

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 60 (1969)  
**Heft:** 19

**Artikel:** Die Dreieck-Stern-Transformation von Vierpolen  
**Autor:** Herzog, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-916179>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Die Dreieck-Stern-Transformation von Vierpolen<sup>1)</sup>

Von W. Herzog, Mainz  
41-46

Es werden die Widerstands- und Leitwertmatrizen von vier Anordnungen aus je drei Vierpolen berechnet. Die unter sich dualen Dreieck- und Sternanordnungen werden miteinander in Beziehung gesetzt und die Transformationsgleichungen angegeben.

On calcule les matrices des résistances et des conductibilités spécifiques de quatre dispositions réalisées par trois quadripôles. Les dispositions en triangle et en étoile, réciproquement binaires, sont mises en relation en indiquant les équations de transformation.

## 1. Zum Problem

Cauer [1]<sup>2)</sup> benutzte Dreieckschaltungen von Vierpolen als Weichen. Die vorteilhafte Schaltung eines Vierpols vor einer Weiche [2] führt bereits zur Sternschaltung von drei Vierpolen. Eine Anwendung könnte bei den Vierpolbrücken [3] vorliegen, in gleicher Weise wie die Dreieck-Stern-Transformation bei einer Brücke eine leichte Umwandlung und Berechnung gestattet. Eine Erweiterung auf mehr als drei Vierpole entspricht der Umwandlung von  $n$ -strahligem Stern und  $n$ -Eck [4] ist möglich. Drei Vierpole lassen sich parallel, in Reihe und in Kombinationen der beiden Arten schalten. Zunächst seien die Formeln für die Dreieckschaltungen von Vierpolen parallel und in Serie angegeben, wobei von den Kombinationen abgesehen wird.

## 2. Die Dreieckschaltungen

### 2.1 Die Parallelschaltung von drei Vierpolen

Fig. 1 zeigt die Parallelschaltung von drei passiven unsymmetrischen Vierpolen. Eine Erweiterung auf aktive Vierpole bringt keine Schwierigkeiten. Fig. 1a ist — räumlich betrachtet — symmetrisch aufgebaut. Hierbei liegen die Punkte 1, 2, 3 in einer Ebene und ebenso die Punkte  $1', 2', 3'$ . Fig. 1b ist eine Umzeichnung von Fig. 1a in die Ebene mit Spannungsverlauf  $U_1, U_2, U_3$  entgegen dem Uhrzeiger. Fig. 1c ist ebenfalls eine Umzeichnung von Fig. 1a in die Ebene. Durch Kreuzen der Klemmen lassen sich die Richtungen der Spannungen  $U_1, U_2, U_3$  zum Vergleich nach Bedarf umdrehen (z. B. Fig. 1c).

Aus Fig. 1 sind die Leitwertdarstellungen der drei Vierpole ablesbar:

$$\begin{pmatrix} I_1' \\ I_2 - I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} I_2' \\ I_3 - I_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} I_3' \\ I_1 - I_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3 \\ U_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Hierbei sind  $U_1, U_2, U_3$  die Spannungen,  $I_1, I_2, I_3$  und  $I_1', I_2', I_3'$  die Ströme (s. Fig. 1). Die Kurzschlussleitwerte  $Y_{1k}$  und  $Y_{2k}$  sowie die Kernleitwerte  $Y_{12}$  erhalten einen weiteren Index zur Zuordnung zu dem entsprechenden Vierpol.

Durch Eliminierung der mit einem Strich versehenen Ströme ergibt sich die gesuchte Leitwertmatrix der Dreieksanordnung:

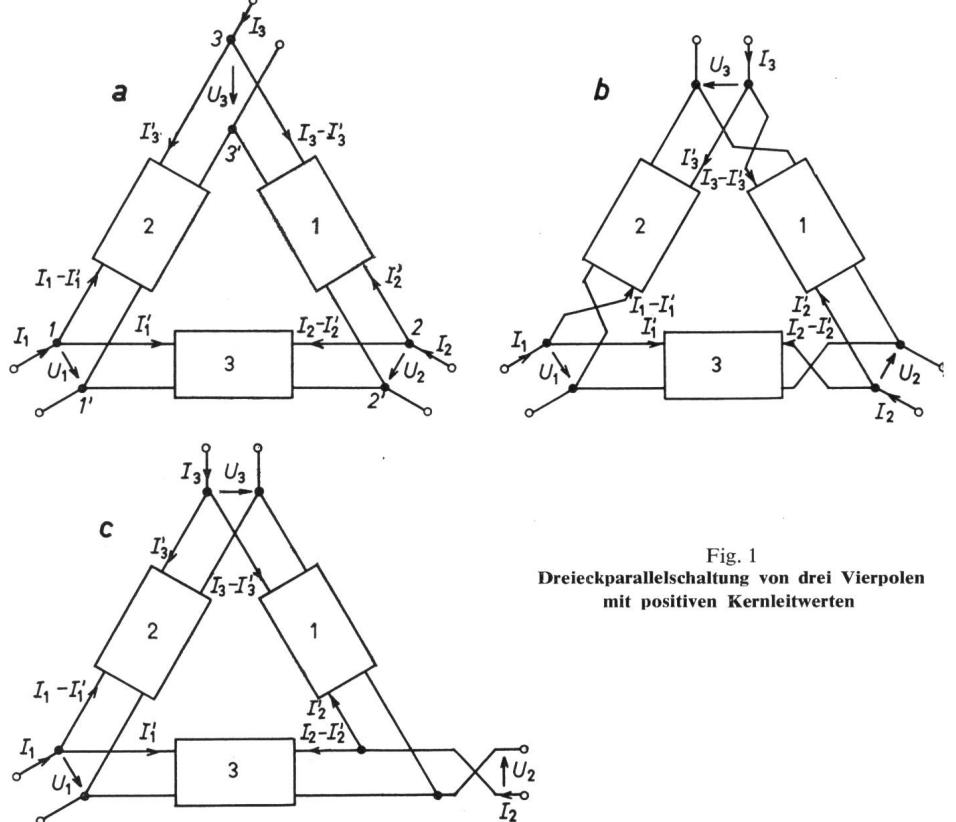


Fig. 1  
Dreieckparallelschaltung von drei Vierpolen mit positiven Kernleitwerten

<sup>1)</sup> Mitteilung des Instituts für Elektrotechnik der Universität Mainz.

<sup>2)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

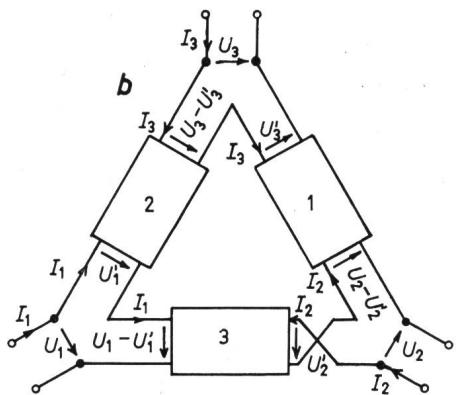
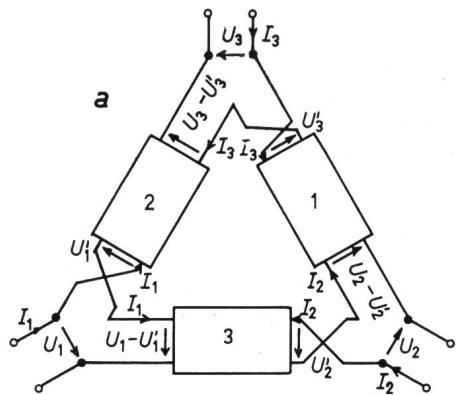


Fig. 2  
Dreieckserieschaltung von drei Vierpolen mit positiven Kernwiderständen

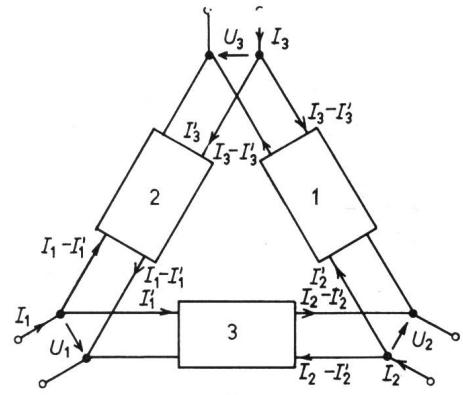


Fig. 3  
Dreieckparallelschaltung von drei Vierpolen mit negativen Kernleitwerten

mit der Abkürzung:

$$Y = (Y_{1k} + Y_{2k}) |Y_1| + (Y_{1k} + Y_{3k}) |Y_2| + (Y_{2k} + Y_{1k}) |Y_3| + Y_{1k} Y_{2k} Y_{3k} + Y_{2k} Y_{1k} Y_{3k} + 2 Y_{12} Y_{12} Y_{12} \quad (5)$$

Ausgedrückt durch die Widerstandsmatrizen der einzelnen Vierpole wandeln sich die Beziehungen (4) und (5) mit der Abkürzung von Gl. (6):

$$W = (W_{21} + W_{11}) |W_1| + (W_{11} + W_{31}) |W_2| + (W_{21} + W_{11}) |W_3| + W_{11} W_{21} W_{31} + W_{21} W_{11} W_{31} - 2 M_1 M_2 M_3 \quad (6)$$

und ausgedrückt durch die Widerstandsmatrizen ( $W_{11}$ ,  $W_{21}$  sind die Leerlaufwiderstände,  $M$  die Kernwiderstände,  $|W| = W_{11} W_{21} - M^2$ ):

in [s. Gl. (7)]:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{W_{21}}{|W_3|} + \frac{W_{11}}{|W_2|} & -\frac{M_3}{|W_3|} & -\frac{M_2}{|W_2|} \\ -\frac{M_3}{|W_3|} & \frac{W_{21}}{|W_1|} + \frac{W_{11}}{|W_3|} & -\frac{M_1}{|W_1|} \\ -\frac{M_2}{|W_2|} & -\frac{M_1}{|W_1|} & \frac{W_{21}}{|W_2|} + \frac{W_{11}}{|W_1|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Löst man die Gl. (2) nach den Spannungen auf, so folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_{1k} Y_{1k} + Y_{1k} Y_{2k} + Y_{2k} Y_{2k} + |Y_1|}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} - Y_{12} (Y_{1k} + Y_{2k})}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} - Y_{12} (Y_{1k} + Y_{2k})}{Y} \\ \frac{Y_{12} Y_{12} - Y_{12} (Y_{1k} + Y_{2k})}{Y} & \frac{Y_{1k} Y_{1k} + Y_{1k} Y_{2k} + Y_{2k} Y_{2k} + |Y_2|}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} - Y_{12} (Y_{1k} + Y_{2k})}{Y} \\ \frac{Y_{12} Y_{12} - Y_{12} (Y_{1k} + Y_{2k})}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} - Y_{12} (Y_{1k} + Y_{2k})}{Y} & \frac{Y_{1k} Y_{1k} + Y_{1k} Y_{2k} + Y_{2k} Y_{2k} + |Y_3|}{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix}
\left( \begin{array}{c} M_1 M_2 |W_3| + \\ \hline W \\ \hline |W_1| W_{21} W_{31} + |W_2| W_{11} W_{11} + \\ \hline W \\ \hline + |W_3| W_{21} W_{21} + |W_1| |W_3| \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} M_2 M_3 |W_1| + \\ \hline W \\ \hline |W_1| W_{21} W_{21} + |W_2| W_{31} + \\ \hline W \\ \hline + M_3 [W_{21} |W_1| + W_{11} |W_2|] \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} M_3 M_1 |W_2| + \\ \hline W \\ \hline |W_1| W_{31} W_{21} + |W_2| W_{11} W_{11} + \\ \hline W \\ \hline + M_3 [W_{21} |W_1| + W_{11} |W_2|] \end{array} \right) \\
U_1 & U_2 & U_3
\end{pmatrix} \quad (7)$$

## 2.2 Die Serieschaltung von drei Vierpolen

Den in Fig. 2a und 2b gezeigten Serieschaltungen, wobei in Fig. 2b zwei Kreuzungen durch Umdrehen eines Vierpols und der Spannung  $U_3$  ersetzt sind, entnimmt man für die einzelnen Vierpole die Formeln:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} U_1 - U_1' \\ U_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W_{11} & M_3 \\ M_3 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} U_2 - U_2' \\ U_3' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W_{11} & M_1 \\ M_1 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} U_3 - U_3' \\ U_1' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W_{11} & M_2 \\ M_2 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 \\ I_1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (8)$$

und erhält daraus die zur Matrix (2) duale Matrix:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{21} + W_{11} & M_3 & M_2 \\ M_3 & W_{21} + W_{11} & M_1 \\ M_2 & M_1 & W_{21} + W_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

und ausgedrückt durch die Leitwerte [vgl. (3)]:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_{1k}}{|Y_2|} + \frac{Y_{2k}}{|Y_3|} & -\frac{Y_{12}}{|Y_3|} & -\frac{Y_{12}}{|Y_2|} \\ -\frac{Y_{12}}{|Y_3|} & \frac{Y_{1k}}{|Y_3|} + \frac{Y_{2k}}{|Y_1|} & -\frac{Y_{12}}{|Y_1|} \\ -\frac{Y_{12}}{|Y_2|} & -\frac{Y_{12}}{|Y_1|} & \frac{Y_{1k}}{|Y_1|} + \frac{Y_{2k}}{|Y_2|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Die Auflösung der Gl. (9) nach den Strömen ergibt [vgl. Gl. (4)] mit der Abkürzung von Gl. (11) [vgl. Gl. (5) und (6)]:

$$\begin{aligned}
W &= (W_{21} + W_{11}) |W_1| + (W_{31} + W_{11}) |W_2| + \\
&\quad + (W_{21} + W_{11}) |W_3| + W_{11} W_{21} W_{31} + \\
&\quad + W_{21} W_{21} W_{21} + 2 M_1 M_2 M_3
\end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \begin{pmatrix} \frac{W_1 W_2 + W_1 W_3 + W_2 W_3 + W_1 W_2 + W_1 W_3}{W} & \frac{M_1 M_2 - M_3 (W_2 + W_1)}{W} & \frac{M_1 M_3 - M_2 (W_1 + W_3)}{W} \\ \frac{M_1 M_2 - M_3 (W_2 + W_1)}{W} & \frac{W_2 W_3 + W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_1 W_2 + W_1 W_3}{W} & \frac{M_2 M_3 - M_1 (W_3 + W_2)}{W} \\ \frac{M_1 M_3 - M_2 (W_1 + W_3)}{W} & \frac{M_2 M_3 - M_1 (W_3 + W_2)}{W} & \frac{W_3 W_1 + W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_1 W_3}{W} \end{pmatrix} \\
I_2 &= \begin{pmatrix} M_1 M_2 - M_3 (W_2 + W_1) \\ W_2 W_3 + W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_1 W_2 + W_1 W_3 \\ M_1 M_3 - M_2 (W_1 + W_3) \end{pmatrix} \\
I_3 &= \begin{pmatrix} W_1 W_2 + W_1 W_3 + W_2 W_3 + W_1 W_2 + W_1 W_3 \\ W_2 W_3 + W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_1 W_2 + W_1 W_3 \\ W_3 W_1 + W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_1 W_3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{12}$$

Mit der Abkürzung:

$$Y = \left( \begin{smallmatrix} Y_{2k} \\ 2 \\ Y_{1k} \\ 3 \end{smallmatrix} \right) | Y_1 | + \left( \begin{smallmatrix} Y_{1k} \\ 1 \\ Y_{2k} \\ 3 \end{smallmatrix} \right) | Y_2 | + \\ + \left( \begin{smallmatrix} Y_{1k} \\ 2 \\ Y_{2k} \\ 1 \end{smallmatrix} \right) | Y_3 | + \begin{smallmatrix} Y_{1k} & Y_{1k} & Y_{1k} \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix} + \\ + \begin{smallmatrix} Y_{2k} & Y_{2k} & Y_{2k} \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix} - 2 \begin{smallmatrix} Y_{12} & Y_{12} & Y_{12} \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix} \quad (14)$$

Die Umwandlung der Widerstände in Gl. (11) und (12) in Leitwerte liefert, entsprechend Gl. (6) und (7):

In den Fig. 3 und 4 mit dualen Matrizen sind den Fig. 1 und 2 entsprechende Schaltungen dargestellt, bei denen Umwandlung des Vorzeichens der Ausgangsströme und Ausgangsspannungen (Vertauschen der Ausgangsklemmen) der einzelnen Vierpole vorliegt, was einem Vorzeichenwechsel der Kernwiderstände oder der Kernleitwerte entspricht.

### 3. Die Sternschaltungen

#### 3.1 Parallelschaltung von drei Vierpolen

Für die Vierpole in Fig. 5a und 5b, wobei Fig. 5a räumlich betrachtet werden kann (vgl. Fig. 1a), während Fig. 5b eine Umzeichnung in die Ebene darstellt, gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_1' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I_2 \\ I_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I_3 \\ I_3' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3 \\ U_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

sowie die Beziehung:

$$I_1' + I_2' + I_3' = 0 \quad (16)$$

Durch Eliminierung von  $U_0$  und der mit einem Strich versehenen Ströme ergibt sich:

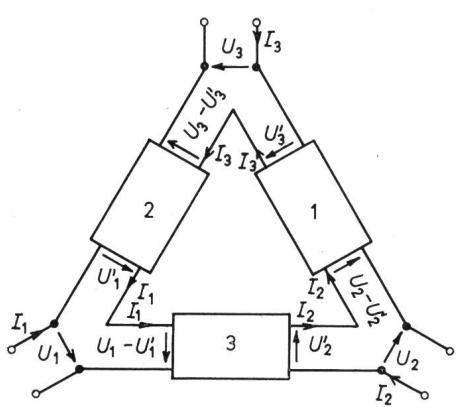


Fig. 4  
Dreieckserieschaltung von drei Vierpolen mit negativen Kernleitwerten

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{|Y_1| + Y_{1k}(Y_{2k} + Y_{3k})}{Y} & -\frac{Y_{12}Y_{12}}{Y} & -\frac{Y_{12}Y_{3k}}{Y} \\ -\frac{Y_{12}Y_{12}}{Y} & \frac{|Y_2| + Y_{1k}(Y_{2k} + Y_{3k})}{Y} & -\frac{Y_{12}Y_{3k}}{Y} \\ -\frac{Y_{12}Y_{3k}}{Y} & -\frac{Y_{12}Y_{3k}}{Y} & \frac{|Y_3| + Y_{1k}(Y_{2k} + Y_{3k})}{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (17) \\ Y &= Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{|W_1| + W_{21}[W_{11}|W_3| + W_{31}|W_1|]}{W} & -\frac{W_{21}W_{31}}{W} & -\frac{W_{21}W_{11}}{W} \\ -\frac{W_{21}W_{31}}{W} & \frac{|W_2| + W_{21}[W_{11}|W_3| + W_{31}|W_1|]}{W} & -\frac{W_{21}W_{11}}{W} \\ -\frac{W_{21}W_{11}}{W} & -\frac{W_{21}W_{11}}{W} & \frac{|W_1| + W_{21}[W_{11}|W_2| + W_{21}|W_1|]}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (19) \end{aligned}$$

und durch die Widerstände ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{M_1 M_2 |W_3|}{W} & -\frac{M_1 M_3 |W_2|}{W} & -\frac{M_2 M_3 |W_1|}{W} \\ -\frac{M_1 M_3 |W_2|}{W} & \frac{M_1 M_2 |W_3|}{W} & -\frac{M_2 M_3 |W_1|}{W} \\ -\frac{M_2 M_3 |W_1|}{W} & -\frac{M_1 M_2 |W_3|}{W} & \frac{M_1 M_3 |W_2|}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$W = W_{11} | W_2 | | W_3 | + W_{21} | W_1 | | W_3 | + W_{31} | W_1 | | W_2 | \quad (20)$$

Der Fig. 5 lässt sich weiterhin entnehmen:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & M_1 \\ M_1 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_1' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{21} & M_2 \\ M_2 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ I_2' \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{31} & M_3 \\ M_3 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 \\ I_3' \end{pmatrix}$$

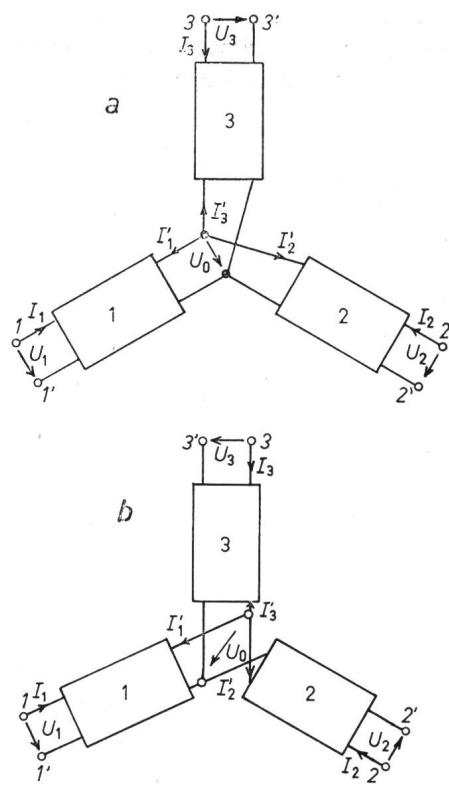


Fig. 5  
Sternparallelenschaltung von drei Vierpolen mit negativen Leitwerten

Aus den Gln. (21) oder aus den Gln. (17), (18) erhält man, nach den Spannungen aufgelöst:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(W_{21} + W_{31}) | W_1 | + W_{11} W_{21} W_{31}}{W} & \frac{M_1 M_2 W_{21}}{W} & \frac{M_1 M_3 W_{21}}{W} \\ \frac{M_1 M_2 W_{21}}{W} & \frac{(W_{21} + W_{31}) | W_2 | + W_{11} W_{21} W_{31}}{W} & \frac{M_2 M_3 W_{21}}{W} \\ \frac{M_1 M_3 W_{21}}{W} & \frac{M_2 M_3 W_{21}}{W} & \frac{(W_{21} + W_{31}) | W_3 | + W_{11} W_{21} W_{31}}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$W = W_{21} W_{21} + W_{21} W_{31} + W_{21} W_{31} \quad (23)$$

und durch die Leitwerte ausgedrückt:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_{1k} | Y_3 | + Y_{1k} | Y_2 | + Y_{2k} Y_{1k} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y} \\ \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{1k} | Y_3 | + Y_{1k} | Y_1 | + Y_{2k} Y_{1k} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y} \\ \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y} & \frac{Y_{1k} | Y_2 | + Y_{1k} | Y_1 | + Y_{2k} Y_{1k} Y_{1k}}{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$Y = Y_{1k} Y_{1k} | Y_3 | + Y_{1k} Y_{1k} | Y_2 | + Y_{1k} Y_{1k} | Y_1 | \quad (25)$$

### 3.2 Die Serieschaltung von drei Vierpolen

Der Fig. 6, die die Serieschaltung dreier Vierpole zeigt, lassen sich die folgenden Beziehungen entnehmen:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & M_1 \\ M_1 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ U_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{21} & M_2 \\ M_2 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ I_0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ U_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & M_3 \\ M_3 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 \\ I_0 \end{pmatrix}$$

$$U_1' + U_2' + U_3' = 0 \quad (27)$$

Die Eliminierung des Stromes  $I_0$  und der mit einem Strich versehenen Spannungen führt zu der zur Matrix (17) dualen Beziehung:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & M_1 \\ M_1 & W_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{pmatrix} W_{11} & M_1 \\ M_1 & W_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|W_1| + W_{11}(W_{21} + W_{21}^*)}{W} & -\frac{M_1 M_2}{W} \\ -\frac{M_1 M_2}{W} & \frac{|W_2| + W_{21}(W_{11} + W_{11}^*)}{W} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} W_{11} & M_1 \\ M_1 & W_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|W_3| + W_{11}(W_{21} + W_{21}^*)}{W} & -\frac{M_2 M_3}{W} \\ -\frac{M_2 M_3}{W} & \frac{|W_1| + W_{21}(W_{11} + W_{11}^*)}{W} \end{pmatrix}$$

$$W = W_{11} + W_{21} + W_{31}$$

und in der Leitwertform [vgl. Gl. (19)]:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|Y_1| + Y_{11}(Y_{21} + Y_{21}^*)}{Y} & -\frac{Y_{12} Y_{12}^* |Y_2|}{Y} \\ -\frac{Y_{12} Y_{12}^* |Y_3|}{Y} & \frac{|Y_2| + Y_{21}(Y_{11} + Y_{11}^*)}{Y} \\ \frac{|Y_1| + Y_{21}(Y_{11} + Y_{11}^*)}{Y} & -\frac{Y_{22} Y_{22}^* |Y_3|}{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|Y_2| + Y_{21}(Y_{11} + Y_{11}^*)}{Y} & -\frac{Y_{12} Y_{12}^* |Y_3|}{Y} \\ -\frac{Y_{12} Y_{12}^* |Y_2|}{Y} & \frac{|Y_1| + Y_{11}(Y_{21} + Y_{21}^*)}{Y} \\ \frac{|Y_1| + Y_{21}(Y_{11} + Y_{11}^*)}{Y} & -\frac{Y_{22} Y_{22}^* |Y_1|}{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$Y = Y_{11} |Y_2| |Y_3| + Y_{21} |Y_1| |Y_3| + Y_{12} |Y_1| |Y_2| + Y_{22} |Y_1| |Y_2| \quad (31)$$

Mit den Matrizen der Einzelvierpole in Leitwertform:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_1' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} I_2 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{2k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_2' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} I_3 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1k} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3 \\ U_3' \end{pmatrix} \quad (32)$$

gelangt man zu [vgl. Gl. (22)]:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(Y_{2k} + Y_{3k})|Y_1| + Y_{1k}Y_{2k}Y_{2k}}{Y} & \frac{Y_{12}Y_{12}Y_{2k}}{Y} \\ \frac{Y_{12}Y_{12}Y_{2k}}{Y} & \frac{(Y_{2k} + Y_{3k})|Y_2| + Y_{2k}Y_{1k}Y_{3k}}{Y} \\ \frac{Y_{12}Y_{12}Y_{2k}}{Y} & \frac{(Y_{2k} + Y_{3k})|Y_3| + Y_{3k}Y_{2k}Y_{1k}}{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$Y = Y_{1k}Y_{2k} + Y_{2k}Y_{3k} + Y_{3k}Y_{1k} \quad (34)$$

und erhält somit die zu Gl. (22) duale Form. Die Umwandlung der Leitwerte in Widerstände bringt [vgl. Gl. (24)]:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{W_{11}|W_3| + W_{11}|W_2| + W_{21}W_{11}W_{11}}{W} & \frac{M_1M_2W_{11}}{W} & \frac{M_1M_3W_{11}}{W} \\ \frac{M_1M_2W_{11}}{W} & \frac{W_{11}|W_3| + W_{11}|W_1| + W_{21}W_{11}W_{11}}{W} & \frac{M_2M_3W_{11}}{W} \\ \frac{M_1M_3W_{11}}{W} & \frac{M_2M_3W_{11}}{W} & \frac{W_{11}|W_2| + W_{11}|W_1| + W_{21}W_{11}W_{11}}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$W = W_{11}W_{11}|W_3| + W_{11}W_{11}|W_2| + W_{11}W_{11}|W_1| \quad (36)$$

#### 4. Die Sterndreieck-Transformationen der Vierpole

##### 4.1 Parallelgeschaltete symmetrische Vierpole

Für die Anordnungen Fig. 3 und 5 gelten die Formeln (2) mit negativen Kernleitwerten und (17). Da die Matrizen zur Hauptdiagonale symmetrisch sind, so sind nur sechs Gleichungen für die Vierpolelemente vorhanden. Man kann drei

beliebige Bedingungen zwischen den Kurzschlussleitwerten aufstellen; einfacher ist es, symmetrische Vierpole zu verwenden. Antimetrische Vierpole sind auch möglich, die Anordnungen in Stern und Dreieck lassen sich nicht sinnvoll zuordnen, und die Formeln sind kompliziert. Die für symmetrische Vierpole umgeänderten Formeln (2) mit negativen Kernleitwerten und (17) ergeben:

$$\begin{pmatrix} Y_{1k} + Y_{2k} & -Y_{12} & -Y_{12} \\ -Y_{12} & Y_{1k} + Y_{3k} & -Y_{12} \\ -Y_{12} & -Y_{12} & Y_{1k} + Y_{1k} \end{pmatrix}^{\Delta p} = \begin{pmatrix} \frac{|Y_1| + Y_{1k}(Y_{1k} + Y_{2k})}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} & -\frac{Y_{12}Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} & -\frac{Y_{12}Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \\ -\frac{Y_{12}Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} & \frac{|Y_2| + Y_{2k}(Y_{1k} + Y_{3k})}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} & -\frac{Y_{12}Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \\ -\frac{Y_{12}Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} & -\frac{Y_{12}Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} & \frac{|Y_3| + Y_{3k}(Y_{1k} + Y_{2k})}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \end{pmatrix}^{\Delta p} \quad (37)$$

wobei die Beziehungen  $\Delta p$  und  $\Delta p$  für alle Elemente der zu-

gehörigen Matrix gelten. Der Vergleich der Hauptdiagonalen ergibt nach einfacher Rechnung:

$$\begin{aligned}
\left( \begin{array}{c} Y_{1k} \\ Y_{1k} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \frac{\frac{1}{2} [ |Y_1| + |Y_2| + |Y_3| ] + \frac{Y_{1k} Y_{1k}}{2}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \right)^{\Delta p} \\
\left( \begin{array}{c} Y_{2k} \\ Y_{2k} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \frac{\frac{1}{2} [ |Y_1| + |Y_2| + |Y_3| ] + \frac{Y_{1k} Y_{1k}}{3}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \right)^{\Delta p} \\
\left( \begin{array}{c} Y_{3k} \\ Y_{3k} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \frac{\frac{1}{2} [ |Y_1| + |Y_2| + |Y_3| ] + \frac{Y_{1k} Y_{1k}}{2}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \right)^{\Delta p}
\end{aligned} \tag{38}$$

während sich die Kernleitwerte direkt ablesen lassen:

$$\begin{aligned}
\left( \begin{array}{c} Y_{12} \\ Y_{12} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \frac{Y_{2k} Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \right)^{\Delta p} \\
\left( \begin{array}{c} Y_{12} \\ Y_{12} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \frac{Y_{1k} Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \right)^{\Delta p}
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\left( \begin{array}{c} Y_{12} \\ Y_{12} \end{array} \right)^{\Delta p} = \left( \frac{Y_{1k} Y_{12}}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \right)^{\Delta p}$$

Zur Berechnung der Sterngrößen aus den Dreiecksgrößen schreibt man die Hauptdiagonale der Stern-Matrix (37) in folgender Form:

$$\begin{aligned}
\left( \begin{array}{c} Y_{1k} - \frac{Y_{12}^2}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \\ Y_{1k} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \begin{array}{c} Y_{1k} + Y_{2k} \\ Y_{3k} \end{array} \right)^{\Delta p} \\
\left( \begin{array}{c} Y_{2k} - \frac{Y_{12}^2}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \\ Y_{2k} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \begin{array}{c} Y_{1k} + Y_{3k} \\ Y_{1k} \end{array} \right)^{\Delta p} \\
\left( \begin{array}{c} Y_{3k} - \frac{Y_{12}^2}{Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}} \\ Y_{3k} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \begin{array}{c} Y_{2k} + Y_{1k} \\ Y_{1k} \end{array} \right)^{\Delta p}
\end{aligned} \tag{40}$$

Aus den Nebendiagonalen erhält man durch Multiplikation und Division:

$$\begin{aligned}
\left( \begin{array}{c} Y_{12}^2 \\ Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \begin{array}{c} Y_{12} Y_{12} \\ Y_{12} \end{array} \right)^{\Delta p} \\
\left( \begin{array}{c} Y_{12}^2 \\ Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \begin{array}{c} Y_{12} Y_{12} \\ Y_{2k} \end{array} \right)^{\Delta p} \\
\left( \begin{array}{c} Y_{12}^2 \\ Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \begin{array}{c} Y_{12} Y_{12} \\ Y_{12} \end{array} \right)^{\Delta p}
\end{aligned} \tag{41}$$

und mit Gl. (40):

$$\begin{aligned}
\left( \begin{array}{c} Y_{1k} \\ Y_{3k} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \begin{array}{c} Y_{1k} + Y_{2k} + \frac{Y_{12} Y_{12}}{3} \\ Y_{1k} \end{array} \right)^{\Delta p} \\
\left( \begin{array}{c} Y_{1k} \\ Y_{2k} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \begin{array}{c} Y_{1k} + Y_{3k} + \frac{Y_{12} Y_{12}}{2} \\ Y_{1k} \end{array} \right)^{\Delta p} \\
\left( \begin{array}{c} Y_{1k} \\ Y_{3k} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \left( \begin{array}{c} Y_{2k} + Y_{1k} + \frac{Y_{12} Y_{12}}{3} \\ Y_{1k} \end{array} \right)^{\Delta p}
\end{aligned} \tag{42}$$

Die Summe der Gln. (42):

$$\begin{aligned}
\left( \begin{array}{c} Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \\ Y_{1k} \end{array} \right)^{\Delta p} &= \\
= \left[ 2 \left( Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \right) + \frac{Y_{12} Y_{12}}{2} + \frac{Y_{12} Y_{12}}{1} + \frac{Y_{12} Y_{12}}{3} \right]^{\Delta p}
\end{aligned} \tag{43}$$

verhilft mit den Gln. (41) zu den Quadraten der Kernleitwerte:

$$\begin{aligned}
\left( \begin{array}{c} Y_{12}^2 \\ Y_{12}^2 \end{array} \right)^{\Delta p} &= \\
= \left[ 2 \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{12}} \left( Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \right) + \frac{Y_{12}^2 Y_{12}^2}{Y_{12}^2} + Y_{12}^2 + Y_{12}^2 \right]^{\Delta p} \\
\left( \begin{array}{c} Y_{12}^2 \\ Y_{2k}^2 \end{array} \right)^{\Delta p} &= \\
= \left[ 2 \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{12}} \left( Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \right) + \frac{Y_{12}^2 Y_{2k}^2}{Y_{12}^2} + Y_{2k}^2 + Y_{12}^2 \right]^{\Delta p} \\
\left( \begin{array}{c} Y_{12}^2 \\ Y_{3k}^2 \end{array} \right)^{\Delta p} &= \\
= \left[ 2 \frac{Y_{12} Y_{12}}{Y_{12}} \left( Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k} \right) + \frac{Y_{12}^2 Y_{3k}^2}{Y_{12}^2} + Y_{3k}^2 + Y_{12}^2 \right]^{\Delta p}
\end{aligned} \tag{44}$$

Für die Determinanten liefern die Gln. (42) und (44):

$$\begin{aligned}
|Y_1|^{\Delta p} &= \left[ |Y_3| + |Y_2| + 2 Y_{1k} Y_{1k} \left( 1 - \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y_{1k} Y_{2k} Y_{3k}} \right) \right]^{\Delta p} \\
|Y_2|^{\Delta p} &= \left[ |Y_1| + |Y_3| + 2 Y_{1k} Y_{1k} \left( 1 - \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y_{1k} Y_{1k} Y_{2k}} \right) \right]^{\Delta p} \\
|Y_3|^{\Delta p} &= \left[ |Y_2| + |Y_1| + 2 Y_{1k} Y_{1k} \left( 1 - \frac{Y_{12} Y_{12} Y_{1k}}{Y_{1k} Y_{2k} Y_{3k}} \right) \right]^{\Delta p}
\end{aligned} \tag{45}$$

4.2 In Serie geschaltete symmetrische Vierpole  
Zueinander in Beziehung zu setzen sind die Anordnungen

Fig. 4 und Fig. 6 mit den für symmetrische Vierpole vereinfachten Matrizen (9) mit negativen Kernwiderständen und (28):

$$\begin{pmatrix} W_{11} + W_{11} & -M_3 & -M_2 \\ -M_3 & W_{11} + W_{11} & -M_1 \\ -M_2 & -M_1 & W_{11} + W_{11} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Delta r} \begin{pmatrix} \frac{|W_1| + W_{11}(W_{11} + W_{11})}{W_{11} + W_{11} + W_{11}} & -\frac{M_1 M_2}{W_{11} + W_{11} + W_{11}} & -\frac{M_1 M_3}{W_{11} + W_{11} + W_{11}} \\ -\frac{M_1 M_2}{W_{11} + W_{11} + W_{11}} & \frac{|W_2| + W_{11}(W_{11} + W_{11})}{W_{11} + W_{11} + W_{11}} & -\frac{M_2 M_3}{W_{11} + W_{11} + W_{11}} \\ -\frac{M_1 M_3}{W_{11} + W_{11} + W_{11}} & -\frac{M_2 M_3}{W_{11} + W_{11} + W_{11}} & \frac{|W_3| + W_{11}(W_{11} + W_{11})}{W_{11} + W_{11} + W_{11}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Delta r} \quad (46)$$

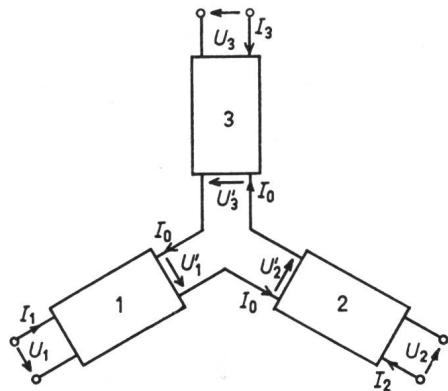


Fig. 6  
Sternserieschaltung von drei Vierpolen mit negativen Kernwiderständen

Die daraus zu entwickelnden Formeln entsprechen den Beziehungen (38) bis (45), so dass auf die Wiedergabe verzichtet werden kann.

#### Literatur

- [1] W. Cauer: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. 2. Auflage. Berlin, Akademie-Verlag, 1954.
- [2] W. Herzog: Strenge Weichen hoher Trennstielheit. Arch. Elektrotechn. 50(1965)1, S. 60...64.
- [3] W. Herzog: Die Vierpolbrücke. Bull. SEV 60(1969)13, S. 580...584.
- [4] W. Herzog: Zur Umwandlung des n-Ecks in einen n-strahligen Stern. Bull. SEV 60(1969)8, S. 352...354.

#### Adresse des Autors:

Prof. Dr. phil., Dr.-Ing. W. Herzog, Direktor des Institutes für Elektrotechnik der Universität Mainz, Anselm-Franz-v.-Bentzel-Weg 12, D-6500 Mainz.