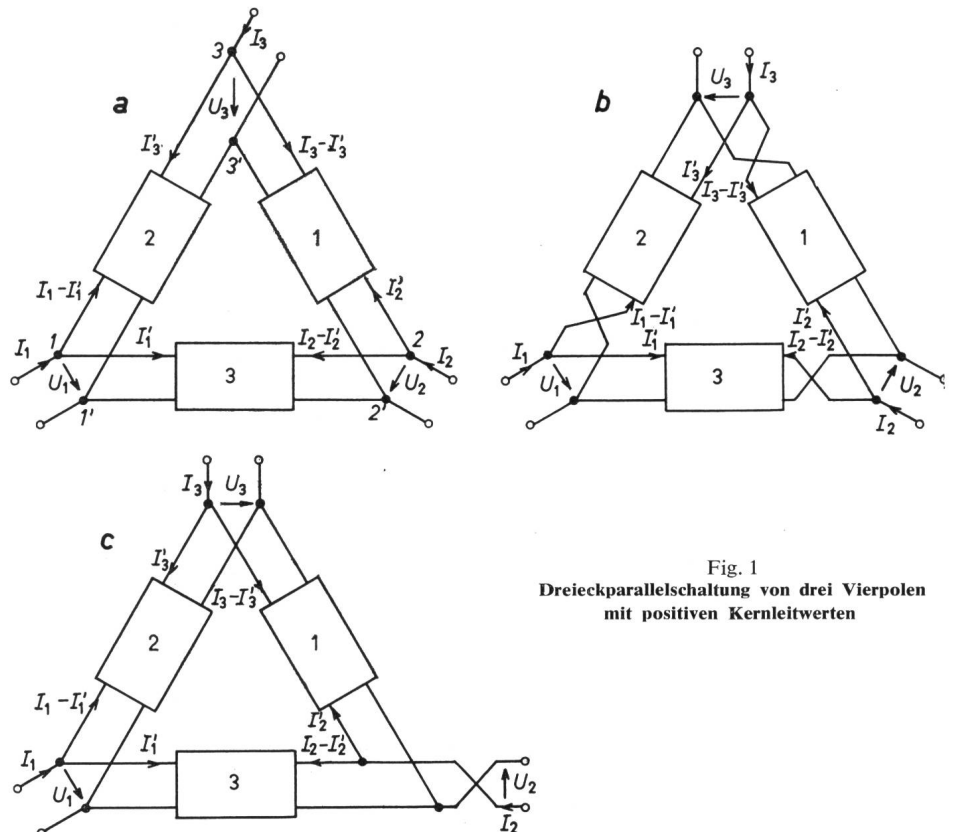


Fig. 1
Dreieckparallelschaltung von drei Vierpolen mit positiven Kernleitwerten

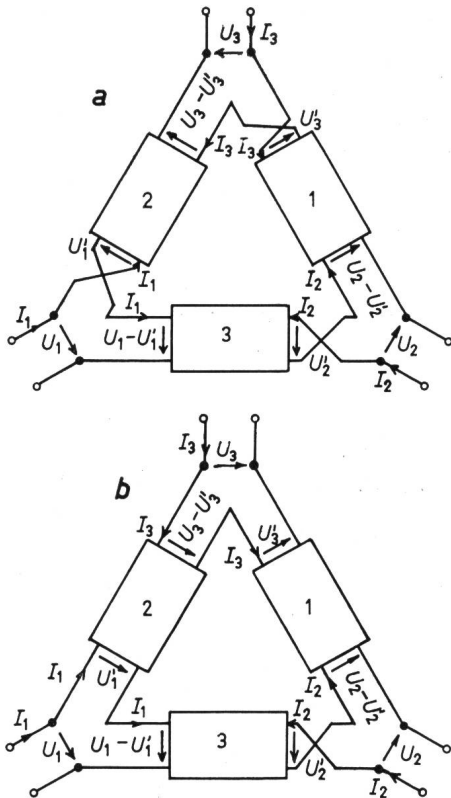


Fig. 2

Dreieckserieschaltung von drei Vierpolen mit positiven Kernwiderständen

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} + Y_{2k} & Y_{12} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{1k} + Y_{2k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{12} & Y_{1k} + Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

und ausgedrückt durch die Widerstandsmatrizen (W_{11} , W_{21} in [s. Gl. (7)]:
sind die Leerlaufwiderstände, M die Kernwiderstände,
 $|W| = W_{11} W_{21} - M^2$):

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{W_{21}}{|W_3|} + \frac{W_{11}}{|W_2|} & -\frac{M_3}{|W_3|} & -\frac{M_2}{|W_2|} \\ -\frac{M_3}{|W_3|} & \frac{W_{21}}{|W_1|} + \frac{W_{11}}{|W_3|} & -\frac{M_1}{|W_1|} \\ -\frac{M_2}{|W_2|} & -\frac{M_1}{|W_1|} & \frac{W_{21}}{|W_2|} + \frac{W_{11}}{|W_1|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Löst man die Gl. (2) nach den Spannungen auf, so folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_{1k} Y_{1k} + Y_{1k} Y_{2k} + Y_{2k} Y_{2k} + |Y_1|}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} - Y_{12} (Y_{1k} + Y_{2k})}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} - Y_{12} (Y_{1k} + Y_{2k})}{Y} \\ \frac{Y_{12} Y_{12} - Y_{12} (Y_{1k} + Y_{2k})}{Y} & \frac{Y_{1k} Y_{1k} + Y_{1k} Y_{2k} + Y_{2k} Y_{2k} + |Y_2|}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} - Y_{12} (Y_{1k} + Y_{2k})}{Y} \\ \frac{Y_{12} Y_{12} - Y_{12} (Y_{1k} + Y_{2k})}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} - Y_{12} (Y_{1k} + Y_{2k})}{Y} & \frac{Y_{1k} Y_{1k} + Y_{1k} Y_{2k} + Y_{2k} Y_{2k} + |Y_3|}{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

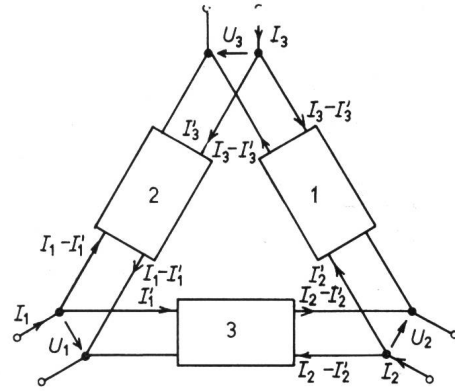


Fig. 3

Dreieckparallelschaltung von drei Vierpolen mit negativen Kernleitwerten

mit der Abkürzung:

$$Y = (Y_{1k} + Y_{2k}) |Y_1| + (Y_{1k} + Y_{2k}) |Y_2| + (Y_{1k} + Y_{2k}) |Y_3| + Y_{1k} Y_{1k} Y_{1k} + Y_{2k} Y_{2k} Y_{2k} + 2 Y_{12} Y_{12} Y_{12} \quad (5)$$

Ausgedrückt durch die Widerstandsmatrizen der einzelnen Vierpole wandeln sich die Beziehungen (4) und (5) mit der Abkürzung von Gl. (6):

$$W = (W_{21} + W_{11}) |W_1| + (W_{11} + W_{21}) |W_2| + (W_{11} + W_{21}) |W_3| + W_{11} W_{11} W_{11} + W_{21} W_{21} W_{21} - 2 M_1 M_2 M_3 \quad (6)$$

(7)

$$\begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M_3 M_1 |W_2| + M_2 [W_{21} |W_3| + W_{11} |W_1|]}{W} & \frac{M_2 M_3 |W_1| + M_1 [W_{21} |W_2| + W_{11} |W_3|]}{W} & \frac{|W_1| W_{11} W_{11} + |W_2| W_{21} W_{21} + |W_3| W_{11} W_{21} + |W_1| W_{11} |W_2|}{W} \\ \frac{M_1 M_2 |W_3| + M_3 [W_{21} |W_1| + W_{11} |W_2|]}{W} & \frac{|W_1| W_{21} W_{21} + |W_2| W_{21} |W_3| + W_{11} |W_1| + |W_1| W_{11} |W_3|}{W} & \frac{M_2 M_3 |W_1| + M_1 [W_{21} |W_2| + W_{11} |W_3|]}{W} \\ \frac{|W_1| W_{21} W_{11} + |W_2| W_{11} W_{11} + |W_3| W_{11} W_{21} + |W_1| W_{11} |W_2|}{W} & \frac{M_2 M_1 |W_3| + M_3 [W_{21} |W_1| + W_{11} |W_2|]}{W} & \frac{M_3 M_1 |W_2| + M_2 [W_{21} |W_3| + W_{11} |W_1|]}{W} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|W_1| W_{21} W_{11} + |W_2| W_{11} W_{11} + |W_3| W_{11} W_{21} + |W_1| W_{11} |W_2|}{W} & \frac{M_2 M_1 |W_3| + M_3 [W_{21} |W_1| + W_{11} |W_2|]}{W} & \frac{M_3 M_1 |W_2| + M_2 [W_{21} |W_3| + W_{11} |W_1|]}{W} \\ \frac{M_1 M_2 |W_3| + M_3 [W_{21} |W_1| + W_{11} |W_2|]}{W} & \frac{|W_1| W_{21} W_{21} + |W_2| W_{21} |W_3| + W_{11} |W_1| + |W_1| W_{11} |W_3|}{W} & \frac{M_2 M_3 |W_1| + M_1 [W_{21} |W_2| + W_{11} |W_3|]}{W} \\ \frac{|W_1| W_{21} W_{11} + |W_2| W_{11} W_{11} + |W_3| W_{11} W_{21} + |W_1| W_{11} |W_2|}{W} & \frac{M_2 M_1 |W_3| + M_3 [W_{21} |W_1| + W_{11} |W_2|]}{W} & \frac{M_3 M_1 |W_2| + M_2 [W_{21} |W_3| + W_{11} |W_1|]}{W} \end{pmatrix}$$

2.2 Die Serieschaltung von drei Vierpolen

Den in Fig. 2a und 2b gezeigten Serieschaltungen, wobei in Fig. 2b zwei Kreuzungen durch Umdrehen eines Vierpols und der Spannung U_3 ersetzt sind, entnimmt man für die einzelnen Vierpole die Formeln:

$$\begin{pmatrix} U_1 - U_1' \\ U_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & M_3 \\ M_3 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_2 - U_2' \\ U_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & M_1 \\ M_1 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} U_3 - U_3' \\ U_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & M_2 \\ M_2 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

und erhält daraus die zur Matrix (2) duale Matrix:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{21} + W_{11} & M_3 & M_2 \\ M_3 & W_{21} + W_{11} & M_1 \\ M_2 & M_1 & W_{21} + W_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

und ausgedrückt durch die Leitwerte [vgl. (3)]:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_{1k}}{|Y_2|} + \frac{Y_{2k}}{|Y_3|} & -\frac{Y_{12}}{|Y_3|} & -\frac{Y_{12}}{|Y_2|} \\ -\frac{Y_{12}}{|Y_3|} & \frac{Y_{1k}}{|Y_3|} + \frac{Y_{2k}}{|Y_1|} & -\frac{Y_{12}}{|Y_1|} \\ -\frac{Y_{12}}{|Y_2|} & -\frac{Y_{12}}{|Y_1|} & \frac{Y_{1k}}{|Y_1|} + \frac{Y_{2k}}{|Y_2|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Die Auflösung der Gl. (9) nach den Strömen ergibt [vgl. Gl. (4)] mit der Abkürzung von Gl. (11) [vgl. Gl. (5) und (6)]:

$$W = (W_{21} + W_{11}) |W_1| + (W_{21} + W_{11}) |W_2| + (W_{21} + W_{11}) |W_3| + W_{11} W_{21} W_{11} + W_{11} W_{21} W_{21} + 2 M_1 M_2 M_3 \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{W_{11} W_{11} + W_{11} W_{21} + W_{21} W_{21} + |W_1|}{W} & \frac{M_1 M_2 - M_3 (W_{11} + W_{21})}{W} & \frac{M_1 M_3 - M_2 (W_{11} + W_{21})}{W} \\ \frac{M_1 M_2 - M_3 (W_{11} + W_{21})}{W} & \frac{W_{11} W_{11} + W_{11} W_{21} + W_{21} W_{21} + |W_2|}{W} & \frac{M_2 M_3 - M_1 (W_{11} + W_{21})}{W} \\ \frac{M_1 M_3 - M_2 (W_{11} + W_{21})}{W} & \frac{M_2 M_3 - M_1 (W_{11} + W_{21})}{W} & \frac{W_{11} W_{11} + W_{11} W_{21} + W_{21} W_{21} + |W_3|}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|Y_1| Y_{2k} Y_{1k} + |Y_2| Y_{1k} Y_{1k} + |Y_3| Y_{1k} Y_{1k} + |Y_3| Y_{2k} Y_{1k} + |Y_2| Y_{1k} Y_{1k} + |Y_3| Y_{1k} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} |Y_3| + Y_{12} [Y_{2k} |Y_3| + Y_{1k} |Y_1|]}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} |Y_2| + Y_{12} [Y_{2k} |Y_3| + Y_{1k} |Y_1|]}{Y} \\ \frac{Y_{12} Y_{12} |Y_3| + Y_{12} [Y_{2k} |Y_3| + Y_{1k} |Y_1|]}{Y} & \frac{|Y_1| Y_{2k} Y_{2k} + |Y_2| Y_{1k} Y_{1k} + |Y_3| Y_{1k} Y_{1k} + |Y_3| Y_{2k} Y_{1k} + |Y_2| Y_{1k} Y_{1k} + |Y_3| Y_{1k} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} |Y_1| + Y_{12} [Y_{2k} |Y_3| + Y_{1k} |Y_1|]}{Y} \\ \frac{|Y_1| Y_{2k} Y_{2k} + |Y_2| Y_{1k} Y_{1k} + |Y_3| Y_{1k} Y_{1k} + |Y_3| Y_{2k} Y_{1k} + |Y_2| Y_{1k} Y_{1k} + |Y_3| Y_{1k} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} |Y_1| + Y_{12} [Y_{2k} |Y_3| + Y_{1k} |Y_1|]}{Y} & \frac{|Y_1| Y_{1k} Y_{1k} + |Y_2| Y_{2k} Y_{2k} + |Y_3| Y_{1k} Y_{1k} + |Y_3| Y_{2k} Y_{1k} + |Y_2| Y_{1k} Y_{1k} + |Y_3| Y_{1k} Y_{1k}}{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Mit der Abkürzung:

$$\begin{aligned} Y = & (Y_{2k} + Y_{1k}) |Y_1| + (Y_{1k} + Y_{2k}) |Y_2| + \\ & + (Y_{1k} + Y_{2k}) |Y_3| + Y_{1k} Y_{2k} Y_{1k} + \\ & + Y_{2k} Y_{2k} Y_{3k} - 2 Y_{12} Y_{12} Y_{12} \end{aligned} \quad (14)$$

Die Umwandlung der Widerstände in Gl. (11) und (12) in Leitwerte liefert, entsprechend Gl. (6) und (7):

In den Fig. 3 und 4 mit dualen Matrizen sind den Fig. 1 und 2 entsprechende Schaltungen dargestellt, bei denen Umwandlung des Vorzeichens der Ausgangsströme und Ausgangsspannungen (Vertauschen der Ausgangsklemmen) der einzelnen Vierpole vorliegt, was einem Vorzeichenwechsel der Kernwiderstände oder der Kernleitwerte entspricht.

3. Die Sternschaltungen

3.1 Parallelschaltung von drei Vierpolen

Für die Vierpole in Fig. 5a und 5b, wobei Fig. 5a räumlich betrachtet werden kann (vgl. Fig. 1a), während Fig. 5b eine Umzeichnung in die Ebene darstellt, gelten die Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} I_3 \\ I_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3 \\ U_0 \end{pmatrix}$$

sowie die Beziehung:

$$I_1' + I_2' + I_3' = 0 \quad (16)$$

Durch Eliminierung von U_0 und der mit einem Strich versehenen Ströme ergibt sich:

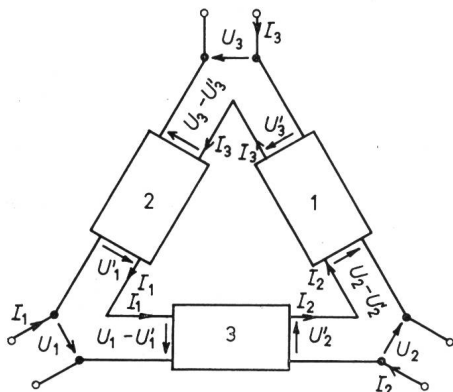


Fig. 4

Dreieckschaltung von drei Vierpolen mit negativen Kernleitwerten

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{12} Y_{13} \\ Y_{12} Y_{13} \\ Y_{12} Y_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = Y_{2k} + Y_{2k} + Y_{2k} \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_{12} Y_{13}}{Y} \\ \frac{Y_{12} Y_{13}}{Y} \\ \frac{Y_{12} Y_{13}}{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

und durch die Widerstände ausgedrückt:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{W_{11} W_{22} W_{33}}{W} \\ \frac{W_{11} W_{22} W_{33}}{W} \\ \frac{W_{11} W_{22} W_{33}}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$$

$$W = W_{11} |W_2| |W_3| + W_{21} |W_1| |W_3| + W_{31} |W_1| |W_2| \quad (20)$$

Der Fig. 5 lässt sich weiterhin entnehmen:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & M_1 \\ M_1 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_1' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{21} & M_2 \\ M_2 & W_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ I_2' \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{31} & M_3 \\ M_3 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 \\ I_3' \end{pmatrix}$$

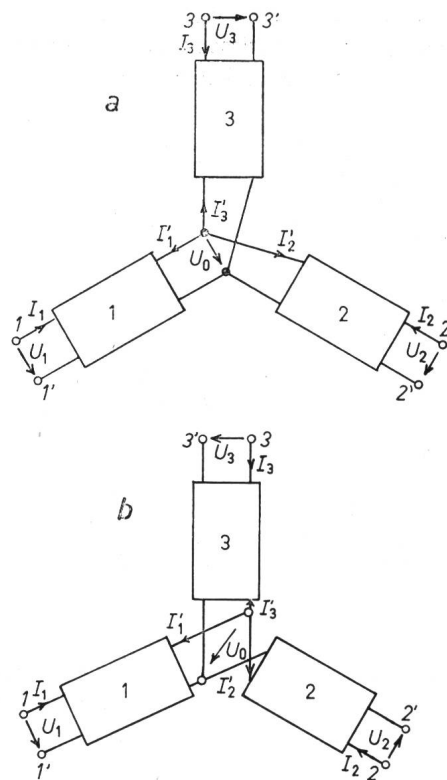


Fig. 5
Sternparallelschaltung von drei Vierpolen mit negativen Kernleitwerten

Aus den Gln. (21) oder aus den Gln. (17), (18) erhält man, nach den Spannungen aufgelöst:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(W_{21} + W_{31}) |W_1| + W_{11} W_{21} W_{31}}{W} & \frac{M_1 M_2 W_{31}}{W} & \frac{M_1 M_3 W_{21}}{W} \\ \frac{M_1 M_2 W_{31}}{W} & \frac{(W_{21} + W_{31}) |W_2| + W_{21} W_{31} W_{11}}{W} & \frac{M_2 M_3 W_{21}}{W} \\ \frac{M_1 M_3 W_{21}}{W} & \frac{M_2 M_3 W_{21}}{W} & \frac{(W_{21} + W_{31}) |W_3| + W_{31} W_{21} W_{11}}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$W = W_{21} W_{31} + W_{31} W_{21} + W_{21} W_{31} \quad (23)$$

und durch die Leitwerte ausgedrückt:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_{1k} |Y_3| + Y_{1k} |Y_2| + Y_{2k} Y_{1k} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y} \\ \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{1k} |Y_3| + Y_{1k} |Y_1| + Y_{2k} Y_{1k} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y} \\ \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{1k} |Y_2| + Y_{1k} |Y_1| + Y_{2k} Y_{1k} Y_{1k}}{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$Y = Y_{1k} Y_{2k} |Y_3| + Y_{1k} Y_{3k} |Y_2| + Y_{2k} Y_{3k} |Y_1| \quad (25)$$

3.2 Die Serieschaltung von drei Vierpolen

Der Fig. 6, die die Serieschaltung dreier Vierpole zeigt, lassen sich die folgenden Beziehungen entnehmen:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & M_1 \\ M_1 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ U_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & M_2 \\ M_2 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ I_0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ U_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & M_3 \\ M_3 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 \\ I_0 \end{pmatrix}$$

$$U_1' + U_2' + U_3' = 0 \quad (27)$$

Die Eliminierung des Stromes I_0 und der mit einem Strich versehenen Spannungen führt zu der zur Matrix (17) dualen Beziehung:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{M_1 M_3}{W} & -\frac{M_1 M_2}{W} & \frac{|W_1| + W_{11}(W_{21} + W_{21})}{W} \\ -\frac{M_2 M_3}{W} & \frac{|W_2| + W_{11}(W_{21} + W_{21})}{W} & -\frac{M_2 M_3}{W} \\ \frac{|W_3| + W_{11}(W_{21} + W_{21})}{W} & -\frac{M_2 M_3}{W} & -\frac{M_2 M_3}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$W = W_{21} + W_{21} + W_{21} \quad (29)$$

und in der Leitwertform [vgl. Gl. (19)]:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{Y_{12} Y_{12} | Y_2 |}{Y} & -\frac{Y_{12} Y_{12} | Y_1 |}{Y} & \frac{|Y_1| | Y_2 | + Y_{2k} [Y_{1k} | Y_2 | + Y_{1k} | Y_1 |]}{Y} \\ -\frac{Y_{12} Y_{12} | Y_1 |}{Y} & -\frac{Y_{12} Y_{12} | Y_2 |}{Y} & \frac{|Y_1| | Y_2 | + Y_{2k} [Y_{1k} | Y_2 | + Y_{1k} | Y_1 |]}{Y} \\ \frac{|Y_1| | Y_2 | + Y_{2k} [Y_{1k} | Y_2 | + Y_{1k} | Y_1 |]}{Y} & \frac{|Y_1| | Y_2 | + Y_{2k} [Y_{1k} | Y_2 | + Y_{1k} | Y_1 |]}{Y} & \frac{|Y_1| | Y_2 | + Y_{2k} [Y_{1k} | Y_2 | + Y_{1k} | Y_1 |]}{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$Y = Y_{1k} | Y_2 | + Y_{1k} | Y_1 | + Y_{1k} | Y_3 | + Y_{1k} | Y_1 | + Y_{1k} | Y_2 | \quad (31)$$

Mit den Matrizen der Einzelvierpole in Leitwertform:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_1' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} I_2 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_2' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} I_3 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3 \\ U_3' \end{pmatrix} \quad (32)$$

gelangt man zu [vgl. Gl. (22)]:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(Y_{2k} + Y_{2k}) | Y_1 | + Y_{1k} Y_{2k} Y_{2k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{2k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{2k}}{Y} \\ \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{2k}}{Y} & \frac{(Y_{2k} + Y_{2k}) | Y_2 | + Y_{1k} Y_{2k} Y_{2k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{2k}}{Y} \\ \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{2k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{2k}}{Y} & \frac{(Y_{2k} + Y_{2k}) | Y_3 | + Y_{1k} Y_{2k} Y_{2k}}{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$Y = Y_{2k} Y_{2k} + Y_{2k} Y_{2k} + Y_{2k} Y_{2k} \quad (34)$$

und erhält somit die zu Gl. (22) duale Form. Die Umwandlung der Leitwerte in Widerstände bringt [vgl. Gl. (24)]:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{W_{11} | W_3 | + W_{11} | W_2 | + W_{21} W_{11} W_{11}}{W} & \frac{M_1 M_2 W_{11}}{W} & \frac{M_1 M_3 W_{11}}{W} \\ \frac{M_1 M_2 W_{11}}{W} & \frac{W_{11} | W_3 | + W_{11} | W_1 | + W_{21} W_{11} W_{11}}{W} & \frac{M_2 M_3 W_{11}}{W} \\ \frac{M_1 M_3 W_{11}}{W} & \frac{M_2 M_3 W_{11}}{W} & \frac{W_{11} | W_2 | + W_{11} | W_1 | + W_{21} W_{11} W_{11}}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$W = W_{11} W_{11} | W_3 | + W_{11} W_{11} | W_2 | + W_{11} W_{11} | W_1 | \quad (36)$$

4. Die Sterndreieck-Transformationen der Vierpole

4.1 Parallelgeschaltete symmetrische Vierpole

Für die Anordnungen Fig. 3 und 5 gelten die Formeln (2) mit negativen Kernleitwerten und (17). Da die Matrizen zur Hauptdiagonale symmetrisch sind, so sind nur sechs Gleichungen für die Vierpolelemente vorhanden. Man kann drei

beliebige Bedingungen zwischen den Kurzschlussleitwerten aufstellen; einfacher ist es, symmetrische Vierpole zu verwenden. Antimetrische Vierpole sind auch möglich, die Anordnungen in Stern und Dreieck lassen sich nicht sinnvoll zuordnen, und die Formeln sind kompliziert. Die für symmetrische Vierpole umgeänderten Formeln (2) mit negativen Kernleitwerten und (17) ergeben:

$$\begin{pmatrix} Y_{1k} + Y_{1k} & -Y_{12} & -Y_{12} \\ -Y_{12} & Y_{1k} + Y_{1k} & -Y_{12} \\ -Y_{12} & -Y_{12} & Y_{1k} + Y_{1k} \end{pmatrix} \Delta p = \begin{pmatrix} \frac{| Y_1 | + Y_{1k} (Y_{1k} + Y_{1k})}{Y_{1k} + Y_{1k} + Y_{1k}} & -\frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{1k} + Y_{1k}} & -\frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{1k} + Y_{1k}} \\ -\frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{1k} + Y_{1k}} & \frac{| Y_2 | + Y_{1k} (Y_{1k} + Y_{1k})}{Y_{1k} + Y_{1k} + Y_{1k}} & -\frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{1k} + Y_{1k}} \\ -\frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{1k} + Y_{1k}} & -\frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{1k} + Y_{1k}} & \frac{| Y_3 | + Y_{1k} (Y_{1k} + Y_{1k})}{Y_{1k} + Y_{1k} + Y_{1k}} \end{pmatrix} \Delta p \quad (37)$$

wobei die Beziehungen Δp und Δp für alle Elemente der zu-

gehörigen Matrix gelten. Der Vergleich der Hauptdiagonalen ergibt nach einfacher Rechnung:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} Y_{1k} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [-|Y_1| + |Y_2| + |Y_3|] + \frac{Y_{1k} Y_{1k}}{2} \end{pmatrix}^{\Delta p} \\ \begin{pmatrix} Y_{2k} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [|Y_1| - |Y_2| + |Y_3|] + \frac{Y_{1k} Y_{1k}}{1} \end{pmatrix}^{\Delta p} \\ \begin{pmatrix} Y_{3k} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [|Y_1| + |Y_2| - |Y_3|] + \frac{Y_{1k} Y_{1k}}{1} \end{pmatrix}^{\Delta p}\end{aligned}\quad (38)$$

während sich die Kernleitwerte direkt ablesen lassen:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} Y_{12} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \end{pmatrix}^{\Delta p} \\ \begin{pmatrix} Y_{22} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \end{pmatrix}^{\Delta p} \\ \begin{pmatrix} Y_{32} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \end{pmatrix}^{\Delta p}\end{aligned}\quad (39)$$

Zur Berechnung der Sterngrößen aus den Dreiecksgrößen schreibt man die Hauptdiagonale der Stern-Matrix (37) in folgender Form:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} Y_{1k} - \frac{Y_{12}^2}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} Y_{1k} + Y_{1k} \end{pmatrix}^{\Delta p} \\ \begin{pmatrix} Y_{2k} - \frac{Y_{12}^2}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} Y_{1k} + Y_{1k} \end{pmatrix}^{\Delta p} \\ \begin{pmatrix} Y_{3k} - \frac{Y_{12}^2}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} Y_{2k} + Y_{1k} \end{pmatrix}^{\Delta p}\end{aligned}\quad (40)$$

Aus den Nebendiagonalen erhält man durch Multiplikation und Division:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \frac{Y_{12}^2}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{1k}} \end{pmatrix}^{\Delta p} \\ \begin{pmatrix} \frac{Y_{12}^2}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{2k}} \end{pmatrix}^{\Delta p} \\ \begin{pmatrix} \frac{Y_{12}^2}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{3k}} \end{pmatrix}^{\Delta p}\end{aligned}\quad (41)$$

und mit Gl. (40):

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} Y_{1k} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} Y_{1k} + Y_{1k} + \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{1k}} \end{pmatrix}^{\Delta p} \\ \begin{pmatrix} Y_{2k} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} Y_{1k} + Y_{1k} + \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{2k}} \end{pmatrix}^{\Delta p} \\ \begin{pmatrix} Y_{3k} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \begin{pmatrix} Y_{1k} + Y_{1k} + \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{3k}} \end{pmatrix}^{\Delta p}\end{aligned}\quad (42)$$

Die Summe der Gln. (42):

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \\ &= \left[2 \begin{pmatrix} Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \end{pmatrix} + \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{1k}} + \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{2k}} + \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{3k}} \right]^{\Delta p}\end{aligned}\quad (43)$$

verhilft mit den Gln. (41) zu den Quadraten der Kernleitwerte:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} Y_{12}^2 \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \\ &= \left[2 \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{1k}} \begin{pmatrix} Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \end{pmatrix} + \frac{Y_{12}^2 Y_{12}^2}{Y_{1k}^2} + Y_{1k}^2 + Y_{2k}^2 \right]^{\Delta p} \\ \begin{pmatrix} Y_{22}^2 \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \\ &= \left[2 \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{2k}} \begin{pmatrix} Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \end{pmatrix} + \frac{Y_{12}^2 Y_{12}^2}{Y_{2k}^2} + Y_{1k}^2 + Y_{3k}^2 \right]^{\Delta p} \\ \begin{pmatrix} Y_{32}^2 \end{pmatrix}^{\Delta p} &= \\ &= \left[2 \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{3k}} \begin{pmatrix} Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \end{pmatrix} + \frac{Y_{12}^2 Y_{12}^2}{Y_{3k}^2} + Y_{2k}^2 + Y_{1k}^2 \right]^{\Delta p}\end{aligned}\quad (44)$$

Für die Determinanten liefern die Gln. (42) und (44):

$$\begin{aligned}|Y_1|^{\Delta p} &= \left[|Y_3| + |Y_2| + 2 \frac{Y_{1k} Y_{1k}}{Y_{3k}} \left(1 - \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y_{1k} Y_{3k} Y_{1k}} \right) \right]^{\Delta p} \\ |Y_2|^{\Delta p} &= \left[|Y_1| + |Y_3| + 2 \frac{Y_{1k} Y_{1k}}{Y_{1k}} \left(1 - \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y_{1k} Y_{1k} Y_{2k}} \right) \right]^{\Delta p} \\ |Y_3|^{\Delta p} &= \left[|Y_2| + |Y_1| + 2 \frac{Y_{1k} Y_{1k}}{Y_{2k}} \left(1 - \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y_{1k} Y_{2k} Y_{3k}} \right) \right]^{\Delta p}\end{aligned}\quad (45)$$

4.2 In Serie geschaltete symmetrische Vierpole
Zueinander in Beziehung zu setzen sind die Anordnungen

Fig. 4 und Fig. 6 mit den für symmetrische Vierpole verein-
fachten Matrizen (9) mit negativen Kernwiderständen und (28):

$$\begin{pmatrix} W_{21} + W_{31} & -M_3 & -M_2 \\ -M_3 & W_{31} + W_{11} & -M_1 \\ -M_2 & -M_1 & W_{11} + W_{21} \end{pmatrix} \overset{\Delta r}{=} \begin{pmatrix} \frac{|W_1| + W_{11}(W_{21} + W_{31})}{W_{11} + W_{21} + W_{31}} & -\frac{M_1 M_2}{W_{11} + W_{21} + W_{31}} & -\frac{M_1 M_3}{W_{11} + W_{21} + W_{31}} \\ -\frac{M_1 M_2}{W_{11} + W_{21} + W_{31}} & \frac{|W_2| + W_{21}(W_{31} + W_{11})}{W_{11} + W_{21} + W_{31}} & -\frac{M_2 M_3}{W_{11} + W_{21} + W_{31}} \\ -\frac{M_1 M_3}{W_{11} + W_{21} + W_{31}} & -\frac{M_2 M_3}{W_{11} + W_{21} + W_{31}} & \frac{|W_3| + W_{31}(W_{11} + W_{21})}{W_{11} + W_{21} + W_{31}} \end{pmatrix} \overset{\Delta r}{=}$$

(46)

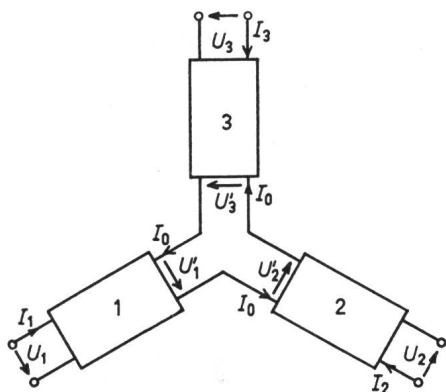


Fig. 6

Sternserieschaltung von drei Vierpolen mit negativen Kernwiderständen

Die daraus zu entwickelnden Formeln entsprechen den
Beziehungen (38) bis (45), so dass auf die Wiedergabe ver-
zichtet werden kann.

Literatur

- [1] W. Cauer: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. 2. Auflage. Berlin, Akademie-Verlag, 1954.
- [2] W. Herzog: Strenge Weichen hoher Trennteilheit. Arch. Elektrotechn. 50(1965)1, S. 60...64.
- [3] W. Herzog: Die Vierpolbrücke. Bull. SEV 60(1969)13, S. 580...584.
- [4] W. Herzog: Zur Umwandlung des n-Ecks in einen n-strahligen Stern. Bull. SEV 60(1969)8, S. 352...354.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. phil., Dr.-Ing. W. Herzog, Direktor des Institutes für Elektrotech-
nik der Universität Mainz, Anselm-Franz-v.-Bentzel-Weg 12, D-6500 Mainz.