

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

**Band:** 58 (1967)

**Heft:** 4

**Artikel:** Der Schwaigersche Ausnutzungsfaktor grundlegender translatorischer und rotatorischer Elektrodensysteme

**Autor:** Prinz, H. / Singer, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-916224>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

Gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV)  
und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)

## Der Schwaigersche Ausnutzungsfaktor grundlegender translatorischer und rotatorischer Elektrodensysteme

Von *H. Prinz* und *H. Singer*, München

621.3.035.2

### 1. Einleitung

Vor nunmehr 45 Jahren hat *A. Schwaiger*, damals noch Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe, in einem bemerkenswerten Beitrag zur elektrischen Festigkeitslehre [8]<sup>1)</sup> den Begriff des Ausnutzungsfaktors in die Hochspannungstechnik eingeführt, wohl mit dem klaren Ziele, auf diese Weise die elektrische Feldgüte oder Feldqualität eines Elektrodensystems, die für die elektrische Beanspruchbarkeit des im Feldsystem liegenden Isolierstoffes von entscheidender Bedeutung ist, sinnvoll zu kennzeichnen und darüber hinaus geometrisch verschiedenartig geformte Elektrodensysteme gegeneinander abwägbar und damit vergleichbar zu machen. Es ist einleuchtend, dass eine derartige Güte-Klassifizierung von Elektrodenanordnungen nicht nur vom wissenschaftlichen Standpunkt, sondern auch aus der Sicht ihrer praktischen Nützlichkeit von Interesse ist, insbesondere wenn bedacht wird, welche Bedeutung dem elektrischen Feld als entscheidender Bestimmungsgröße für die Auslegung von Hochspannungs-Anlagen und -Geräten im Rahmen einer bereits heute praktizierten Hochspannungstechnik beizumessen ist und welche noch weitgehendere Bedeutung der Feldgüte für die zukünftige Planung von Höchstspannungs-Übertragungsanlagen zugesprochen werden muss, worauf der Erstverfasser in einer kürzlichen Arbeit dieser Zeitschrift [19] nachdrücklich hingewiesen hat.

Eine Durchsicht der einschlägigen Literatur der letzten Jahrzehnte lässt jedoch erkennen, dass zur Thematik der exakten Berechnung des Ausnutzungsfaktors von Feldsystemen keine bedeutsamen Fortschritte erzielt worden sind.

Ziel der vorliegenden Arbeit soll es deshalb sein, die Ausnutzungsfaktoren einiger grundlegender Elektrodensysteme, die durch Translation oder Rotation von Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln gegebenenfalls unter Hinzuziehung ebener Elektroden gebildet sein können, exakt zu berechnen, wobei die bereits von *A. Schwaiger* [8] behandelten Kreis-Systeme mit zum Vergleich herangezogen werden sollen. Der Vorteil dieser exakten Berechnung des Ausnutzungsfaktors aus der Laplaceschen Potentialgleichung gegenüber den bisher bekannt gewordenen Näherungsverfahren — sei es durch graphische [17] oder numerische Approximation [18] — ist vor allem darin zu suchen, dass auch im Falle stark inhomogener Felder, wie sie in der Praxis fast durchweg anzutreffen sind, der Punkt grösster Feldkonzentration, der bekanntlich für die Ermitt-

lung des Ausnutzungsfaktors entscheidend ist, mit einem beliebigen Genauigkeitsgrad zuverlässig bestimmt werden kann. In dieser Hinsicht ist das Rechenverfahren selbst der experimentellen Ermittlung des Ausnutzungsfaktors, die bei räumlichen Feldern nicht immer ganz einfach zu verwirklichen ist, vor allem wegen der endlichen Abmessungen der einzubringenden Meßsonde zweifellos überlegen.

### 2. Definition und Berechnung des Ausnutzungsfaktors

Für ein vorgegebenes Elektrodensystem kann der Ausnutzungsfaktor zumeist aus dem Formeltyp A:

$$\eta = \frac{U}{|E_{\max}| a_i} 100$$

berechnet werden, wenn  $U$  die an das Elektrodensystem angelegte Spannung,  $|E_{\max}|$  den Absolutbetrag der im Feldsystem auftretenden maximalen Feldstärke und  $a_i$  den Elektrodenabstand bedeuten. Nachdem  $U/a_i$  als die Feldstärke eines gedachten Homogenfeldes gedeutet werden kann, an das bei gleichem Plattenabstand  $a_i$  die Spannung  $U$  angelegt werde, kann bei nicht vorgegebenem Elektrodenabstand der Ausnutzungsfaktor auch aus dem Formeltyp B:

$$\eta = \frac{E_{\text{homogen}}}{|E_{\max}|} 100$$

ermittelt werden, wenn die Höchstfeldstärke auf die Homogenfeldstärke des gedachten Plattenfeldes bezogen wird. Demnach ist der Ausnutzungsfaktor ein Mass für die Feldgüte, indem er angibt, welche prozentuale Qualität ein elektrisches Feldsystem im Vergleich zum Homogenfeld beinhaltet, für das  $\eta = 100\%$  gesetzt wird. Für eine Maßstaborientierung sei in diesem Zusammenhang erwähnt, dass bei Kabeln im allgemeinen mit einer Feldgüte von 50...70%, bei Freileitungen dagegen nur mit Feldgüten von einigen Prozenten gerechnet werden kann. In der Hochspannungstechnik nicht erwünschte Kanten müssen gemäss Formeltyp B eine Feldgüte von Null Prozent haben, da die Feldstärke an kantigen Elektroden stets unendlich gross wird.

Soweit es sich um die  $\eta$ -Berechnung der in dieser Arbeit untersuchten Elektrodensysteme handelt, genügte stets der Formeltyp A, wozu allerdings die jeweils im Feldsystem auftretende maximale elektrische Feldstärke ermittelt werden musste. Nachdem sowohl translatorische als auch rotatorische Systeme analysiert worden sind, ist für die Bestimmung von

<sup>1)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

$E_{\max}$  stets von der Möglichkeit Gebrauch gemacht worden, das zu behandelnde Elektrodensystem in dem jeweils dazu passenden Koordinatensystem abzubilden, also beispielsweise ein Ellipsenkabel in Form ellipsenzylindrischer Koordinaten oder das Feld zweier konfokaler Ellipsoide in gestreckten Ellipsoid-Koordinaten. In gleicher Weise sind die Hyperbel-Systeme und in analoger Darstellung die Parabel-Systeme berechnet worden. Die zum Vergleich herangezogenen Kreis-Systeme wurden bei Translation in üblichen kreiszylindrischen Koordinaten und bei Rotation in Kugelkoordinaten analysiert. Eine Zusammenstellung der dazu notwendigen Ausgangsformeln findet sich in dem ausgezeichneten «Field Theory Handbook» von *Moon/Spencer* [16], das in einem weiteren Buche [15] der gleichen Autoren mit Beispielen kommentiert ist.

Interessanterweise ist das Prinzip einer Koordinatenanpassung an die Begrenzungsoberfläche des zu berechnenden Elektrodensystems — also die Verwendung von Ellipsen-Koordinaten, wenn das Elektrodensystem von Ellipsen begrenzt wird — schon über ein Jahrhundert bekannt: In jener Zeit ist von einer Reduktion der Laplaceschen Potentialgleichung die Rede gewesen, wenn die partielle Differentialgleichung in drei gewöhnliche, also einfachabhängige Differentialgleichungen aufgespalten werden sollte. Das heute als Separation der Variablen bekannte Rechenverfahren mit Koordinatentransformation ist für rotatorische Gebilde erstmals in einer 1864 erschienenen Arbeit [3] von *Carl Gottfried Neumann*, damals Professor der Mathematik an der Universität Leipzig, vorgeschlagen worden unter Hinweis auf [2] sowie auf die vorausgegangenen Arbeiten [1] von *Gabriel Lamé*, Professor für Mathematik und Physik in Paris. Späterhin haben *Albert Wangerin* [4; 5], *Maxime Bôcher* [7], *Paul Stäckel* [6] und *Luther Pfahler Eisenhart* [9; 10] in entscheidender Weise mit dazu beigetragen, die mathematischen Zusammenhänge einer Koordinatentransformation zu klären und im Hinblick auf eine breitere Anwendbarkeit zu überprüfen. Der entscheidende Schritt in dieser Richtung blieb jedoch *Parry Moon*, Professor der Elektrotechnik am Massachusetts Institute of Technology und *Domina Eberle Spencer*, Professorin für Mathematik an der Universität Connecticut vorbehalten. In einer Reihe mathematisch bemerkenswerter Arbeiten [12; 13; 14] untersuchten sie die für eine Separation notwendigen Bedingungen rotatorischer Systeme, insbesondere auch im Hinblick auf eine mögliche R-Separierbarkeit und verfassten auf Grund ihrer weitreichenden Erfahrungen die beiden bereits erwähnten Bücher, die manchem Hochspannungstechniker bereits zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden sind.

### 3. Berechnungsbeispiel

Unter Zugrundelegung der Ellipsengeometrie soll nunmehr gezeigt werden, wie elegant sich transformierte Koordinaten für eine  $\eta$ -Berechnung heranziehen lassen.

Zunächst sei der translatorische Fall behandelt: Vorgegeben sei ein Ellipsenkabel, bestehend aus zwei konfokalen Ellipsen  $\eta_1$  und  $\eta_{II}$  als Innenleiter und geerdeten Bleimantel<sup>2)</sup>. Der zwischen beiden Ellipsen vorhandene kleinstmögliche Elektrodenabstand sei  $a_1$ . Unter Zugrundelegung des für die Lösung bestgeeigneten ellipsenzylindrischen Koordinatensystems ( $\eta$ ,  $\psi$ ,  $z$ ) wird nach Seite 19 von [16] für das Potential  $\Phi^3)$ , das

<sup>2)</sup>  $\eta_1$  und  $\eta_{II}$  als Begrenzungskoordinaten stehen in keinem Zusammenhang mit dem zu berechnenden Ausnutzungsfaktor  $\eta$ !

<sup>3)</sup> Anstelle von  $\varphi$  sei  $\Phi$  als Potential gesetzt.

von  $(\psi, z)$  unabhängig ist  $d^2 \Phi / d \eta^2 = 0$  und als Lösung  $\Phi = A + B\eta$ . Mit den Grenzwerten  $\eta_1$  für  $\Phi = U$  und  $\eta_{II}$  für  $\Phi = 0$  lautet die Partikulärlösung:

$$\Phi = \frac{U}{\eta_1 - \eta_{II}} (\eta - \eta_{II})$$

Mit der Gradientformel nach Seite 18 von [16] wird für die Feldstärke

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi = -\frac{1}{a \sqrt{\cosh^2 \eta - \sin^2 \psi}} a_\eta \frac{d \Phi}{d \eta}$$

mit  $a_\eta$  als dem Einheitsvektor in Richtung von  $\eta$ , oder nach Einsetzen von  $d\Phi/d\eta$  und  $a_\eta = a (\cosh \eta_{II} - \cosh \eta_1)$  folgt für den Punkt grösster Feldbeanspruchung ( $\psi = 0$ ):

$$|\mathbf{E}_{\max}| = \frac{U}{a(\eta_{II} - \eta_1) \sinh \eta_1}$$

Und damit wird für den Ausnutzungsfaktor gemäss Formeltyp A:

$$\eta_{\text{trans}} = \frac{(\eta_{II} - \eta_1) \sinh \eta_1}{\cosh \eta_{II} - \cosh \eta_1}$$

sowie nach Substitution der Ellipsengeometrie ( $a$  als halber Brennpunktsabstand,  $\alpha_1$  und  $\alpha_{II}$  als grosse Ellipsenhalbachsen):

$$\eta_{\text{trans}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{a}\right)^2 - 1}}{\frac{\alpha_{II}}{a} - \frac{\alpha_1}{a}} \left( \operatorname{arcosh} \frac{\alpha_{II}}{a} - \operatorname{arcosh} \frac{\alpha_1}{a} \right)$$

Als Parameter erscheinen die beiden Halbachsen-Verhältnisse  $\alpha_1/a$  und  $\alpha_{II}/a$ , so dass  $\eta_{\text{trans}} = f(\alpha_1/a)$  mit  $\alpha_{II}/a$  darstellbar ist.

In analoger Weise kann im rotatorischen Falle verfahren werden: Nach Seite 30 von [16] folgt mit den Koordinaten  $(\eta, \theta, \psi)$  des gestreckten Ellipsoids und dem Potential  $\Phi$  unabhängig von  $(\theta, \psi)$ :

$$\frac{d^2 \Phi}{d \eta^2} + \coth \frac{d \Phi}{d \eta} = 0$$

und als allgemeine Lösung

$$\Phi = A + B \ln \coth \frac{\eta}{2}$$

Mit den Grenzen  $\eta_1$  für  $\Phi = U$  und  $\eta_{II}$  für  $\Phi = 0$  wird als Partikulärlösung:

$$\Phi = U \frac{\ln \coth \frac{\eta}{2}}{\ln \coth \frac{\eta_1}{2}}$$

Unter Verwendung der Gradientenformel gemäss Seite 28 von [16] ergibt sich dann die elektrische Feldstärke zu:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi = -\frac{1}{a \sqrt{\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta}} a_\eta \frac{d \Phi}{d \eta}$$

und der Absolutbetrag der maximalen elektrischen Feldstärke:

$$|\mathbf{E}_{\max}| = \frac{U}{a \sinh^2 \eta_1 \cdot \ln \coth \frac{\eta_1}{2}}$$

woraus für den Ausnutzungsfaktor nach Formeltyp A folgt:

$$\eta_{\text{rot}} = \frac{\left[ \left( \frac{\alpha_1}{a} \right)^2 - 1 \right] \ln \left[ \frac{\frac{\alpha_1}{a} - 1}{\frac{\alpha_{II}}{a} - 1} \sqrt{\frac{\left( \frac{\alpha_{II}}{a} \right)^2 - 1}{\left( \frac{\alpha_1}{a} \right)^2 - 1}} \right]}{\frac{\alpha_{II}}{a} - \frac{\alpha_1}{a}}$$

	1.1 Kreiszylindrisches Kabel Konzentrische Kugeln		$\eta_{\text{trans}} = \frac{\ln \frac{r_{II}}{r_I}}{\frac{r_{II}}{r_I} - 1} \quad \eta_{\text{rot}} = \frac{1}{\frac{r_{II}}{r_I}}$
Kreise	1.2 Kreiszylinder/Ebene Kugel/Ebene		$\eta_{\text{trans}} = \frac{2 g_1 \cdot \ln g_1}{g_1^2 - 1} \quad \text{mit } g_1 = \frac{a_I + r_I}{r_I} + \sqrt{\frac{(a_I + r_I)^2}{r_I^2} - 1}$ $\eta_{\text{rot}} = \frac{\sinh \eta_I}{\sqrt{2}(\cosh \eta_I - 1)\sqrt{\cosh \eta_I + 1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot A_n \left[ \frac{1}{2} \sinh \eta_I + \left(n + \frac{1}{2}\right)(\cosh \eta_I + 1) \coth \left(n + \frac{1}{2}\right) \eta_I \right]} \quad \text{mit } \begin{cases} \cosh \eta_I = \frac{a_I + r_I}{r_I} \\ A_n = e^{-(n+1/2)\eta_I} \end{cases}$
	1.3 Kreiszylinder nebeneinander Kugeln gegeneinander		Wie 1.2; jedoch ist an Stelle von $a_I$ der halbe Abstand des zu berechnenden Elektrodensystems einzusetzen
Ellipsen	2. Ellipsenkabel Konfokale Ellipsoide		$\eta_{\text{trans}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\alpha_I}{a}\right)^2 - 1}}{\frac{\alpha_{II}}{a} - \frac{\alpha_I}{a}} \left( \operatorname{arcosh} \frac{\alpha_{II}}{a} - \operatorname{arcosh} \frac{\alpha_I}{a} \right)$ $\eta_{\text{rot}} = \frac{\left[\left(\frac{\alpha_I}{a}\right)^2 - 1\right] \cdot \ln \left[ \frac{\frac{\alpha_I}{a} + 1}{\frac{\alpha_{II}}{a} + 1} \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{\alpha_{II}}{a}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\alpha_I}{a}\right)^2 - 1}} \right]}{\frac{\alpha_{II}}{a} - \frac{\alpha_I}{a}}$
	3.1 Hyperbelschneide/ Ebene Hyperboloidspitze/ Ebene		$\eta_{\text{trans}} = \tan \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{arcot} \left( \tan \frac{\gamma}{2} \right)$ $\eta_{\text{rot}} = \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} \cdot \ln \left( \cot \frac{\gamma}{4} \right)$
Hyperbeln	3.2 Hyperbelschneiden gegeneinander Hyperboloidspitzen gegeneinander		Wie 3.1
Parabeln	4. Parabelzylinder gegeneinander Paraboloide gegeneinander		$\eta_{\text{trans}} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\alpha_{II}}{\alpha_I}}} \quad \eta_{\text{rot}} = \frac{\ln \frac{\alpha_{II}}{\alpha_I}}{\frac{\alpha_{II}}{\alpha_I} - 1}$

Als Parameter erscheinen, wie im translatorischen Falle, die Halbachsen-Verhältnisse  $\alpha_I/a$  und  $\alpha_{II}/a$ , so dass  $\eta_{rot} = f(\alpha_I/a)$  mit Parameter  $\alpha_{II}/a$  wiederum darstellbar ist.

In analoger Weise kann bei der Berechnung der translatorischen und rotatorischen Ausnutzungsfaktoren von Hyperbel- und Parabel-Systemen verfahren werden, nachdem die notwendigen Ausgangsformeln ebenfalls aus [16] entnehmbar sind.

#### 4. Die abgeleiteten $\eta$ -Formeln

Die nach der aufgezeigten Berechnungsweise abgeleiteten 6 Formeln zur Ermittlung der Ausnutzungsfaktoren von Ellipsen-, Hyperbel- und Parabel-Systemen wurden unter Einbeziehung der Kreis-Systeme in Tabelle I übersichtlich zusammengestellt, um so den in der Praxis stehenden Hochspannungstechniker in die Lage zu versetzen, die fallweise erforderliche Formel unter kleinstmöglicher Zugriffzeit anwenden zu können. Die Tabelle enthält jeweils in der ersten Zeile den translatorischen Ausnutzungsfaktor  $\eta_{trans}$  des betreffenden Elektrodensystems und in der zweiten Zeile den dazugehörigen rotatorischen Ausnutzungsfaktor  $\eta_{rot}$ . Eingereiht wurden insgesamt  $7 \times 2$  Elektrodensysteme und zwar  $3 \times 2$  Kreis-Systeme,  $1 \times 2$  Ellipsen-Systeme,  $2 \times 2$  Hyperbel-Systeme und  $1 \times 2$  Parabel-Systeme. Die zu jedem Elektrodensystem gezeichnete Skizze lässt erkennen, was unter den in den Formeln vorkommenden Formgrößen zu verstehen ist. Im Hinblick auf die Anwendbarkeit der aus der Potentialtheorie bekannten Spiegelung wurde auf eine Wiedergabe der Formen unter 1.3 und 3.2 verzichtet, nachdem für diese beiden Fälle die Formeln von 1.2 und 3.1 benutzt werden können, wenn anstelle von  $a_i$  der halbe Elektrodenabstand des zu berechnenden Elektrodensystems eingesetzt wird. Schliesslich sei noch bemerkt, dass der Ausnutzungsfaktor der Hyperbel-Systeme lediglich vom Schneidwinkel  $\gamma$  abhängig ist, wenn gleich bedacht werden sollte, dass zu jedem  $\gamma$  eine unendliche Anzahl von Hyperbeln gehört, entsprechend der Umrechnungsformel  $a_i/a = \cos\gamma/2$  für 3.1 und  $\frac{a_i/2}{a} = \cos\frac{\gamma}{2}$  für 3.2.

#### 5. Rechenwerte

Die abgeleiteten Formeln gewinnen an Wert durch eine numerische Auswertung über einen technisch interessierenden Anwendungsbereich. Aus dieser Sicht wurde mit Hilfe eines Digitalrechners der Typ TR 4 des Rechenzentrums der Bayrischen Akademie der Wissenschaften eine sinnvoll abgestimmte Werterreihe berechnet und in Tabelle II zusammengestellt, um so dem Leser selbst die Möglichkeit zu bieten, die errechneten Ausnutzungsfaktoren in Kurvenform darzustellen.

Im einzelnen ist zu diesen Zahlenwerten folgendes zu bemerken: Für die Kreis- und Parabel-Systeme wurden die Parametergrößen zwischen 1 und 1000 gewählt, für die Hyperbel-Systeme zwischen 1 und 90°. Während bei diesen Elektrodenanordnungen die Ausnutzungsfaktoren nur von einer Grösse abhängen, mussten bei den Ellipsen-Systemen zwei voneinander unabhängige Variable  $\frac{\alpha_I}{a}$  und  $\frac{\alpha_{II}}{a}$  berücksichtigt werden. Deshalb haben sich für Ellipsen nicht nur zwei Kurven, sondern zwei Kurvenscharen ergeben, die allerdings bei grossen  $\eta$ -Werten auf zwei Kurven zusammenlaufen. Wie aus Tabelle I weiterhin ersichtlich ist, wird  $\eta_{rot}$  im Fall 1.2 aus einer unendlichen Summe gebildet. Die Grösse der Glieder dieser Summe nimmt mit steigendem  $n$  ab, weshalb die Summation abgebrochen wurde, wenn das  $(n+1)$ -te Glied kleiner als das  $10^{-5}$ -fache der Summe der ersten  $n$  Glieder war. Mit steigendem  $\frac{a_i + r_I}{r_I}$  wurden so immer weniger Glieder berücksichtigt. Während beispielsweise bei einem Wert von 1,01 noch 105 Glieder zu berechnen waren, konnte die Summation bei 1000 schon nach 2 Gliedern abgebrochen werden.

Um dem Leser einen Eindruck von dem ungefähren  $\eta$ -Verlauf zu vermitteln, wurden die Ausnutzungsfaktoren wenigstens einer Ellipsenschar in linearem Maßstab in Fig. 1 sowie jene von Hyperbel-Systemen in doppellogarithmischem Maßstab in Fig. 2 dargestellt.

Besonders beeindruckend ist die exakte Vorausberechenbarkeit von Hyperboloidspitzen, die selbst in Nadelform noch

Rechenwerte der abgeleiteten Formeln

Tabelle II

Kreise						Ellipsen				Hyperbeln				Parabeln		
1.1		1.2				2				3.1				4		
$\frac{r_{II}}{r_I}$	$\eta_{trans}$ %	$\eta_{rot}$ %	$\frac{a_i + r_I}{r_I}$	$\eta_{trans}$ %	$\eta_{rot}$ %	$\frac{\alpha_{II}}{a}$	$\frac{\alpha_I}{a}$	$\eta_{trans}$ %	$\eta_{rot}$ %	$\frac{\gamma}{2}$ Grad	$\eta_{trans}$ %	$\eta_{rot}$ %	$\frac{\alpha_{II}}{\alpha_I}$	$\eta_{trans}$ %	$\eta_{rot}$ %	
1	100	100	1	100	100	1,40	93,48	87,51	90	100	100	100	1	100	100	
2	69,31	50,00	1,5	86,08	73,58	1,20	75,19	57,82	70	95,91	92,01	92,01	2	82,84	69,31	
3	54,93	33,33	2	76,03	56,49	1,10	59,44	37,67	50	83,20	69,65	69,65	3	73,21	54,93	
5	40,24	20,00	3	62,32	37,35	1,05	46,07	23,96	30	60,46	38,02	38,02	5	61,80	40,24	
7	32,43	14,29	5	46,79	21,72	1,00	0	0	20	44,47	21,60	21,60	7	54,86	32,43	
10	25,58	10,00	7	38,02	15,21	1,90	96,55	93,25	10	24,62	7,46	7,46	10	48,05	25,58	
20	15,77	5,00	10	30,08	10,47	1,60	84,30	71,71	7	17,79	4,18	4,18	20	36,55	15,77	
30	11,73	3,33	20	18,46	5,12	1,40	73,48	55,45	5	12,98	2,39	2,39	30	30,88	11,73	
50	7,98	2,00	30	13,65	3,39	1,20	57,59	35,73	3	7,96	1,00	1,00	50	24,78	7,98	
70	6,16	1,43	50	9,21	2,02	1,10	44,47	22,70	2	5,36	0,49	0,49	70	21,35	6,16	
100	4,65	1,00	70	7,06	1,44	1,05	33,77	14,11	1	2,71	0,14	0,14	100	18,18	4,65	
200	2,66	0,50	100	5,30	1,00	1,00	0	0					200	13,21	2,66	
300	1,91	0,33	200	3,00	0,50	1,90	83,36	70,20					300	10,92	1,91	
500	1,25	0,20	300	2,13	0,33	1,60	72,14	53,65					500	8,56	1,25	
700	0,94	0,14	500	1,38	0,20	1,40	62,33	41,21					700	7,28	0,94	
1000	0,69	0,10	700	1,03	0,14	1,20	48,19	26,24					1000	6,13	0,69	
			1000	0,76	0,10	1,10	36,77	16,48								
						1,05	27,64	10,13								
						1,00	0	0								

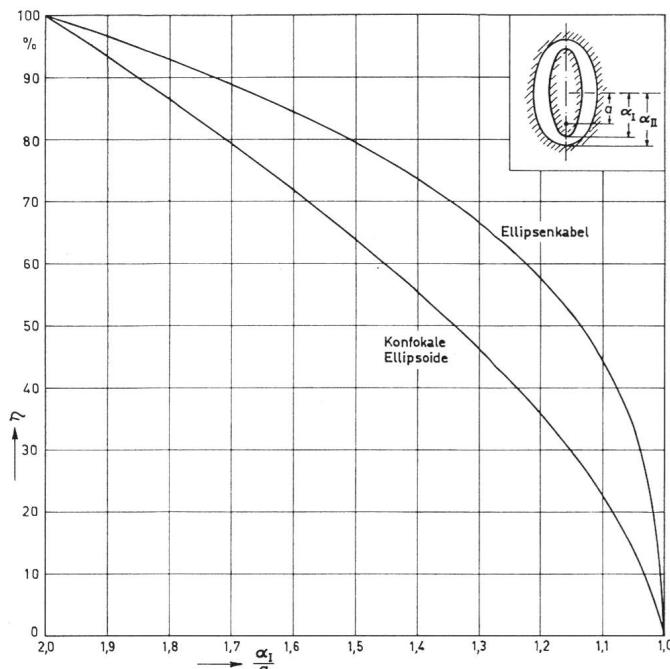


Fig. 1

Ausnutzungsfaktor  $\eta$  von Ellipsen-Elektroden in Abhängigkeit von  
 $\frac{\alpha_1}{a}$  für  $\frac{\alpha_{II}}{a} = 2$

durch einen angebbaren Ausnutzungsfaktor definiert sind. So wurden in Fig. 3 zwei Hyperboloid spitzen mit einem Schneidewinkel von  $6^0$  bei einem Elektrodenabstand von 100 mm im Maßstab 1 : 3 abgebildet. Der dazugehörige Ausnutzungsfaktor ergibt sich nach Tabelle II zu 1 %. Im Hinblick auf die exakte Felddefinierbarkeit solcher Hyperbolelektroden wäre zu wünschen, dass die Hyperboloidspitze innerhalb von Stabelektroden anstelle der bisher verwendeten kantigen oder auch anderer nicht reproduzierbarer Formen in der Experimentierkunst einer zukünftigen Hochspannungstechnik Eingang fände. Ein derartiges Konzept würde sicherlich dazu beitragen, die bei Stabelektroden beobachtete Streuung der Ansprechwerte zu mindern und so untereinander besser vergleichbar zu machen.

###### 6. Berechenbarkeit von $\eta_{\text{rot}}$ aus $\eta_{\text{trans}}$

Die vorliegende Arbeit ist in nicht unwesentlichem Masse durch die Vermutung initiiert worden, dass es möglich sein sollte, den bei Rotation eines Kurvensystems zu erwartenden Ausnutzungsfaktor aus dem bei translatorischer Bewegung des gleichen Kurvenstückes sich ergebenden Ausnutzungsfaktor zu ermitteln. Nach Meinung der Verfasser würde ein solcher Zusammenhang zwischen  $\eta_{\text{rot}}$  und  $\eta_{\text{trans}}$  wesentlich dazu beitragen, Anhaltspunkte für die Feldqualität neuer rotatorischer Elektrodensysteme zu bekommen, sofern das dazugehörige translatorische Elektrodensystem vorher berechnet worden ist. Für das Aufsuchen einer solchen Abhängigkeit würde auch die Tatsache sprechen, dass es erfahrungsgemäß wesentlich einfacher ist, ein translatorisches, also zweidimensionales Feldsystem, beispielsweise unter Zuhilfenahme der konformen Abbildungsgesetze zu berechnen, als ein rotatorisches Feldsystem, selbst unter der Annahme einer zumeist vorgegebenen Rotations-Symmetrie.

Einen ersten Ansatz in dieser Richtung machte A. Bouwers [11], indem er versuchte, den Ausnutzungsfaktor von Kugelfunkenstrecken aus dem Ausnutzungsfaktor zweier gleich

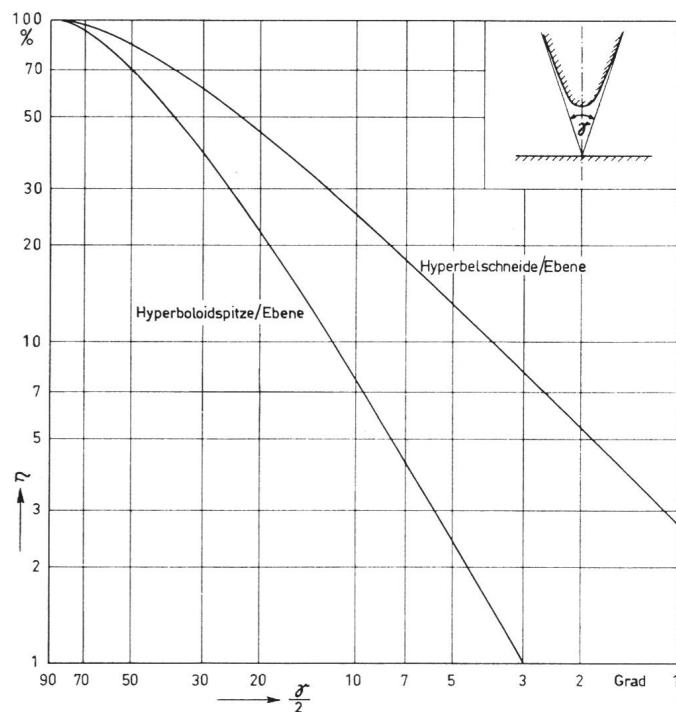
grosser Zylinder zu berechnen. Er kommt dabei zu dem Schluss, dass für nahezu homogene Feldsysteme, wie sie bei Kugelfunkenstrecken im allgemeinen erwartet werden dürfen, näherungsweise

$$\eta_{\text{Kugel}} \approx \eta^2_{\text{Zylinder}}$$

erfüllt ist, was für eine  $\eta^2$ -Abhängigkeit spricht. Auch die Bemühungen der Verfasser waren zunächst auf eine solche Abhängigkeit ausgerichtet, ohne allerdings von dem Bouwerschen Ansatz gewusst zu haben. Dabei zeigte sich sehr bald, dass das  $\eta^2$ -Gesetz auch für die in dieser Arbeit untersuchten Elektrodensysteme nur im Bereichen nahezu homogener Felder Gültigkeit besitzt und mehr und mehr an Wert verliert, je inhomogener das betreffende Feldsystem wird. Anderseits sind Homogenfelder in der Praxis nur selten anzutreffen, so dass es reizvoll erschien, den fraglichen Zusammenhang, insbesondere im Bereichen stark inhomogener Felder zu untersuchen. Eine in dieser Hinsicht vorgenommene Analyse zeigte, dass es zwar möglich ist, für eine vorgegebene Kurvengeometrie einen eindeutigen Zusammenhang zwischen rotatorischem und translatorischem Ausnutzungsfaktor über die Beziehung:

$$\eta_{\text{rot}} = \eta^n_{\text{trans}}$$

herzustellen, dass aber der Exponent  $n$  selbst wieder von  $\eta_{\text{trans}}$  und auch von der Art des Elektrodensystems abhängig ist, so dass mit Hilfe eines solchen Ansatzes keine schlüssige Aussage über den rotatorischen Ausnutzungsfaktor gemacht werden kann. Ganz allgemein war im Bereichen der analysierten Kreis-, Ellipsen-, Hyperbel- und Parabel-Systeme erkennbar, dass der Exponent mit abnehmender Feldgüte kleiner wird — etwa bis zu  $n = 1,4$  — was bedeutet, dass ein rotatorisches Feldsystem, das aus einem translatorischen Elektrodensystem gleicher Kurvenbegrenzung, aber schlechter Feldgüte gewonnen wurde, doch nicht so schlecht ist, als nach dem  $\eta^2$ -Gesetz erwartet werden müsste. Wenn demnach für eine überschlägige Berechnung der rotatorischen Feldgüte mit dem Quadrat der



Ausnutzungsfaktor  $\eta$  von Hyperbel-Elektroden in Abhängigkeit des halben Schneidewinkels  $\gamma$

entsprechenden translatorischen Feldgüte gerechnet wird, so würde der Rechner die Beruhigung haben können, mit seinen Ergebnissen stets auf der sicheren Seite zu sein.

Wenngleich eine solche Aussage für eine überschlägige Projektierung durchaus angebracht sein kann, so befriedigt sie doch nicht. Es wurde deshalb ein zweiter Ansatz in der Richtung versucht, die rotatorischen Ausnutzungsfaktoren in Abhängigkeit von den dazugehörigen translatorischen darzustellen. Das Ergebnis ist in Fig. 4 dargestellt: Überraschenderweise fallen die einzelnen Rechenwerte, trotz des grossen Parameterbereiches und der Verschiedenartigkeit der betrachteten Geometrie, in ein verhältnismässig schmales Band, so dass die Möglichkeit besteht, wenigstens für die hier erörterten Elektrodensysteme den rotatorischen Ausnutzungsfaktor mit

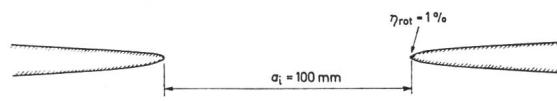


Fig. 3  
Hyperboloidspitzen gegeneinander für  $60^\circ$  Schneidewinkel und 100 mm  
Elektrodenabstand  
Rotatorischer Ausnutzungsfaktor 1 %

guter Näherung zu ermitteln. Natürlich müsste es Gegenstand weiterer Untersuchungen sein, inwieweit diese Kurvenabhängigkeit auch für andere Elektrodensysteme Gültigkeit besitzt.

### 7. Vergleich translatorischer und rotatorischer Elektroden-Systeme untereinander

Zum Abschluss mag noch die Frage von Interesse sein, wie die Feldgüte von Ellipsen-, Hyperbel- und Parabel-Systemen im Vergleich zu den bekannten Kreis-Systemen beurteilt werden kann. Zu diesem Zwecke musste ein für alle Systeme definierbarer Parameter geschaffen werden, der sich in Anlehnung an die von A. Schwaiger eingeführte geometrische Charakteristik [8] in Form des Ausdrückes  $\frac{a_i + \varrho}{\varrho}$  (mit  $a_i$  als dem Elektrodenabstand und  $\varrho$  als dem Krümmungsradius),

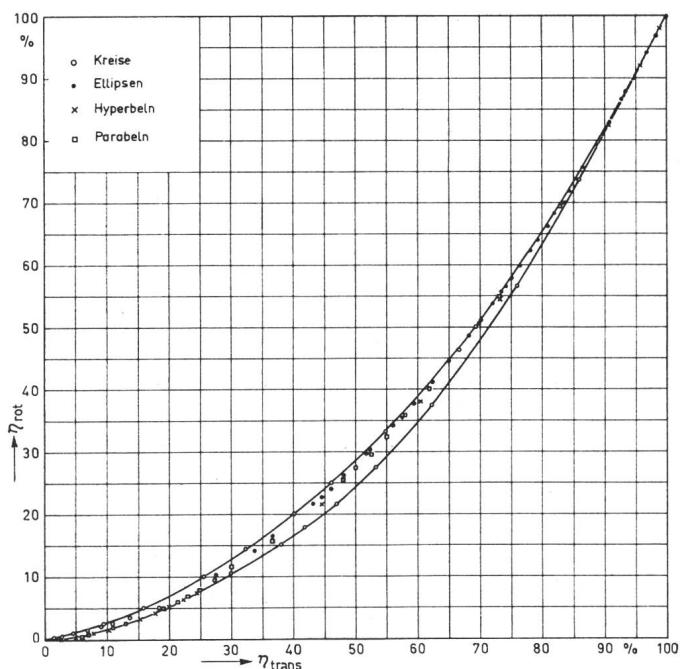


Fig. 4  
Ausnutzungsfaktor  $\eta_{rot}$  in Abhängigkeit vom Ausnutzungsfaktor  $\eta_{trans}$   
für Kreis-, Ellipsen-, Hyperbel- und Parabel-Elektroden

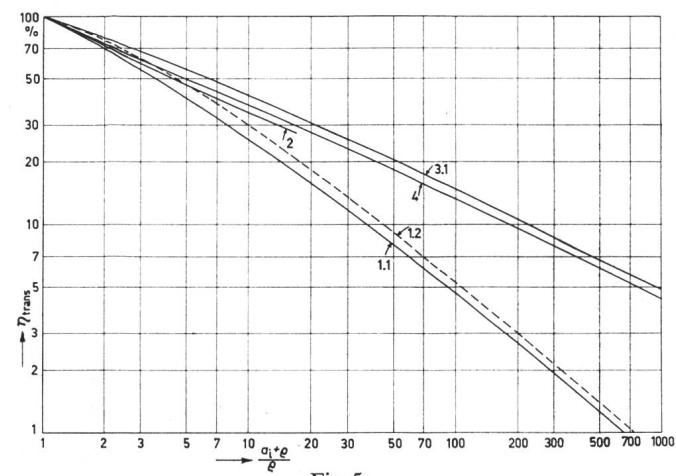


Fig. 5  
Ausnutzungsfaktor  $\eta_{trans}$  abhängig von der geometrischen Charakteristik  
 $\frac{a_i + \varrho}{\varrho}$  mit  $a_i$  als Elektrodenabstand und  $\varrho$  als Krümmungsradius  
1.1 Kreiszylindrisches Kabel; 1.2 Kreiszylinder/Ebene; 2 Ellipsenkabel; 3.1 Hyperbelschneide/Ebene; 4 Parabelzylinder gegeneinander

als besonders zweckmässig erwiesen hat. Für die so in Ausnutzungsfaktoren unter Zuhilfenahme der in Tabelle III zusammengestellten Formeln auf den neuen Parameter umgerechnet und dann in Fig. 5 für translatorische und in Fig. 6 sicht genommene Darstellung wurden deshalb die berechneten für rotatorische Systeme dargestellt. Wie zu erwarten war, ist der Unterschied im Homogenitätsbereich nur sehr gering. Mit zunehmender geometrischer Charakteristik, also geringer werdender Feldgüte, setzten sich jedoch die  $\eta$ -Kurven der neu berechneten Systeme von den konventionellen Kreis-Systemen ab, und zwar bei translatorischen Systemen stärker als bei rotatorischen. Trotzdem bleibt beispielsweise eine nadelförmige Hyperboloidspitze immer noch besser als eine «Kugelspitze» gleicher geometrischer Charakteristik, was auch im Hinblick auf die feldentlastende Wirkung der ausgedehnten Elektrodenverlängerung eines Hyperboloid-Systems erklärliech ist. Die Kurven für die Ellipsensysteme enden ungefähr bei  $\eta_{trans} = 27\%$  bzw.  $\eta_{rot} = 10\%$ , da für  $\frac{a_i}{\varrho}$  nur Werte zwischen 1 und 2 berücksichtigt wurden und  $\frac{a_{II}}{a}$  im Bereich von 1,5...2,5 lag.

### Formeln zur Berechnung von Ausnutzungsfaktoren

Tabelle III

Elektrodensystem	$\frac{a_i + \varrho}{\varrho}$	
	1.1	1.2
Kreise	$\frac{r_{II}}{r_I}$	$\frac{a_i + r_I}{r_I}$
	1.3	Wie 1.2; jedoch ist an Stelle von $a_i$ der halbe Abstand des zu berechnenden Elektrodensystems einzusetzen
	2	$\frac{\alpha_{II} \cdot \alpha_I}{a \cdot a} - 1$ $\left(\frac{\alpha_I}{a}\right)^2 - 1$
Ellipsen	3.1	$1 + \cot^2 \frac{\gamma}{2}$
	3.2	Wie 3.1
Hyperbeln	4	$\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_{II}}{\alpha_I} + 1 \right)$
Parabeln		

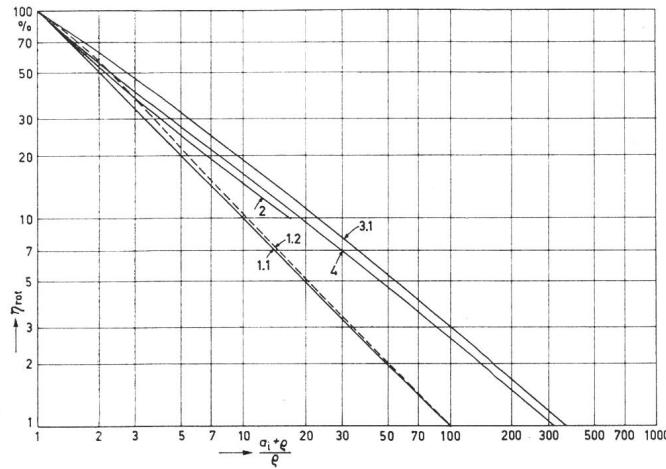


Fig. 6

**Ausnutzungsfaktor  $\eta_{\text{rot}}$  abhängig von der geometrischen Charakteristik  $\frac{a_i + \rho}{\rho}$  mit  $a_i$  als Elektrodenabstand und  $\rho$  als Krümmungsradius**

1.1 konzentrische Kugeln; 1.2 Kugel/Ebene; 2 konfokale Ellipsoide;  
3.1 Hyperboloidspitze/Ebene; 4 Paraboloid gegeneinander

## 8. Zusammenfassung und Ausblick

Mit der vorliegenden Arbeit sollte einmal mehr gezeigt werden, welche Möglichkeiten dem in der Praxis stehenden Hochspannungstechniker für die exakte Erfassung der Feldgüte von Elektrodensystemen in der Form geeigneter Koordinatensysteme zur Verfügung stehen. Weiterhin sollte dargelegt werden, wie rotatorische Felder hinsichtlich ihrer Feldqualität mit guter Näherung aus translatorischen Feldern bestimmt werden können und die Ausnutzungsfaktoren der berechneten Systeme über die geometrische Charakteristik  $\frac{a_i + \rho}{\rho}$  miteinander vergleichbar werden.

Es wäre wünschenwert, wenn in dieser Richtung weitergearbeitet würde und noch andere Elektrodensysteme der Rechnung zugänglich gemacht werden könnten, damit dem Hochspannungstechniker im Verlaufe der nächsten Jahre Arbeitsunterlagen zur Verfügung stehen, die ihn befähigen, Elektrodensysteme besser und wirkungsvoller abzuschätzen und erforderlichenfalls auch exakt zu berechnen.

## Literatur

- [1] G. Lamé: Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Mallet-Bachelier, Paris 1859.
- [2] C. Neumann: Allgemeine Lösung des Problemes über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Halle 1862.
- [3] C. Neumann: Theorie der Elektricitäts- und Wärmevertheilung in einem Ringe. Halle 1864.
- [4] A. Wangerin: Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. Preisschriften der fürstlichen Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig. Hirzel, Leipzig 1875.
- [5] A. Wangerin: Über die Reduction der Gleichung
 
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$
 auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Monatsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften (1878)2, S. 152...166.
- [6] P. Stäckel: Über die Integration der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung mittels Separation der Variablen. Habilitationsschrift der philosophischen Fakultät der vereinigten Friedrichs Universität Halle Wittenberg. Halle 1891.
- [7] M. Böcher: Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. Preisschrift und Dissertation, Universität Göttingen 1891.
- [8] A. Schwaiger: Beitrag zur elektrischen Festigkeitslehre, Arch. Elektrotechn. 11(1922)1, S. 41...50.
- [9] L. P. Eisenhart: Separable Systems of Stäckel. Annals of Mathematics, Second Series 35(1934)2, S. 284...305.
- [10] L. P. Eisenhart: Stäckel Systems in Conformal Euclidean Space. Annals of Mathematics, Second Series 36(1935)1, S. 57...70.
- [11] A. Bouwers: Elektrische Höchstspannungen. Springer, Berlin 1939, S. 113.
- [12] P. Moon and D. E. Spencer: Cylindrical and Rotational Coordinate Systems. J. Franklin Inst. 252(1951)10, S. 327...344.
- [13] P. Moon and D. E. Spencer: Separability Conditions for the Laplace and Helmholtz Equations. J. Franklin Inst. 253(1952)6, S. 585...600.
- [14] P. Moon and D. E. Spencer: Recent Investigations of the Separation of the Laplace's Equation. Proceedings of the American Mathematical Society 4(1953)2, S. 302...307.
- [15] P. Moon and D. E. Spencer: Field Theory for Engineers. Van Nostrand, Princeton N. J. 1961.
- [16] P. Moon and D. E. Spencer: Field Theory Handbook, Springer Berlin 1961.
- [17] G. Hilgarth: Näherungsweise Ermittlung des Schwaigerschen Ausnutzungsfaktors. ETZ-A 87(1966)3, S. 107...109.
- [18] P. J. Lawrenson: Numerical Methods. In: D. Vitkovitch: Field Analysis. Experimental and Computational Methods. Van Nostrand, London 1966.
- [19] H. Prinz: Zur Feldberechnung von Höchstspannungs-Übertragungsanlagen. Bull. SEV 57(1966)26, S. 1199...1211.

### Adresse der Autoren:

Prof. Dr. H. Prinz, Direktor des Institutes für Hochspannungs- und Anlagen-technik der Technischen Hochschule München, und Dipl.-Ing. H. Singer, Wissenschaftlicher Assistent am gleichen Institut, Arcisstrasse 21, D - 8 München 2.

## Technologie von tiefgekühlten und supraleitenden Elektromagneten

Gekürzte Fassung<sup>1)</sup> des Vortrages, gehalten an der Diskussionsversammlung des SEV vom 17. Mai 1966 in Zürich,

von P. A. Tschopp, Zürich

681.187

Thematisch lässt sich das Gebiet der Forschungselektromagnete in die Problemkreise «Grundlegende Feldprobleme und Berechnung», «Konstruktion und Bau» und «Prüfung und Betrieb» aufspalten, wovon in diesem Aufsatz die Probleme von Konstruktion und Herstellung – die eigentliche Technologie dieser Magnete – behandelt werden.

Nach einleitender artweiser Unterteilung in Magnete mit normalen Leitern, mit tiefgekühlten Leitern und mit Supraleitern, werden tiefgekühlte und supraleitende Magnete nach einheitlichen Gesichtspunkten beschrieben, nämlich artweise getrennt die magnetischen Kreise, die Wicklungen und Spulen, die Kühlung und die Speisung. Fallweise werden schliesslich die Anwendungsbereiche und einzelne Anwendungsbeispiele mit einem Ausblick auf die zukünftige Technologie beschrieben.

<sup>1)</sup> Der Titel des an der Tagung gehaltenen Vortrages hiess: «Elektromagnete mit normalen Leitern, mit tiefgekühlten Leitern und mit

L'étude des électro-aimants utilisés dans la recherche scientifique peut être divisée en trois parties, soit «problèmes fondamentaux du champ magnétique et calcul des aimants», «conception et fabrication» et «essais de vérification et exploitation». Cet article se limite à l'étude des problèmes concernant la conception et la fabrication, c'est-à-dire à la technologie proprement dite de ces aimants. Après une classification des aimants en aimants à conducteurs normaux, à conducteurs cryogéniques et à supraconducteurs, il suit la description systématique des aimants cryogéniques et des aimants supraconducteurs, du point de vue des circuits magnétiques, des enroulements et bobines, de la réfrigération et de l'alimentation en courant. Les domaines d'application sont illustrés de quelques exemples et un aperçu sur le développement futur de la technologie clôture l'article.

Supraleitern». Der vollständige und zusätzlich ergänzte Vortragstext erscheint als Druckschrift der Maschinenfabrik Oerlikon.