

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

**Band:** 57 (1966)

**Heft:** 3

**Artikel:** Bahnstörungen bei nichtstationären Nachrichten-Satelliten

**Autor:** Paul, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-916564>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Bahnstörungen bei nichtstationären Nachrichten-Satelliten

Von H. Paul, Baden

629.783 : 521.2

Der Nachrichten-Satellit «Molnija» (= Blitz) wurde am 23. April 1965 in der UdSSR in eine 12-Stunden-Umlaufbahn gebracht. Im Gegensatz zu den stationären Nachrichten-Satelliten vom Typ «Syncom» und «Early Bird» mit 24-Stunden-Bahnen ist dieser subsynchrone Satellit nur etwa 8 bis 9 h pro Tag für Übertragungszwecke verfügbar; aber er hat wegen der besonders gewählten Bahn doch einige interessante Eigenschaften, über welche im folgenden berichtet wird. Dabei werden zuerst mit einer vereinfachten Störungsrechnung die Einflüsse des Äquatorwulstes der Erde und der Luftreibung in der Exosphäre auf die Bahnelemente von Satelliten abgeleitet und dann anhand dieser Ergebnisse die Bahneigenschaften von «Molnija» gezeigt.

Le 23 avril 1965, le satellite de télécommunications Molnija (Eclair) a été lancé en URSS sur une orbite qu'il parcourt en 12 heures. Contrairement aux satellites stationnaires du type Syncrom ou Early Bird, qui font un tour en 24 heures, ce satellite subsynchrone n'est disponible que durant 8 à 9 heures par jour pour des retransmissions. Du fait de sa trajectoire particulière, il possède néanmoins quelques propriétés intéressantes, que l'auteur décrit. Par un calcul simplifié, celui-ci détermine tout d'abord les influences qu'exercent le renflement équatorial terrestre et le frottement de l'air dans l'exosphère sur les éléments de la trajectoire de satellites, puis il décrit les propriétés orbitales du Molnija, d'après les résultats de ses calculs.

## 1. Allgemeines über Satellitenbahnen

### 1.1 Die Keplerschen Gesetze

Wenn sich ein Körper von der Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $V$  um einen Zentralkörper bewegt, dessen gesamte Masse  $M$  im Mittelpunkt konzentriert gedacht ist, und wenn ferner dessen Gravitation die einzige auf  $m$  wirkende Kraft ist, so erfolgt die Bewegung auf einer Ellipsenbahn, in deren einem Brennpunkt der Mittelpunkt des Zentralkörpers liegt. Die Zentralkraft ist:

$$K = G M \frac{m}{r^2} \quad (1)$$

wobei  $G$  die Gravitationskonstante ( $G = 6,67 \cdot 10^{-20} \text{ km}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ) und  $r$  der Abstand zwischen  $M$  und  $m$  sind. Die Bahnellipsen werden in Polarkoordinaten  $r$  und  $v$  beschrieben durch:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \quad (2)$$

mit der grossen Halbachse  $a$ , der numerischen Exzentrizität  $e$  und dem Halbparameter  $p = a(1 - e^2)$ , (Fig. 1).

Die Bewegung wird weiterhin bestimmt durch den Flächensatz:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{G M p} \quad (3)$$

und durch die Umlaufzeit  $U$ :

$$U^2 = \frac{4 \pi^2}{GM} a^3 \quad (4)$$

Die Bahngeschwindigkeit  $V$  des Körpers  $m$  ist in jedem Punkt der Bahn:

$$V_{tang}^2 = G M \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (5)$$

mit den beiden Komponenten:

$$\left. \begin{aligned} V_r &= \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{GM}{p}} e \cdot \sin v \\ V_v &= r \frac{dv}{dt} = \frac{1}{r} \sqrt{GMp} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ist insbesondere der Zentralkörper die Erde mit der Masse  $M = 5,977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , so ist:

$$GM = \mu = 3,986 \cdot 10^5 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$$

### 1.2 Die geozentrischen Koordinaten

Will man die Bewegung eines Satelliten relativ zur Erde untersuchen, so führt man räumliche Polarkoordinaten mit dem Erdmittelpunkt als Zentrum ein, sog. geozentrische Koordinaten (Fig. 2).

Die Äquatorebene der Erde ist die Hauptkoordinaten-ebene, welche die Erdoberfläche im Äquator als Grundkreis schneidet. Ein Punkt auf der Erdoberfläche kann durch zwei auf den Äquator bezogene Winkel definiert werden, wenn man einen Ausgangspunkt auf dem Äquator festgelegt hat. Als dieser Nullpunkt dient der Frühlingspunkt  $\gamma$ , das ist der Punkt, wo man die Sonne vom Erdmittelpunkt aus gesehen am 21. März findet. Der Winkel  $\gamma M F = \alpha$  ist dann die Rektaszension und der Winkel  $F M S = \delta$  ist die Deklination des Punktes  $S$ . Dieser sei die Projektion des Satelliten  $S'$  auf die Erdoberfläche.

Die Bahnebene des Satelliten schneidet die Äquatorebene in der Geraden  $MA'$ , welche als die Linie des aufsteigenden Knotens  $\Omega$  bezeichnet wird. Im Punkt  $A'$  ist die Deklination des Satelliten Null. Die Lage des aufsteigenden Knotens  $\Omega$  wird auf dem Äquator vom Frühlingspunkt  $\gamma$  aus gemessen als der Winkel  $\Omega$ . Dann ist  $\gamma A M F = \alpha - \Omega$ .

Die Bahnebene ist gegen die Äquatorebene um den Winkel  $i$  geneigt. Im Punkt  $P_e$  ist der Satellit der Erde am nächsten (s. auch Fig. 1), man bezeichnet den Ort als das Perigäum (Erdnähe); der Ort grösster Erdferne  $A_p$  heißt das Apogäum (Erdferne). Die Verbindungsstrecke Apogäum-Perigäum wird Apsidenlinie genannt. Die Lage des Perigäums wird durch den Winkel  $AMP_e = \omega$  vom aufsteigenden Knoten aus gemessen.

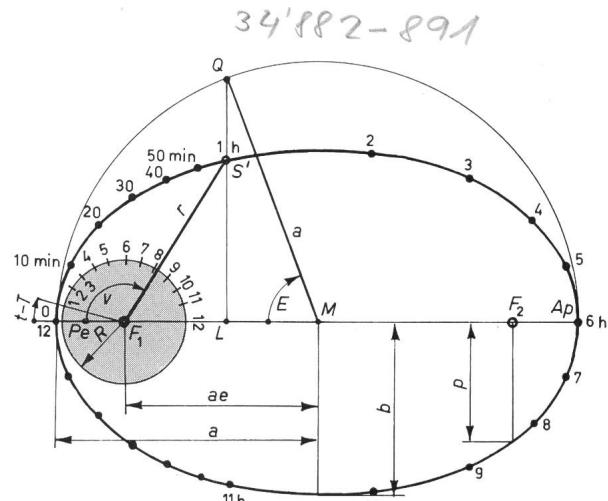


Fig. 1  
Bahnellipse und Zentralkörper

$P_e$  Perigäum;  $A_p$  Apogäum;  $F_1, F_2$  Brennpunkte;  $M$  Mittelpunkt der Bahnellipse;  $a$  grosse Halbachse;  $b$  kleine Halbachse;  $p$  Halbparameter;  $r$  Radiusvektor;  $v$  wahre Anomalie;  $E$  exzentrische Anomalie;  $R$  Radius des Zentralkörpers;  $S'$  ein Satellitenort nebst zugehöriger Zeit  $t - T$  nach Perigäumsdurchgang;  $ae$  lineare Exzentrizität;  $Q$  Hilfspunkt zur Ableitung der Keplergleichung [21]

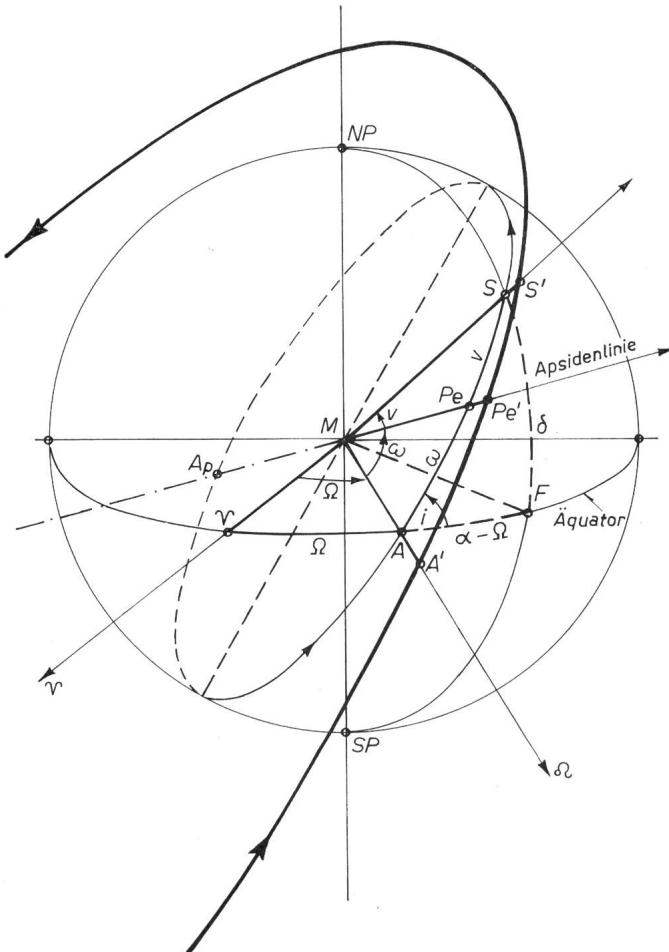


Fig. 2

**Satellitenbahn und geozentrische Koordinaten**

γ Frühlingspunkt; Ω Richtung des aufsteigenden Knotens; NP Nordpol; SP Südpol; M Mittelpunkt der Erde; S' Satellitenort; S Subsatellitenpunkt; Pe' Satellitenort im Perigäum; Pe Subsatellitenpunkt für Perigäum; A, A' Ort des aufsteigenden Knotens; Ω Knotenlänge; ω Perigäumswinkel; i Bahnneigung gegen die Äquatorebene; v wahre Anomalie; δ Deklination; α Rektaszension von S; Ap Subsatellitenpunkt für Apogäum

Den Satellitenort legt man in der Bahnellipse durch den Winkel  $P_e M S = v$ , vom Perigäum aus gerechnet, fest, und  $MS' = r$  ist der zugehörige Radiusvektor.

Wenn der Satellit gemäss den Keplerschen Gesetzen seine Bahn durchläuft und keinerlei störende Kräfte auftreten, so sind  $\Omega$  und  $\omega$  unveränderliche Grössen.  $\Omega$  wird durch das Abschussdatum und  $\omega$  durch den Brennschluss der letzten Raketenstufe festgelegt.

**1.3 Störungen der Bahnelemente**

Die sechs Bahnelemente  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  und  $t_0$  (= Zeitpunkt des Perigäumsdurchgangs) können aber durch eine Änderung der Zentralkraft oder durch zusätzliche Kräfte Änderungen erfahren, welche entweder nur während eines Umlaufs oder eines Teils davon auftreten und wieder verschwinden (kurzperiodische Störungen) oder welche eine dauernde Änderung in den Bahnelementen bewirken (säkulare Störungen). Die exakte Berechnung dieser Störungen ist recht kompliziert. Es ist jedoch in vielen Fällen ausreichend, wenn man die durch eine Störung erfolgte «Variation der Elemente» berechnet und die weitere Bewegung in einer neuen Ellipse mit leicht abweichenden Daten (oskulierende Ellipse) wieder als Zweikörperproblem behandelt.

Man nimmt also an, der Satellit erfahre in seiner Bahn am Ort  $P$  eine störende Kraft von bestimmter Grösse und Richtung. Man zerlegt diese bzw. den zugehörigen Beschleunigungsvektor in die drei Komponenten  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{W}$ .  $\mathbf{R}$  liegt in der Richtung des Radiusvektors,  $\mathbf{S}$  ist senkrecht zu  $\mathbf{R}$  und liegt in der Bahnebene,  $\mathbf{W}$  ist senkrecht zu  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{S}$  (Fig. 3). Die Momentangeschwindigkeit  $V$  in der ungestörten Bahn ist bekannt; durch die Störung treten drei zusätzliche Geschwindigkeitskomponenten  $dV_R$ ,  $dV_S$  und  $dV_W$  auf, welche die neue Bahnellipse bestimmen. Wenn nur  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{S}$  vorhanden sind, erfolgen nur Änderungen in der Bahnebene, d. h. nur Änderungen von  $a$  und  $e$ . Wenn allein die Beschleunigung  $\mathbf{W}$  wirksam ist, treten Änderungen von  $i$  und  $\Omega$  auf, wenn alle drei Komponenten  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{W}$  gemeinsam in Erscheinung treten, tritt eine Drehung der Apsidenlinie, also von  $\omega$  ein.

Die Störbeschleunigungen können ihre Ursache haben in dem nicht kugelsymmetrischen Verhalten der Erdbeschleunigung infolge der Abplattung der Erde, in der nicht mehr vernachlässigbaren Bremsung durch die Lufthülle der Erde und eventuell noch in der Gravitation von Mond und Sonne.

**1.3.1 Störungen in der Bahnebene**

Diese sind also nur durch  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{S}$  bedingt. Man kann sie berechnen aus den Geschwindigkeitsänderungen. Einerseits ist ja

$$V^2 = V_R^2 + V_S^2$$

und

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Mit

$$V dV = V_R \cdot dV_R + V_S \cdot dV_S$$

und

$$dV = \frac{\mu}{2a^2} da$$

sowie

$$dV_R = \mathbf{R} dt$$

$$V_R = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v$$

$$dV_S = \mathbf{S} dt$$

$$V_S = \frac{1}{r} \sqrt{\mu p}$$

erhält man

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{V\mu p} (e \cdot \sin v \cdot \mathbf{R} + \frac{p}{r} \mathbf{S}) \quad (7)$$

Nimmt man den Flächensatz (3) zu Hilfe:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu p}$$

und setzt nun:

$$\mathbf{S} = \frac{dV_S}{dt} = \frac{d}{dt} \left( r \frac{dv}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \sqrt{\mu p} \right)$$

so wird:

$$\frac{dp}{dt} = 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} r \mathbf{S}$$

wobei angenommen ist, dass sich  $r$  in der Zeit  $dt$  nicht ändert.

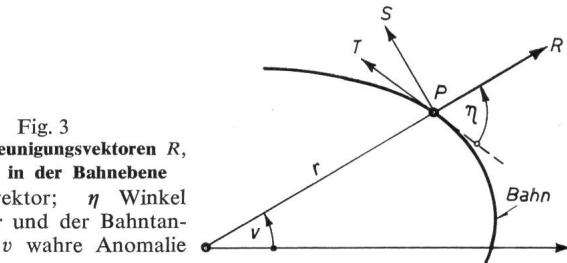


Fig. 3  
**Die Beschleunigungsvektoren  $R$ ,  $S$  und  $T$  in der Bahnebene**  
 $r$  Radiusvektor;  $\eta$  Winkel zwischen  $r$  und der Bahntangente  $T$ ;  $v$  wahre Anomalie

Die Anwendung der Ellipsenformel  $p = a(1 - e^2)$  liefert dann:

$$2e \frac{de}{dt} = \frac{p}{a^2} \cdot \frac{da}{dt} - \frac{1}{a} \cdot \frac{dp}{dt}$$

oder nach einfacher Umrechnung:

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \mathbf{R} \cdot \sin v + \left[ e \frac{r}{p} + \frac{r+p}{p} \cos v \right] \sqrt{\frac{p}{\mu}} \mathbf{S} \quad (8)$$

Aus den Gl. (7) und (8) erkennt man, dass die radiale Störbeschleunigungskomponente  $\mathbf{R}$  am stärksten wirksam ist für  $v = 90^\circ$  und  $270^\circ$ , dagegen ist sie bei  $v = 0^\circ$  und  $180^\circ$  ohne Einfluss auf  $a$  und  $e$ . Die  $\mathbf{S}$ -Komponente der Störkraft macht sich dagegen fast ständig bemerkbar.

### 1.3.2 Änderungen der Lage der Bahnebene

Diese Änderungen von  $i$  und  $\Omega$  können nur durch die  $\mathbf{W}$ -Komponente hervorgerufen werden. Betrachtet man ein Bahnstück und den Äquator in der Umgebung des aufsteigenden Knotens (Fig. 4), und zwar einmal in der ursprünglichen ungestörten Lage  $\Omega_1$ , bzw.  $\Omega$  und  $i$ , und einmal nach der Störung durch  $\mathbf{W}$  mit den neuen Werten  $\Omega + \Delta\Omega$  und  $i + \Delta i$ , so kann man aus dem sphärischen Dreieck  $\Omega_1 \mathbf{S} \Omega_2$  sofort ableiten:

$$\tan \varepsilon = \frac{\mathbf{W} dt}{V_v} \approx d\varepsilon$$

da  $\varepsilon$  sehr klein ist, und

$$\sin(i + di) \cdot \sin(d\Omega) = \sin u \cdot \sin(d\varepsilon)$$

mit  $u = \omega + v$ . Ausserdem ist nach Gl. (6):

$$V_v = \frac{1}{r} \sqrt{\mu p}$$

so dass sich mit Rücksicht auf die Kleinheit von  $di$  und  $d\varepsilon$  ergibt:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cdot \frac{\sin u}{\sin i} \mathbf{W} \quad (9)$$

Die Anwendung des Kosinussatzes auf das sphärische Dreieck  $\Omega_1 \mathbf{S} \Omega_2$  liefert:

$$\cos(i + di) = \cos i \cdot \cos(d\varepsilon) - \sin i \cdot \cos u \cdot \sin(d\varepsilon)$$

oder

$$\frac{di}{dt} = \cos u \cdot d\varepsilon = \frac{r \cdot \cos u}{\sqrt{\mu p}} \mathbf{W} \quad (10)$$

Wenn also  $u = \omega + v = 90^\circ$  oder  $270^\circ$  ist, ändert  $\mathbf{W}$  die Neigung  $i$  der Bahnebene nicht; und wenn  $u = \omega + v = 0^\circ$  oder  $180^\circ$  ist, wird  $\Omega$  von  $\mathbf{W}$  nicht beeinflusst.

### 1.3.3 Abwanderung der Apsidenlinie

Eine Änderung des Winkels  $\omega$  wird durch alle drei Komponenten  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{W}$  hervorgerufen. Die etwas langwierige Rechnung ergibt hierfür:

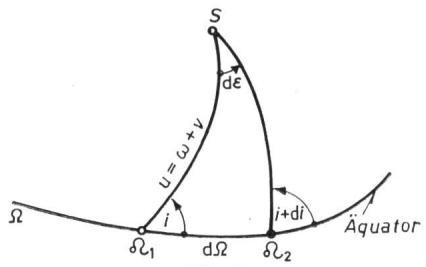


Fig. 4  
Änderung der Bahneigung  $i$  und der Knotenlage durch den Beschleunigungsvektor  $\mathbf{W}$

$S$  Subsatellitenpunkt;  $\Omega$  Knotenlänge vor der Störung;  $d\Omega$  differentielle Änderung der Knotenlage;  $d\varepsilon$  differentielle Änderung der Bahnlage im Subsatellitenpunkt;  $i + di$  Bahnneigung nach der Störung;  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  alte und neue Knotenlage

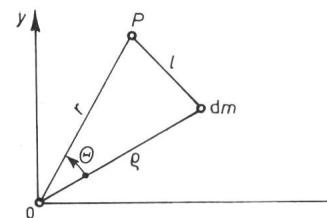


Fig. 5  
Zur Ableitung des Potentials bei verteilten Massen  
 $r$  Abstand zwischen Aufpunkt  $P$  und Koordinatenursprung 0;  
 $q$  Abstand des differentiellen Massenpunktes  $dm$  vom Ursprung;  
 $l$  Abstand Aufpunkt-Massenpunkt;  $\Theta$  und  $q$  sind die Integrationsvariablen

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ \frac{r+p}{p} \cdot \sin v \cdot \mathbf{S} - \cos v \cdot \mathbf{R} \right] - \cos i \cdot \frac{d\Omega}{dt} \quad (11)$$

Die Abwanderung der Apsidenlinie ist bei stark elliptischen Satelliten-Bahnen oft recht unerwünscht.

Wie schon erwähnt, liegt die Hauptursache für das Auftreten der Störkräfte in der Abplattung der Erde. Ihre Komponenten werden zunächst berechnet.

## 2. Störungen der Bahnelemente durch den Äquatorwulst der Erde

### 2.1 Das Potentialfeld der Erde

Die von *Kepler* aufgestellten Gesetze der Planetenbewegung setzen voraus, dass die ganze Masse des Zentralkörpers in seinem Mittelpunkt konzentriert und daher die Gravitationsbeschleunigung  $\gamma$  rein kugelsymmetrisch ist. Diese Voraussetzung muss man aber für die Satellitenbewegung in der Nähe des Erdsphäroids fallen lassen. Bekanntlich ist ja die Erde an den Polen abgeplattet, sie hat einen Äquatorhalbmesser  $a = 6378,388 \pm 0,10$  km und einen Polhalbmesser

$b = 6356,912 \pm 0,1$  km. Die Abplattung  $\frac{\Delta a}{a}$  ist also

$$\frac{1}{298,2} \pm 0,1 = 0,003354.$$

Wesentlich kleiner ist die Elliptizität des Äquators, da der Unterschied zwischen grosser und kleiner Halbachse des Äquators nur etwa 30 m zu betragen scheint. Diese Daten sind schon seit langem aus geodätischen Messungen bekannt, sie wurden aber in neuester Zeit durch Vermessung des Erdspäroids mit Hilfe von speziellen Satelliten (SECOR) nicht nur bestätigt sondern auch noch verbessert. Im Folgenden soll die Unrundheit des Äquators vernachlässigt werden, da sie ja etwa drei Zehnerpotenzen kleiner ist als die der Meridiane.

Dann ist die Anziehungskraft, welche auf einen Körper von der Masse  $m$  ausgeübt wird, nur noch von der geographischen Breite  $\beta$  und dem Abstand  $l$  von den einzelnen Massenpunkten  $dm$  der Erde abhängig. Man führt nun die Potentialfunktion

$$U = G \int \frac{dm}{l}$$

ein, wobei  $l$  der Abstand jedes Massenpunktes  $dm$  von der angezogenen Masse  $m$  ist (Fig. 5). Mit den Abständen  $r$  und  $q$  zum Massenmittelpunkt wird:

$$l = r \sqrt{1 + \left( \frac{q}{r} \right)^2 - 2 \left( \frac{q}{r} \right) \cos \Theta}$$

und für  $1/l$  kann man dann eine Reihenentwicklung machen:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{q}{r} \right) \cdot P_1(\Theta) + \left( \frac{q}{r} \right)^2 \cdot P_2(\Theta) + \dots \right]$$

wobei  $P_n(\Theta)$  die Legendreschen Kugelfunktionen von  $\Theta$  sind. Führt man zur Berechnung von  $U$  die Integration über die

ganze Erdkugel von  $\varrho = 0$  bis  $\varrho = R$  aus, so erhält man eine Reihe von der Form:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \cdot \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n (\sin \beta) \right]$$

in welcher die Koeffizienten  $J_n$  der tesselalen Harmonischen noch unbekannt sind. Sie berücksichtigen die Dichteverteilung in der Erde und können nur experimentell erfasst werden. Aus den heute vorliegenden Messergebnissen von geodätischen Satelliten kann man mit folgenden Werten für  $J_n$  rechnen:

$$\begin{aligned} J_2 &= +1,0822 \cdot 10^{-3} \\ J_3 &= -2,4 \cdot 10^{-6} \\ J_4 &= -1,707 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Da  $J_3$  und  $J_4$  viel kleiner als  $J_2$  sind, genügt es für die Berechnung der Bahnstörungen bei Satelliten, nur das Glied mit  $J_2$  zu berücksichtigen. Man erhält so:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 + \frac{J_2}{3} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \cdot (1 - 3 \sin^2 \beta) \right] \quad (12)$$

und daraus die Gravitationsbeschleunigung:

$$\gamma(r, \beta) \approx \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \left[ 1 + J_2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \cdot (1 - 3 \sin^2 \beta) \right] \quad (13)$$

Der erste Summand ist die Gravitationsbeschleunigung durch die homogene Masse der rein kugelförmigen Erde, während der zweite den zusätzlichen Beschleunigungsvektor durch den Äquatorwulst darstellt. Da er mit  $r^{-4}$  wächst, verschwindet er mit grösserem Abstand von der Erdoberfläche sehr rasch.

Um nun aus  $\gamma(r, \beta)$  die gesuchten drei Komponenten  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{W}$  zu finden, teilt man zunächst das Potential  $U$  nach Gl. (12) auf in einen Anteil

$$U_0 = \frac{\mu}{r}$$

und einen Störanteil

$$U' = \frac{\mu \cdot J_2 \cdot R^2}{3} \left( \frac{1 - 3 \sin^2 \beta}{r^3} \right)$$

Aus  $U_0$  erhält man die drei Komponenten der Zentralkraft:

$$K_{0x} = \frac{\mu m}{r^2} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{\partial U_0}{\partial x} = -\mu m \frac{x}{r^3} = m B_{0x}$$

$$K_{0y} = m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu m \frac{y}{r^3} = m B_{0y}$$

$$K_{0z} = m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\mu m \frac{z}{r^3} = m B_{0z}$$

$$\text{mit } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{und} \quad \sin \beta = \frac{z}{r}$$

Aus dem Störanteil  $U'$  ergeben sich in analoger Weise die drei Störbeschleunigungskomponenten im rechtwinkligen Koordinatensystem:

$$B_x' = \frac{\partial U'}{\partial x} = -\mu J_2 R^2 \cdot \frac{x}{r^5} (1 - 5 \sin^2 \beta)$$

$$B_y' = \frac{\partial U'}{\partial y} = -\mu J_2 R^2 \cdot \frac{y}{r^5} (1 - 5 \sin^2 \beta)$$

$$B_z' = \frac{\partial U'}{\partial z} = -\mu J_2 R^2 \cdot \frac{z}{r^5} (3 - 5 \sin^2 \beta)$$

woraus sich die drei Komponenten  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{W}$  in Kugelkoordinaten mit den bekannten Transformationen ergeben zu:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{\mu J_2 R^2}{r^4} (3 \sin^2 i \cdot \sin^2 u - 1) \\ \mathbf{S} &= -\frac{\mu J_2 R^2}{r^4} \sin^2 i \cdot \sin(2u) \\ \mathbf{W} &= -\frac{\mu J_2 R^2}{r^4} \sin(2i) \cdot \sin u \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

## 2.2 Beeinflussung des aufsteigenden Knotens

Es bereitet nun keine Schwierigkeiten mehr, die Gl. (9) auszuwerten, denn mit dem in Gl. (14) angegebenen Wert von  $\mathbf{W}$ , Ersatz von  $dt$  gemäss dem Flächensatz (3)

$$r^2 \frac{du}{dt} = \sqrt{\mu p}$$

durch  $du$  und mit:

$$r = p [1 + e \cos(u - \omega)]^{-1}$$

erhält man

$$d\Omega = -\frac{2 J_2 R^2}{p^2} \cos i \cdot \sin^2 u [1 + e \cos(u - \omega)] du$$

Für einen einzigen Umlauf kann man den Flächensatz noch gelten lassen, ebenso darf man  $p$ ,  $i$ ,  $e$  und  $\omega$  als konstant ansehen und somit über einen ganzen Umlauf von  $u = 0$  bis  $u = 2\pi$  integrieren. Das ergibt:

$$\frac{\Delta\Omega}{\text{Umlauf}} = -2\pi J_2 \left( \frac{R}{p} \right)^2 \cos i \quad (15)$$

Rechnet man noch von Bogen- auf Winkelgrade um und führt die Zahl der Umläufe pro Tag ein, so wird schliesslich:

$$\frac{\Delta\Omega}{\text{Tag}} = -\frac{9,78 \cdot \cos i}{(1 - e^2)^2} \cdot \sqrt{\left( \frac{R}{a} \right)^7} \quad (16)$$

Das bedeutet, dass die Bahnebene unter dem Einfluss des Äquatorwulstes eine Präzessionsbewegung ausführt, welche wegen des negativen Vorzeichens in entgegengesetzter Richtung wie die Satellitenbewegung erfolgt. Für polare Bahnen ( $\cos i \approx 0$ ), wie sie z. B. für ESRO I und II vorgesehen sind, ist  $\Delta\Omega \approx 0$ , für nahezu äquatoriale Bahnen (Telstar) kann  $\Delta\Omega$  einige Grade pro Tag erreichen.

## 2.3 Drehung der Apsidenlinie

Diese lässt sich mit den nun bekannten Werten von  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{W}$  nach Gl. (14) mit Hilfe von Gl. (11) für einen Umlauf leicht berechnen, wenn man wieder den Flächensatz benutzt, um  $dt$  durch  $du$  zu ersetzen. Es empfiehlt sich, aus Gl. (11) zunächst

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt}$$

zu bilden, die Integration durchzuführen und dann erst  $\Delta\omega$  mit dem schon aus Gl. (15) bekannten  $\Delta\Omega$  herzuleiten. So findet man nach längerer Rechnung:

$$\frac{\Delta\omega}{\text{Umlauf}} = \pi J_2 \left( \frac{R}{p} \right)^2 \cdot (5 \cos^2 i - 1) \quad (17)$$

und

$$\frac{\Delta\omega}{\text{Tag}} = \frac{5,00 (5 \cos^2 i - 1)}{(1 - e^2)^2} \sqrt{\left( \frac{R}{a} \right)^7} \quad (18)$$

Bei diesem Resultat ist bemerkenswert, dass  $\Delta\omega = 0$  wird, wenn  $\cos i = \sqrt{0,20}$ , also  $i = 63,4^\circ$  beträgt. In diesem Falle dreht sich die Apsidenlinie nicht durch den Einfluss des Äquatorwulstes. Die Russen haben eine ganze Reihe von Satelliten unter diesem Winkel zur Äquatorebene in Umlauf gebracht, insbesondere auch den Nachrichtensatelliten «Molnija». Da dieser zugleich eine 12-Stunden-Umlaufbahn hat,

bleiben Apogäum und Perigäum stets am gleichen Ort stehen. Darüber wird im Abschnitt 4 noch genauer berichtet.

Für Forschungssatelliten mit nicht-synchronen Umlaufbahnen (z. B. ESRO II) liegt die tägliche Abwanderung der Apsidenlinie bei etwa 3 bis 4°, so dass ein solcher Satellit in längstens 6 Monaten die Ausmessung der Kugelschale zwischen Apogäum und Perigäum erledigt haben kann.

Es sei zum Schluss noch darauf hingewiesen, dass der Äquatorwulst keine säkularen Störungen bei  $i$ ,  $a$ ,  $e$  und  $p$  hervorbringt. Man findet leicht, dass die entsprechenden Integrale, über den ganzen Umlauf genommen, verschwinden. Hingegen sind kurzperiodische Störungen, die sich im Verlauf eines Umlaufes wieder aufheben, durchaus möglich.

### 3. Störung der Bahnelemente durch die Lufthülle der Erde

#### 3.1 Die bremsende Kraft

Zur Berechnung der Bremsung eines Satelliten durch die Lufthülle der Erde muss man zunächst einmal die Wärmebewegung der Luftmoleküle in der Exosphäre näher betrachten. Aus vielen Untersuchungen ist bekannt, dass in etwa 200 km Höhe über der Erde die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle etwa 1 bis 3 km/s ist. Ein in dieser Höhe in einer Kreisbahn fliegender Satellit hat dagegen eine Geschwindigkeit von etwa 7,5 km/s. Man kann daher die Molekülgeschwindigkeit gegenüber der Satellitengeschwindigkeit vernachlässigen, also annehmen, dass die Luftmoleküle nur von vorn auf den Satelliten auftreffen. Sodann ist die mittlere freie Weglänge in 200 km Höhe etwa 1 km; in 600 km Höhe ist sie bereits grösser als 1000 km, was bedeutet, dass das Strömungsfeld der ankommenden Moleküle praktisch ungestört ist durch die vom Satelliten zurückgeworfenen. Unter diesen Voraussetzungen kann man die Bremskraft wie folgt berechnen: Denkt man sich den Satelliten als Körper mit einer ebenen Stirnfläche von  $Q_S \text{ m}^2$  Querschnitt, so wäre zunächst die Bremsende Kraft:

$$m_S B_L = -\varrho_L Q_S V_S^2$$

wobei  $\varrho_L$  die Luftdichte,  $V_S$  die Geschwindigkeit und  $m_S$  die Masse des Satelliten sind. Jedoch ist noch ein Proportionalitätsfaktor  $C$ , der Widerstandsbeiwert, einzuführen. Für unelastischen Stoss ist  $C = 2$ , für elastischen ist  $C = 4$ . In der Hochatmosphäre liegt  $C$  zwischen beiden Werten. Die Verzögerung bzw. negative Störbeschleunigung ist somit:

$$B_L = -\frac{C}{2} \cdot \frac{Q_S}{m_S} \varrho_L V_S^2$$

und zwar ist die Richtung von  $B_L$  stets eine Tangente der Satellitenbahn.

#### 3.2 Die Änderung der Apogäumshöhe

Man kann nun  $B_L = \mathbf{T}$  in die beiden Komponenten  $\mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot \cos \eta$  und  $\mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \sin \eta$  zerlegen, wobei  $\eta$  der Winkel zwischen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{T}$  ist, und damit Gl. (7) umformen in:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2 a^2}{\mu} V \mathbf{T}$$

Dann ist mit dem obigen Wert für  $\mathbf{T}$ :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{C Q_S}{m_S} \cdot \frac{a^2}{\mu} \varrho_L V^3$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus Gl. (8):

$$\frac{de}{dt} = -\frac{C Q_S}{m_S} \varrho_L V (e + \cos v)$$

Die grosse Halbachse  $a$  wird also dauernd kleiner, die Exzentrizität  $e$  wird kleiner, solange  $\cos v < -e$  ist, jedoch grösser, wenn  $\cos v > -e$ . Will man nun über einen ganzen Umlauf integrieren, so muss man die Abhängigkeit der Luftdichte  $\varrho(H)$  von der Höhe  $H$  berücksichtigen.

Es ist

$$\varrho(H) = \varrho_0 e^{-\frac{H - H_0}{H_0}}$$

mit

$H_0$  Perigäumshöhe

$\varrho_0 = \varrho(H_0)$  Luftdichte im Perigäum

$$H_0 = \frac{R T}{mg} = -\frac{dH}{d(\ln \varrho)} \text{ Skalenhöhe}$$

Führt man nun gemäss Gl. (23) und Fig. 1 ein:

$$H_0 - H = r_0 - r = a e (\cos E - 1)$$

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}$$

und

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2\pi}{U} \cdot \frac{1}{1 - e \cos E}$$

so ergibt sich mit

$$\frac{ae}{H_0} = x$$

$$\frac{da}{dE} = -\frac{C Q_S}{m_S} a^2 \varrho_0 e^{-x} \sqrt{\frac{(1 + e \cos E)^3}{1 - e \cos E}} \cdot e^{x \cos E}$$

Dieser Ausdruck ist durch Reihenentwicklung des Wurzelausdrucks zu integrieren und führt auf Integrale der Art:

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nE) e^{x \cos E} dE$$

welche die modifizierten Besselfunktionen mit dem Argument  $x$  und der Ordnung  $n$  darstellen. Das Argument  $x$  ist bei den vorliegenden Rechnungen meistens sehr gross (5 bis 300), man kann daher eine asymptotische Reihe für  $I_n(x)$  anwenden, deren beide ersten Glieder bereits genügende Genauigkeit ergeben. Aber die Potenzreihe für  $\sqrt{\frac{(1 + e \cos E)^3}{1 - e \cos E}}$  konvergiert für Werte von  $e > 0,5$  nur schlecht und sie kann daher nicht vor der 4. Potenz von  $e$  abgebrochen werden. Dagegen darf man bei kleinen Exzentrizitäten ( $e \approx 0,1$ ), wie sie bei vielen Satelliten üblich sind, bereits das quadratische Glied vernachlässigen. Man erhält nach längerer Rechnung:

$$\frac{\Delta a}{\text{Umlauf}} = -\frac{C Q_S a^2 \varrho_0}{m_S} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left[ \varphi_a(e) + \frac{\Psi_a(e)}{8x} \right] \quad (19)$$

mit

$$\varphi_a(e) = 1 + 2e + \frac{9}{4}e^2 + \frac{4}{4}e^3 + \frac{9}{32}e^4 + \dots$$

und

$$\Psi_a(e) = 1 - 6e - \frac{21}{2}e^2 - \frac{27}{8}e^3 - \frac{3}{32}e^4 - \dots$$

Mit der Abnahme der grossen Halbachse ist nach dem dritten Keplerschen Gesetz eine Verringerung der Umlaufzeit verbunden, denn aus

$$U^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$$

folgt

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta a}{a}$$

pro Umlauf.

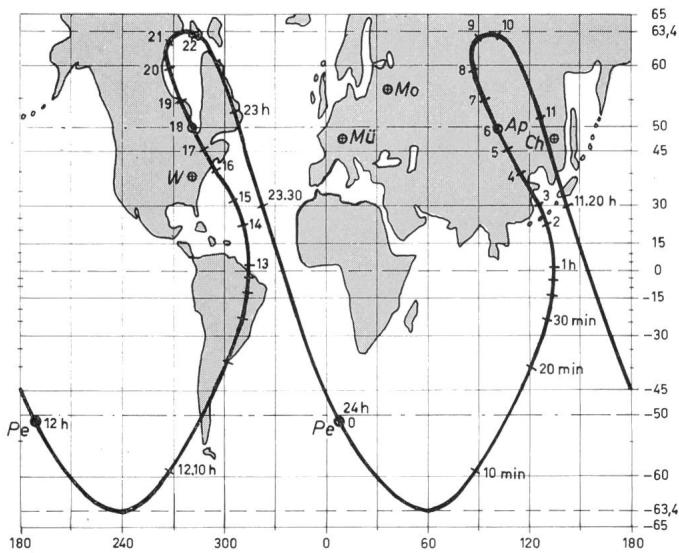


Fig. 6

Die Projektion der Bahn von «Molnija» auf die Erde

Pe Perigäum; Ap Apogäum; Mü München; Mo Moskau;  
W Washington; Ch Chabarowsk

Die angegebenen Zeiten sind Minuten bzw. Stunden nach dem Perigäumsdurchgang

Man kann also aus den leicht zu beobachtenden Änderungen der Umlaufzeit die Grösse von  $\varrho_0$  berechnen.

Mit der Änderung von  $a$  erfolgt auch eine Abnahme  $\Delta e$  von  $e$ , welche man in ähnlicher Weise wie  $\Delta a$  berechnen kann. Es wird

$$\frac{\Delta e}{\text{Umlauf}} = -\frac{C Q s a \varrho_0}{m_s} \sqrt{\frac{2 \pi}{x}} \left[ \varphi_e(e) - \frac{\Psi_e(e)}{8x} \right] \quad (20)$$

mit

$$\varphi_e(e) = 1 + e - \frac{e^2}{2} - \frac{e^3}{2} - \frac{19}{128} e^4 - \dots$$

und

$$\Psi_e(e) = 3 + 7e + \frac{37}{8} e^2 + \frac{e^3}{2} - \frac{45}{64} e^4 + \dots$$

Mit Gl. (19) und (20) kann man nun endlich auch die Änderung der Apogäumshöhe  $\Delta H_{Ap}$  ausrechnen:

$$\Delta H_{Ap} = a(1+e) - (a+\Delta a)(1+e+\Delta e) \approx -\Delta a(1+e) - a \cdot \Delta e$$

Für schwach exzentrische Bahnen erhält man:

$$\Delta H_{Ap} \approx -2(1-e) \cdot \Delta a \left( 1 - \frac{1}{4x} \right)$$

während für stark exzentrische Ellipsen wird:

$$\Delta H_{Ap} \approx -\Delta a \left[ 1 + e - \frac{\varphi_e(e) - \frac{\Psi_e(e)}{8x}}{\varphi_a(e) + \frac{\Psi_a(e)}{8x}} \right]$$

Für den zur Zeit in der Ausführung befindlichen Satelliten ESRO II rechnet man mit folgenden Daten:

$$\begin{aligned} Q_s &\approx 0,4 \text{ m}^2 & U &= 99 \text{ min} \\ m_s &\approx 7,5 \text{ kg} & H_0 &= 56,5 \cdot 10^3 \text{ m} \\ a &= 7,1 \cdot 10^6 \text{ m} & \varrho_0 &= 1,5 \cdot 10^{-11} \text{ kg m}^{-3} \\ e &= 0,0528 & x &= 6,63 \end{aligned}$$

Somit ist:

$$\frac{\Delta a}{\text{Umlauf}} = -87,8 \text{ m}$$

Man kann die ungefähre «Lebensdauer»  $T_L$  dieses Satelliten abschätzen, wenn man annimmt, dass beim Erreichen der Kreisbahn (Perigäum = Apogäum) der Absturz erfolgt. Für

den Start ist  $H_{Ap} \approx 1100 \text{ km}$ ,  $H_{Pe} \approx 350 \text{ km}$ , also ist  $n \cdot \Delta a = 7,5 \cdot 10^5 \text{ m}$ , woraus man die «Lebensdauer»  $T_L \approx 1,65 \text{ Jahre}$  berechnet.

#### 4. Berechnung der Bahn des Satelliten «Molnija»

##### 4.1 Zeiten und Koordinaten

Wie bereits unter Abschnitt 2.2 erwähnt wurde, ist die Bahnebene des russischen Nachrichtensatelliten «Molnija» unter dem Winkel  $i = 63,4^\circ$  gegen die Äquatorebene der Erde geneigt. Dadurch wird die Drehung der Apsidenlinie  $\Delta\omega = 0$ , Apogäum und Perigäum wandern nicht in der Bahnebene fort. Das ist ein erstes wichtiges Merkmal dieser Bahn. Das zweite ist die Umlaufzeit  $U$ , welche  $11 \text{ h } 43 \text{ min}$  beträgt, so dass «Molnija» ein subsynchroner Satellit ist mit zwei Umläufen pro Tag. Der Einfachheit halber sei im Folgenden stets mit  $U = 43200 \text{ s}$  gerechnet. Aus den bekannten Werten für die Apogäumshöhe  $H_{Ap} = 39940 \text{ km}$  und die Perigäumshöhe  $H_{Pe} = 518 \text{ km}$  folgt dann die grosse Halbachse zu  $a = 26600 \text{ km}$  und die Exzentrizität  $e = 0,741$ . Weiterhin ist die kleine Halbachse  $b = 17850 \text{ km}$ , und die vom Radiusvektor pro Zeiteinheit bestrichene Fläche:

$$f = \frac{\pi a b}{U} = 34600 \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$$

Will man nun die Projektion der Bahn des Satelliten auf die Erde berechnen, also die Orte und die zugehörigen Zeiten, wo sich der Satellit im Zenith befindet, so muss man ausgehen von der Keplergleichung:

$$E - e \cdot \sin E = \frac{2\pi}{U} (t - T) = M \quad (21)$$

in welcher  $E$  die «exzentrische Anomalie» ist. Sie ist aus Fig. 1 leicht abzuleiten.  $(t - T)$  ist die Zeit, welche nach dem Durchgang durch das Perigäum verstrichen ist. Aus  $E$  ergibt sich dann der Zusammenhang mit dem Winkel  $v$  durch:

$$v = \arctg \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sin E}{\cos E - e} \quad (22)$$

und mit der Länge des Radiusvektors:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (23)$$

$r$  und  $v$  definieren in jedem Zeitpunkt  $(t - T)$  den Ort des Satelliten auf der Ellipse.

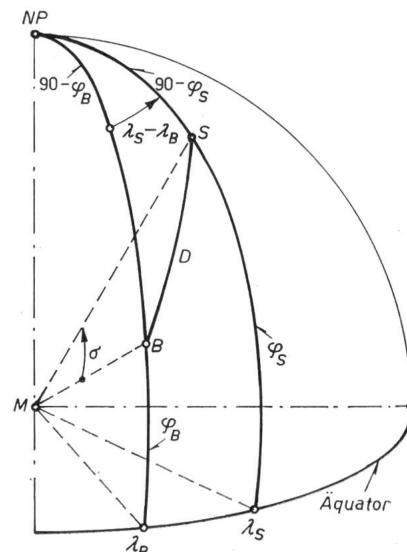


Fig. 7  
Die trigonometrischen Verhältnisse zwischen Bodenstation B und Subsatellitenpunkt S

$M$  Erdmittelpunkt;  $NP$  Nordpol;  $\sigma = D$  = Bodenstation—Subsatellitenpunkt (Grosskreis);  $\varphi_B, \varphi_S$  geographische Breite von B bzw. S;  $\lambda_B, \lambda_S$  geographische Breite von B bzw. S

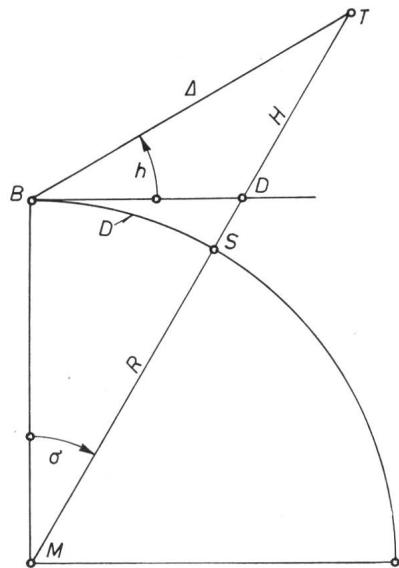


Fig. 8

Die geometrischen Beziehungen zwischen Satellitenort  $T$ , Subsatellitenpunkt  $S$ , Bodenstation  $B$ , Elevationswinkel  $h$  und gerader Distanz  $D$   
 $BD$  Horizontebene;  $R$  Erdradius;  $ST = H$  = Satellitenhöhe

#### 4.2 Die Bahnprojektion auf die Erdoberfläche

Man kann nun weiter mit den Kugelkoordinaten von Fig. 2 die Projektion  $S$  eines Satellitenpunktes  $S'$  auf die Erdoberfläche ausrechnen. Der Winkel  $v$  ist durch den Bogen  $P_e - S$  gekennzeichnet, die Lage des Perigäumspunktes  $P_e$  durch den Bogen  $\omega = A - P_e$  vom aufsteigenden Knoten  $\Omega$  ab, und dieser ist wieder festgelegt durch den Bogen  $\gamma - A = \Omega$  auf dem Äquator, das ist der Abstand des Knotens vom Frühlingspunkt.

$\Omega$  wird durch das Abschussdatum bestimmt,  $\omega$  durch den Brennschluss des Trägerfahrzeugs. Beide Werte sind dann für einen einzigen Umlauf als feste Größen anzusehen. Die geographische Breite  $\delta = FS$  und die Länge  $\alpha - \Omega = AF$  berechnet man für jeden Zeitaugenblick  $t - T$  nach dem Perigäumsdurchgang aus dem sphärischen Dreieck AFS mit den Seiten  $(\omega + v) = u$ ,  $(\alpha - \Omega)$  und  $\delta$  und dem Winkel  $i$ , der ja im Falle der «Molnija»  $63,4^\circ$  ist. Man hat:

$$\sin \delta = \sin i \cdot \sin (\omega + v) = \sin i \cdot \sin u$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \Omega) = \cos i \cdot \operatorname{tg}(\omega + v) = \cos i \cdot \operatorname{tg} u$$

Diese Rechnungen wurden für 36 Werte  $t - T$  durchgeführt. Von der gefundenen Länge  $\alpha - \Omega$  ist jeweils noch der durch die Erddrehung bestimmte Wert  $(t - T) \cdot 15^\circ$  abzuziehen, um die wahre geographische Länge  $\lambda$  zu erhalten.

Das Ergebnis der sehr langen Rechnung ist in Fig. 6 auf einer Erdkarte in Merkatorprojektion dargestellt. Dabei wurde  $\Omega = -30^\circ$  aus dem Abschussdatum (23. April 1965) und  $\omega = 240^\circ$  aus einigen russischen Angaben entnommen.

Verfolgt man die Bahn auf der Karte, so sieht man, dass das Perigäum  $P_e$  um 0 h über dem Südatlantik liegt. In einer Stunde überfliegt der Satellit die südliche Halbkugel, und dann steigt er langsam in weiteren fünf Stunden bis zu seinem Apogäum  $A_p$  auf, das er über Zentral-Russland erreicht. Er bleibt noch weitere fünf Stunden über Russland, überfliegt in zwei Stunden wieder die südliche Hemisphäre, nun aber mit dem Perigäum über dem Südpazifik und zieht dann während neun Stunden über den nordamerikanischen Kontinent hinweg. Wegen der Zwölfstunden-Umlaufbahn wiederholt sich dieser Vorgang jeden Tag auf die Minute genau in gleicher Weise.

Wegen der Neigung der Bahnebene von  $63,4^\circ$  ändert sich die Lage von Perigäum und Apogäum nicht. Dagegen tritt eine Drehung der Bahnebene  $\Omega$  auf, die sich aus den Bahnelementen zu:

$$\Delta\Omega = 0,146 \text{ Grad/Tag}$$

berechnet. Diese kann wie unter Abschnitt 4.4 noch gezeigt wird mit kleinem technischen Aufwand ausgeglichen werden.

#### 4.3 Elevationswinkel und Übertragungsdistanzen

Neben den reinen Bahndaten interessiert sich der Nachrichtentechniker natürlich besonders für den Elevationswinkel über dem Horizont und für die Übertragungsdistanzen zwischen dem Satelliten und den Bodenstationen. Die geometrischen Verhältnisse gehen aus Fig. 7 und 8 hervor.  $B$  ist die Bodenstation mit den festen Koordinaten  $\lambda_B$  und  $\varphi_B$ ,  $S$  ist der Subsatellitenpunkt mit den zeitlich veränderlichen Koordinaten  $\lambda_S$  und  $\varphi_S$ . Die Distanz  $D$  auf dem Grosskreis durch  $B$  und  $S$  ist durch den Winkel  $\sigma$  gegeben. Wendet man den Kosinussatz auf das sphärische Dreieck BPS mit den Seiten  $90^\circ - \varphi_B$ ,  $90^\circ - \varphi_S$  und  $D$  und dem Winkel  $\lambda_S - \lambda_B$  an, so hat man:

$$\cos D = \cos \sigma = \cos(\lambda_S - \lambda_B) \cdot \cos \varphi_S \cdot \cos \varphi_B + \sin \varphi_S \sin \varphi_B$$

In Fig. 8 sei nun  $B$  wieder der Ort der Bodenstation,  $M$  der Erdmittelpunkt,  $S$  der Subsatellitenpunkt und  $T$  der Ort des Satelliten. Dann ist die Tangente  $BD$  zugleich die Horizontebene für  $B$ , der Winkel  $h$  ist der Elevationswinkel,  $BT$  ist die Übertragungsdistanz Bodenstation – Satellit und  $ST$  ist die Satellitenhöhe über der Erde. Aus der Ellipsengleichung ergibt sich für jede Zeit  $(t - T)$ :

$$R + H = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

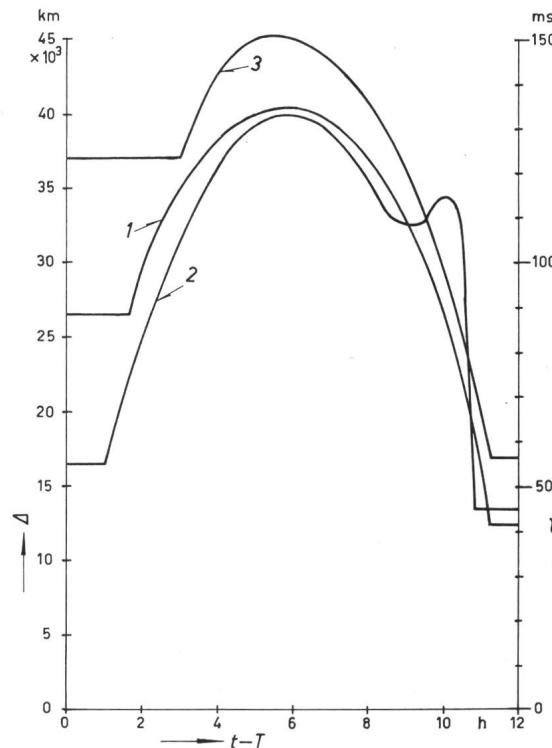


Fig. 9  
 Gerade Distanz  $\Delta$  und Signallaufzeit  $\tau$  für verschiedene Bodenstationen  
 1 Moskau; 2 Chabarowsk und Washington; 3 München;  $t - T$  Zeit nach Perigäumsdurchgang

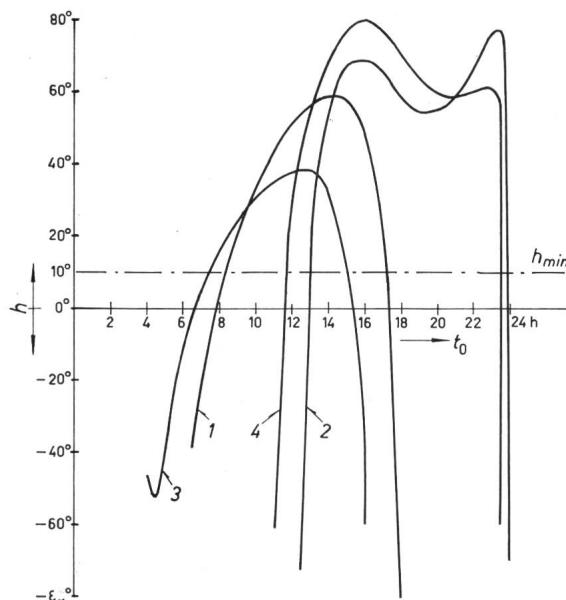


Fig. 10

**Elevationswinkel  $h$  über dem Horizont in Abhängigkeit von der Ortszeit  $t_0$**   
 1 Moskau; 2 Chabarowsk; 3 München; 4 Washington  
 $h$  Elevationswinkel;  $h_{min}$  minimaler Elevationswinkel für die Bodenantenne

Dann liefert das Dreieck MBT:

$$\Delta = (R + H) \frac{\sin \sigma}{\cos h} \quad (24)$$

und aus dem Dreieck BDT findet man:

$$\tan h = \cot \sigma - \frac{R}{(R + H) \sin \sigma} \quad (25)$$

Diese Gleichungen wurden für «Molnija» und die Stationen Chabarowsk, Moskau, München und Washington ausgewertet, wobei in Fig. 9 die gerade Distanz  $\Delta$  und die einfache Signallaufzeit  $\tau$  in Abhängigkeit von der Zeit  $(t - T)$  nach Perigäumsdurchgang dargestellt ist, während Fig. 10 den Elevationswinkel  $h$  über dem Horizont, über der Orts- bzw. Zonenzeit  $t_0$  aufgetragen, wiedergibt. Rechnet man mit einem zulässigen minimalen Erhebungswinkel von  $10^\circ$  (wegen der sonst auftretenden Erhöhung der Rauschtemperatur der Antennenanlage), so sieht man, dass für Moskau die Betriebszeit etwa  $8\frac{1}{2}$  h beträgt und zwar von 8 h 30 bis 17 h (Ortszeit). Selbst für München (Raisting) ist eine Verbindung zwischen 7 h 30 und 15 h Ortszeit, d. h. während  $7\frac{1}{2}$  h möglich. Chabarowsk einerseits und Washington anderseits liegen natürlich noch viel günstiger. Für die französische Station Pleumeur-Bodou ist  $h = 22,9^\circ$ , wenn «Molnija» im Apogäum steht, also kann auch dort noch für einige Zeit der Kontakt aufrechterhalten werden.

Die geraden Distanzen weichen untereinander nicht wesentlich voneinander ab, wie Fig. 9 zeigt. Zwischen der dritten und der zehnten Stunde nach Perigäumsdurchgang kann vom Satelliten aus gesehen mit allen vier Stationen gleichzeitig gearbeitet werden.

Vom Uetliberg bei Zürich aus erscheint «Molnija» täglich mittags unter einem Erhebungswinkel von  $28,2^\circ$  mit einer Distanz  $\Delta = 42\,900$  km.

#### 4.4 Korrektur der Knotenabwanderung

Wie schon unter 4.2 angegeben, muss man mit einer täglichen Abwanderung der Knotenlinie von  $-0,146^\circ$  rechnen.

Das Apogäum würde dann in einem Jahr längs des 50. Breitengrades um etwa  $-53^\circ$  wegläufen. Man könnte aber die Lage der Bahnebene dadurch stabilisieren, dass man bei jedem Umlauf im geeigneten Moment eine Querbeschleunigung  $W^*$  durch ein Miniaturtriebwerk erzeugt (z. B. durch einen Freonstrahl).

Es ist also:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cdot \frac{\sin(\omega + v)}{\sin i} W^*$$

bzw.

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \frac{\sin(\omega + v)}{\sin i(1 + e \cos v)} W^*$$

Die kleinste Beschleunigung  $W^*$  muss man aufwenden, wenn man in dem Moment die Düse öffnet, wo

$$f(v) = \frac{\sin(\omega + v)}{(1 + e \cos v)}$$

ein Maximum durchläuft. Das ist für die Molnija-Bahn bei  $v_{opt} = 188,25^\circ$  der Fall und dann ist  $f(v_{opt}) = +3,5$ .

Somit ist einerseits:

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0,683 W^*$$

Anderseits erhält man aus Gl. (15):

$$\Delta\Omega = -2,95 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

Die notwendige Korrekturbeschleunigung ist dann  $W^* = 4,32 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$ . Diese werde z. B. durch einen Freonstrahl erzeugt, welcher mit

$$v_{ex} = c = 150 \text{ m s}^{-1}$$

aus der Düse austritt. Aus der Raketengleichung

$$V_R - V_0 = c \cdot \ln \left( \frac{m_0}{m_R} \right)$$

$$\begin{aligned} m_0 & \text{ Startmasse} = m_R + m_{Tr} \\ m_R & \text{ Raketen(=Satelliten)masse} \\ m_{Tr} & \text{ Treibstoffmasse} \end{aligned}$$

folgt mit  $V_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} V_R = c \cdot \ln \left( 1 + \frac{m_{Tr}}{m_R} \right) & \approx c \cdot \frac{m_{Tr}}{m_R} = W^* \cdot \Delta t = \\ & = 43,2 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

Die Raketenmasse scheint bei «Molnija» etwa  $3 \cdot 10^4$  g zu sein. Somit müsste die Treibstoffmasse  $m_{Tr} \approx 200 V_R$  sein. Wird die Düse bei jedem Umlauf für die Dauer von  $\Delta t = 1$  s geöffnet, so ist:

$$V_R = 43,2 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-1}$$

also:

$$m_{Tr} = 8,64 \cdot 10^{-3} \text{ g} \quad \text{pro Umlauf}$$

oder

$$m_{Tr} = 17,28 \cdot 10^{-3} \text{ g} \quad \text{pro Tag.}$$

Das Treibstoffgewicht (auf der Erde gemessen) ist dann  $\approx 0,175 \text{ g}^*/\text{Tag.}$

Geht man nun von dem Treibstoffgewicht aus, welches der Nachrichtensatellit «Early Bird» zwecks Korrektur seiner Position mit sich führt, nämlich  $4,4 \text{ kg}^*$ , und nimmt man nun für «Molnija» ein Treibstoffgewicht (beim Start) von nur  $1,75 \text{ kg}^*$  an, so ergibt sich, dass dieser Vorrat für etwa 27 Jahre ausreichen sollte. Dies ist ein grosser Vorteil der an sich sehr stabilen subsynchronen Bahn mit grosser Exzentrizität.

#### 4.5 Bahnstörungen durch Mond und Sonne

Im erdfernsten Punkt, wo die Gravitationskraft der Erde am kleinsten und die des Mondes am grössten sein könnte, ist das Verhältnis der beiden Beschleunigungen:

$$\gamma_{\text{Erde}}: \gamma_{\text{Mond}} = 2,46 \cdot 10^5$$

Diese Abschätzung zeigt schon, dass man den Mond als Störkörper in erster Näherung vernachlässigen kann. Im Einzelnen sind die Beschleunigungen, welche die Erde, der Äquatorwulst, der Mond und die Sonne erzeugen:

$$\gamma_{\text{Erde}} = 57,8 \text{ cm s}^{-2} \text{ im Minimum}$$

$$\gamma_{\text{Wulst}} = 0,96 \text{ cm s}^{-2} \text{ im Maximum}$$

$$\gamma_{\text{Mond}} = 3,82 \cdot 10^{-3} \text{ cm s}^{-2} \text{ im Maximum}$$

$$\gamma_{\text{Sonne}} = 0,594 \text{ cm s}^{-2}$$

Danach möchte man zunächst versucht sein, dem Einfluss der Sonne grosse Beachtung zu schenken. Die Sonne wirkt aber auf die Erde im zeitlichen Mittel ebenso stark wie auf den Satelliten, und die Bahnstörung für diesen relativ zur Erde ist nur durch den mehr oder weniger grossen Abstand des Satelliten von der Sonne bedingt. Das ist aber im Falle der «Molnija» nur die Schwankung von  $\pm 46300$  km auf 150 Millionen km. Man kann also die Sonne als Störkörper vernachlässigen.

#### 4.6 Lebensdauererwartung

Zum Schluss sei noch kurz der Einfluss der Exosphäre auf die Bahn von «Molnija» betrachtet. Ausgehend von den Be-

trachtungen unter 3.2 und unter Zugrundelegung der folgenden Annahmen:

$$Q_S = 1,25 \text{ m}^2 \quad m_S = 30 \text{ kg} \quad a = 2,66 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$e = 0,741 \quad \rho_0 = 4 \cdot 10^{-12} \text{ kg m}^{-3} \quad x = 195$$

erhält man  $\Delta a = -70$  m/Umlauf. Dieser Wert ist wegen der nach dem vierten Glied abgebrochenen Reihenentwicklung um etwa 20 % zu günstig. Nimmt man den wesentlich ungünstigeren Wert  $\Delta a = -100$  m/Umlauf an, so werden dennoch bis zum Erreichen der Kreisbahn nicht weniger als 540 Jahre vergehen, falls nicht andere Einflüsse (Meteoriteinschläge!) den Absturz wesentlich beschleunigen.

#### Literatur

- [1] K. W. Gatland: Telecommunication Satellites. London, Iliffe 1964.
- [2] B. P. Blasingame: Astronautics. London, Mc Graw-Hill 1964.
- [3] E. Schlägl: Die Himmelsmechanischen Grundlagen für Fernmelde-Satelliten. Fernmelde-Ing. 17(1964)11 und 17(1964)12.
- [4] A. Bohrman: Bahnen künstlicher Satelliten. Mannheim, Bibliographisches Institut 1963.
- [5] J. Bartels: Geophysik. Frankfurt a/Main, S. Fischer 1960. Das Fischer-Lexikon Bd. 20.
- [6] K. Stumpf: Astronomie. Frankfurt a/Main, S. Fischer 1957. Das Fischer-Lexikon Bd. 4.

#### Adresse des Autors:

Dr. H. Paul, AG Brown, Boveri & Cie., 5400 Baden.

## Neue elektrische Akzeleratoren im Dienste der Materialprüfung und Medizin

Von K. Kuphal, Baden

621.384.64

Es werden einige neue elektrische Akzeleratoren des Hochvolt-Energiebereiches zwischen 4 und 35 MeV beschrieben, und zwar Neuentwicklungen der in der Materialprüfung und Medizin meist benutzten Elektronenbeschleuniger «Betatron» und «Linearbeschleuniger». Bei beiden können die beschleunigten Elektronen entweder direkt als Elektronen-Strahlung austreten oder Röntgen-Strahlung gleicher Maximalenergie erzeugen. Für die zerstörungsfreie Materialprüfung braucht man ein intensives Röntgenstrahlbündel hoher Durchdringungsfähigkeit, das von einem kleinen Brennfleck ausgeht, um grosse Materialdicken mit kurzer Filmbelichtungszeit zu durchstrahlen und eine gute Fehlererkennbarkeit zu erzielen. Für die Strahlentherapie benötigt man exakt ausgeblendete Röntgen- und Elektronen-Strahlbündel genügender Reichweite, um die Wirkung der Bestrahlung möglichst auf den Krankheitsherd zu konzentrieren. Die Elektronen-Strahlung bietet den Vorteil, je nach Energie mehr oder weniger tief in den Körper einzudringen. Sie kann dadurch die einem Krankheitsherd bestmöglich angepasste Dosisverteilung erzeugen.

L'auteur décrit quelques nouveaux accélérateurs de particules électriques pour énergies allant de 4 à 35 MeV, qui sont dérivés des «bétatrons» et des «accélérateurs linéaires» couramment employés en médecine et pour l'essai des matériaux. Dans les uns comme dans les autres, les électrons accélérés peuvent soit sortir de l'appareil sous forme de radiation électronique, soit servir à produire des rayons X de même énergie maximale. Pour essayer les matériaux sans les détruire il faut disposer d'un faisceau intense de rayon X très pénétrants et émanant d'un foyer concentré, afin que ces rayons puissent traverser des matériaux épais et qu'une brève exposition du film suffise pour faire bien apparaître les défauts. En radiothérapie on a besoin de faisceaux de rayons X ou de faisceaux d'électrons diaphragmés avec précision et de portée suffisante, afin que l'effet des rayons puisse être concentré le plus possible sur le foyer de la maladie. Les rayons électroniques présentent l'avantage de pénétrer, selon leur énergie, plus ou moins profondément dans le corps, ce qui permet d'adapter le mieux possible leur dosage et leur répartition à la partie malade.

### 1. Einleitung

Elektrische Akzeleratoren dienen der Erzeugung schneller geladener Teilchen. Die für die praktischen Anwendungen heute wohl wichtigsten Partikel sind die Elektronen. Sie verlassen den Beschleuniger entweder direkt als Elektronen-Strahlung oder erzeugen in einem Target (Antikathode) Röntgenstrahlung. Man benutzt Elektronenbeschleuniger ausser zu Forschungszwecken hauptsächlich zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung und zur Strahlentherapie in der Medizin. Für beide Anwendungsgebiete hat sich der Hochvoltbereich der kinetischen Elektronen-Energie von 1 bis ca. 40 MeV als günstig erwiesen.

Es sollen hier einige neue Entwicklungsstufen der beiden wichtigsten Akzeleratoren dieser Energie, nämlich des Betatrons und des Linearbeschleunigers behandelt werden. Beide Arten sind auf den Gebieten der Materialprüfung und Medizin seit etwa 15 Jahren in Gebrauch. Obwohl ihre Grundkonzeption heute zum technischen Allgemeingut gehört, geht ihre Entwicklung ständig weiter. Die Ziele sind dabei hauptsächlich hohe Betriebssicherheit und relative Einfachheit der Mittel, verbunden mit grosser Strahlleistung und Genauigkeit der Strahlführung. Vor Beschreibung einzelner Geräte und ihrer Eigenschaften sei eine kurze Übersicht der seitens der Materialprüfung und der Medizin zu stellenden Anforderungen gegeben.