

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 57 (1966)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Kurvenapproximation mittels verallgemeinerter Laguerre-Funktionen  
**Autor:** Bürgin, H.G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-916563>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

Gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV)  
und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)

## Kurvenapproximation mittels verallgemeinerter Laguerre-Funktionen

Von H. G. Bürgin, La Jolla, USA

517.512.6

Die Aufgabe, eine gegebene Funktion durch einen mathematischen Ausdruck anzunähern, tritt in der Elektro- und Regelungstechnik häufig auf. Da die Güte der Approximation oft stark davon abhängt, mit welcher Klasse von Funktionen sie durchgeführt wird, ist es empfehlenswert, ein relativ grosses Repertoire von Approximationsmethoden zur Auswahl zu haben. Dieser Artikel beschreibt, wie abklingende Funktionen mittels Summen von verallgemeinerten Laguerre-Funktionen angenähert werden können. Nach einer Beschreibung der wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionen werden die Formeln für die Berechnung der Approximationsfunktion hergeleitet, wobei eine sehr allgemeine Gewichtsfunktion zugelassen wird. Ein numerisches Beispiel zeigt unter anderem den Einfluss verschiedener Gewichtsfunktionen. Die Laguerre-Funktionen haben grosse praktische Bedeutung, weil sie eine einfache Laplacetransformierte besitzen. Diese wird abgeleitet und zum Schluss gezeigt, wie Laguerre-Funktionen stabil auf einem Analogrechner nachgebildet werden können.

En électronique et en régulation, il est souvent nécessaire d'exprimer mathématiquement, avec une bonne approximation, une fonction donnée. La qualité de l'approximation dépendant parfois beaucoup du genre de la fonction, il est utile de disposer d'un relativement grand répertoire de méthodes d'approximation. L'auteur montre comment des fonctions décroissantes peuvent être exprimées approximativement par sommation de fonctions de Laguerre généralisées. Après une description de principales propriétés de ces fonctions, il indique les formules de calcul de la fonction approximative, en admettant une fonction pondérée très générale. Un exemple numérique montre notamment l'influence de diverses fonctions pondérées.

Les fonctions de Laguerre ont une grande importance pratique, car elles comportent une simple transformée de Laplace. Celle-ci est dérivée et l'auteur montre, pour terminer, comment les fonctions de Laguerre peuvent être reproduites d'une façon stable avec un calculateur analogique.

### 1. Allgemeine Bemerkungen über Kurven-Approximationen

Eine Kurve, die in Form einer Tabelle, als Resultat von Messungen (kontinuierlich oder diskret) oder in Form eines komplizierten mathematischen Ausdruckes gegeben ist, durch eine verhältnismässig einfache mathematische Funktion anzunähern, ist eine für den Ingenieur und den Elektrotechniker häufig auftretende Aufgabe. Während der Mathematiker bei solchen Problemen die Frage nach der Existenz von Lösungen, die Art der Konvergenz und so weiter untersucht, interessiert es den Ingenieur viel eher, ob er eine gegebene Funktion mit wirtschaftlichem Aufwand «hinreichend genau» approximieren kann. Eine befriedigende Lösung dieses Problems erfordert im allgemeinen Erfahrung, gutes Verständnis für die Anwendung der Approximation und etwas Phantasie. Einige der Parameter, über die man sich bei Kurvenapproximationen entscheiden muss, sind:

1. Der analytische Ausdruck für die Approximationsfunktion. (Polynome, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktionen, gebrochene rationale Funktionen etc.)

2. Das Kriterium für die «beste» Approximation (kleinstes Fehlerquadrat, minimaler Maximum-Fehler (Minimax), «Glätte» der approximierenden Funktion, Art der Gewichtsfunktionen).

3. Bereich der unabhängigen Variablen, in welchem die Approximation Gültigkeit haben soll. (Endlicher Bereich, halbbunendlicher Bereich, unendlicher Bereich.)

4. Kompliziertheit der Approximationsfunktion und der nötige Aufwand, um die beste Approximation zu finden.

Grundsätzlich sollte bei Kurvenapproximationen der Charakter der Annäherungsfunktion gleich demjenigen der zu approximierenden Funktion sein. Periodische Kurven sollen zum Beispiel durch periodische Funktionen approximiert werden. Annähernd exponentiell abklingende Funktionen soll man daher nicht durch Polynome annähern, gebrochene

rationale Funktionen oder Summen von Exponentialfunktionen eignen sich meistens besser.

Dieser Artikel zeigt, wie abklingende Funktionen durch Summen von Laguerre-Funktionen approximiert werden können. Laguerre-Polynome und Laguerre-Funktionen spielen eine wichtige Rolle in der Elektro- und Regelungstechnik, sind aber leider unter Technikern und Ingenieuren im allgemeinen nicht sehr bekannt. Es ist einer der Zwecke dieser Arbeit, den Leser mit diesen interessanten Funktionen bekannt zu machen und ihn anzuregen, sie zu gebrauchen.

Schon 1932 verwendete Lee [1]<sup>1)</sup> Laguerre-Funktionen für die Synthese elektrischer Netzwerke. Head veröffentlichte zwischen 1956 und 1958 eine Reihe von Artikeln [2;3;4] in welchen er zeigte, wie Laguerre-Funktionen für die Approximation von Funktionen gebraucht werden können. Die Methode, welche in diesem Artikel beschrieben wird, ist eine Verallgemeinerung der von Head vorgeschlagenen Methode, in manchen Fällen gibt sie etwas bessere Resultate. In neuerer Zeit machte Dean [5] ausgedehnten Gebrauch von Laguerre-Funktionen in Verbindung mit seismologischen Untersuchungen.

### 2. Eigenschaften der Laguerre Polynome und der Laguerre Funktionen

In der Literatur existieren mehrere, verschiedene Definitionen der Laguerre-Polynome und der Laguerre-Funktionen, Head[3] stellte mehrere dieser Definitionen zusammen. In diesem Artikel wird die mit Head und andern übereinstimmende Definition des Laguerre-Polynoms vom  $n$ -ten Grad benützt. Danach ist:

<sup>1)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

$$L_n(t) = 1 - \binom{n}{1}t + \binom{n}{2}\frac{1}{2!}t^2 - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \cdot t^n \quad (1)$$

Das von Laguerre [6] ursprünglich gebrauchte Polynom entspricht dem oben definierten, multipliziert mit  $n!$  und  $t$  ersetzt durch  $-t$ . Die ersten sechs Laguerre-Polynome sind:

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1 \\ L_1(t) &= 1 - t \\ L_2(t) &= 1 - 2t + t^2/2 \\ L_3(t) &= 1 - 3t + 3t^2/2 - t^3/6 \\ L_4(t) &= 1 - 4t + 3t^2 - 2t^3/3 + t^4/24 \\ L_5(t) &= 1 - 5t + 5t^2 - 5t^3/3 + 5t^4/24 - t^5/120 \end{aligned} \quad (2)$$

Die folgenden Eigenschaften sind wichtig für numerische Rechnungen:

#### 1. Die Rekursionsformel:

$$L_n(t) = \frac{2n-1-t}{n} L_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n} L_{n-2}(t) \quad (3)$$

Diese Formel wird verwendet, um  $L_n(t)$  für gegebenes  $t$  numerisch mittels eines Rechenautomaten zu berechnen.

#### 2. Die Orthogonalitäts-Beziehung:

$$\int_0^\infty e^{-t} \cdot L_n(t) \cdot L_m(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases} \quad (4)$$

Von der Orthogonalität wird bei der Berechnung der Koeffizienten der approximierenden Funktion Gebrauch gemacht.

#### 3. Die verallgemeinerte Formel von Rodrigues:

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \quad (5)$$

Diese Formel ist nützlich bei der Herleitung der Laplace-transformierten der Laguerre-Funktionen.

#### 4. Die Differentialgleichung:

$$t \cdot \ddot{L}_n(t) + (1-t) \cdot \dot{L}_n(t) + n \cdot L_n(t) = 0 \quad (6)$$

Wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugen kann, befriedigen die Laguerre-Polynome die obige, gewöhnliche, lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Eine vielleicht noch wichtigere Rolle als die Laguerre-Polynome spielen die Laguerre-Funktionen. Jahnke und Emde [7] definieren die Laguerre-Funktion wie folgt:

$$\lambda_n(t) = e^{-t/2} \cdot L_n(t) \quad (7)$$

In dieser Arbeit wird der Begriff der Laguerre-Funktion etwas verallgemeinert und eine verallgemeinerte Laguerre-Funktion wie folgt definiert:

$$l_{n,m}(t) = e^{-t} \cdot L_n(mt) \quad (8)$$

Man sieht ohne weiteres, dass die Formel (7) einen Spezialfall von (8) darstellt. Setzt man nämlich in Gl. (8)  $m=2$  und substituiert man  $\tau=2t$ , so ergibt sich Gl. (7).

In Fig. 1 sind die ersten fünf verallgemeinerten Laguerre-Funktionen mit  $m=2$  dargestellt. Man findet sie tabelliert in [8].

Die in Gl. (8) definierten verallgemeinerten Laguerre-Funktionen befriedigen folgende Differentialgleichung:

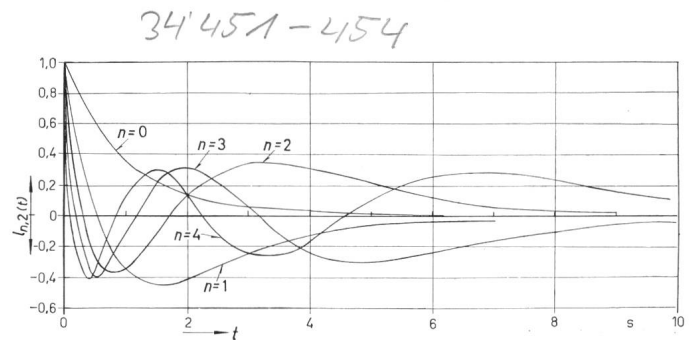


Fig. 1  
Die ersten fünf Laguerre-Funktionen  $l_{n,2}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \cdot t \cdot \frac{d^2}{dt^2} (l_{n,m}(t)) + \left( \frac{1}{m} + \frac{2-m}{m} t \right) \frac{d}{dt} [l_{n,m}(t)] + \\ + \left( \frac{1-m}{m} t + n + \frac{1}{m} \right) \cdot l_{n,m}(t) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

### 3. Herleitung der Formeln für die Approximation mittels verallgemeinerter Laguerre-Funktionen

Es sei  $y(t)$  eine gegebene, zu approximierende Funktion der Zeit.  $y(t)$  kann entweder in Form einer Tabelle, in graphischer Form oder als komplizierter mathematischer Ausdruck gegeben sein.

Die approximierende Funktion  $\bar{y}(t)$  soll folgende Form haben:

$$\bar{y}(t) = e^{-t} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot L_k(mt) \quad (10)$$

Die Koeffizienten  $a_k$  sind vorläufig unbekannt,  $m$  ist ein konstanter Zahlenfaktor, welcher später im Zusammenhang mit der Gewichtsfunktion bestimmt werden wird.

Für die Approximation soll verlangt werden:

$$R = \int_0^\infty w(t) [y(t) - \bar{y}(t)]^2 dt = \text{Minimum} \quad (11)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist der Fehler als Funktion der Zeit,  $w(t)$  ist die Gewichtsfunktion. Die Gewichtsfunktion ist die Gesamtheit von Masszahlen, mit deren Hilfe der zu einer bestimmten Zeit auftretende Fehler in der approximierenden Funktion zu bewerten ist. Wählt man  $w(t)$  als konstant, so bedeutet dies, dass man dem Fehler zu allen Zeiten ein gleiches Gewicht zumessen will. Ist man aber zum Beispiel daran interessiert, dass die Approximation vor allem für kleine Werte von  $t$  gut ist, so kann man als Gewichtsfunktion  $w(t) = e^{-t}$  wählen. Im folgenden sei angenommen, dass die Gewichtsfunktion von der Form:

$$w(t) = e^{\nu t} \quad (12)$$

sei, wobei  $\nu$  eine beliebige reelle Zahl  $\leq 1$  sei.

Wenn die Gewichtsfunktion bekannt ist, kann man die Koeffizienten in Gl. (10) bestimmen. Substitution von Gl. (10) in Gl. (11) ergibt:

$$R = \int_0^\infty w(t) \left[ y(t) - e^{-t} \sum_{k=0}^{N-1} a_k L_k(mt) \right]^2 dt = \text{Minimum} \quad (13)$$

Eine notwendige Bedingung, dass  $R$  ein Minimum wird, ist:

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = 0 \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (14)$$

Benützt man die in Gl. (12) definierte Gewichtsfunktion, so ergibt sich:

$$\int_0^{\infty} e^{vt} \left[ y(t) - e^{-t} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot L_k(m t) \right] e^{-t} \cdot L_i(m t) dt = 0 \quad (15)$$

oder

$$\int_0^{\infty} e^{t(v-1)} \cdot y(t) \cdot L_i(m t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \int_0^{\infty} e^{t(v-2)} L_k(m t) \cdot L_i(m t) dt \quad (16)$$

Zur Gl. (16) sind zwei Bemerkungen zu machen:

a) Für die Gewichtsfunktion (12) wurde verlangt, dass  $v \leq 1$  sei. Der Grund für diese Forderung liegt darin, dass das Integral auf der linken Seite von Gl. (16) existiert (endliche Werte hat), solange die zu approximierende Funktion  $y(t)$  eine exponentiell abklingende Funktion und der Exponent  $(v-1)$  negativ ist.

b) Dank der Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot L_k(t) \cdot L_i(t) dt = 0 \quad \text{für } k \neq i$$

verschwindet das Integral auf der rechten Seite von Gl. (16) für alle Werte  $k \neq i$ , wenn man

$$m = 2 - v \quad (17)$$

wählt. Für diesen Wert von  $m$  wird die rechte Seite von Gl. (16)

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \int_0^{\infty} e^{-t(v-2)} \cdot L_k((2-v)t) \cdot L_i((2-v)t) dt$$

Substituiert man

$$\tau = (2-v)t$$

und

$$dt = \frac{1}{2-v} d\tau$$

so bleibt auf der rechten Seite nur der Term:

$$a_i \frac{1}{2-v} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \cdot L_i^2(\tau) d\tau = \frac{a_i}{2-v}$$

und es folgt somit als Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten  $a_k$ :

$$a_i = (2-v) \int_0^{\infty} e^{-t(1-v)} \cdot L_i[(2-v)t] \cdot y(t) dt \quad (17)$$

Es zeigt sich hier eine, allen Kurvenapproximationsmethoden, welche orthogonale Funktionssysteme als approximierende Funktionen brauchen, gemeinsame wichtige Eigenschaft. Der  $k$ -te Koeffizient der approximierenden Funktion kann isoliert berechnet werden, weil in seiner Bestimmungsgleichung keine andern unbekannten Koeffizienten auftreten. Eine wichtige praktische Bedeutung hat diese Eigenschaft deshalb, weil sie erlaubt, die Anzahl der Terme in einer Approximation und somit ihre Genauigkeit zu erhöhen, ohne dass man die bereits berechneten Koeffizienten neu zu berechnen brauchte. Dem Elektroingenieur ist diese Eigenschaft von der Fouriersynthese, wo ja auch ein orthogonales Funktionensystem gebraucht wird, bekannt. Er ist sich nur oft dieser wichtigen Eigenschaft und ihrer Ursache nicht bewusst.

Für praktische Anwendungen kommen hauptsächlich die folgenden drei Gewichtsfunktionen in Frage:

- a)  $w(t) = 1$
- b)  $w(t) = e^{+t}$
- c)  $w(t) = e^{-t}$

In Tabelle I sind die Formeln für diese drei wichtigen Spezialfälle zusammengestellt.

Formeln für die Approximation mit drei verschiedenen Gewichtsfunktionen

Tabelle I

$v$	Gewichtsfunktion $w(t)$	Approximationsfunktion $\bar{y}(t)$	Formel für Koeffizienten $a_k$
0	1	$e^{-t} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot L_k(2t)$	$2 \int_0^{\infty} e^{-t} L_k(2t) \cdot y(t) dt$
+1	$e^{+t}$	$e^{-t} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot L_k(t)$	$\int_0^{\infty} L_k(t) \cdot y(t) dt$
-1	$e^{-t}$	$e^{-t} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot L_k(3t)$	$3 \int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot L_k(3t) \cdot y(t) dt$

#### 4. Skalierung

Bei Kurvenapproximationen mittels Laguerre-Funktionen ist es im allgemeinen notwendig, die unabhängige Variable mit einem geeigneten Maßstabsfaktor zu skalieren. Mathematisch bedeutet dies, dass die approximierende Funktion folgende Gestalt erhält:

$$\bar{y}(t) = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot L_k(\alpha t) \quad (18)$$

Der Wert von  $\alpha$ , welcher im wesentlichen den Zeitmaßstabsfaktor bedeutet, kann auf verschiedene Arten gefunden werden. Head [3] schlug folgende Methode vor: Es sei  $t_0$  der Wert der unabhängigen Variablen, so dass für alle  $t \geq t_0$  der Wert der zu approximierenden Funktion als Null angenommen werden kann. Es sei ferner angenommen, dass die Zahl der Terme in der approximierenden Funktion gleich  $N$  sei. Dann soll  $\alpha$  so gewählt werden, dass:

$$|L_{k,m}(\alpha t)| < 10^{-4} \quad (19)$$

für alle Werte  $t > t_0$  und  $k = 0; 1; 2; \dots N$ . Praktisch bedeutet das, dass man den Zeitmaßstab so wählen soll, dass die Laguerre-Funktion von der höchsten Ordnung genügend stark gedämpft ist.

Ein etwas anderes Vorgehen, welches recht gute Resultate zeigte, wird hier vorgeschlagen. Es werde zuerst die gegebene Funktion durch eine reine Exponentialfunktion angenähert:

$$y(t) \approx \bar{y}_0(t) = A e^{-\alpha t} \quad (20)$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die beiden unbekannten Parameter  $A$  und  $\alpha$  in der obigen Gleichung zu bestimmen. Da man hier jedoch nur einen ersten, groben Näherungswert von  $\alpha$  braucht, genügt es zum Beispiel, graphisch  $\log y(t)$  durch eine Gerade zu approximieren, deren Steigung ein Maß für  $\alpha$  ist. Ist  $y(t)$  in Form einer Tabelle mit  $M$  Wertpaaren gegeben, so kann man auch verlangen, dass:

$$\sum_{i=1}^M [\log y_i(t_i) - \log \bar{y}_{0i}(t_i)]^2 = \text{Minimum} \quad (21)$$

wird.

Ersetzt man in der obigen Gleichung  $\log y_{0i}$  durch  $\log A - t_i$  und setzt die partiellen Ableitung der Summe nach  $A$  und  $\alpha$  gleich Null, so findet man sofort zwei lineare Gleichungen für  $A$  und  $\alpha$ . Löst man die Aufgabe mittels eines Rechenautomaten, so ist diese Methode zur Bestimmung eines ersten Näherungswertes zu empfehlen.

Hat man einen Näherungswert für  $\alpha$  gefunden, so kann man die eigentliche Kurvenapproximation für verschiedene Werte von  $\alpha$  und  $N$  durchführen. Man wird dann diejenige Approximation wählen, welche mit der kleinsten Anzahl von Termen die gewünschte Genauigkeit ergibt. Auf diese Weise wird  $\alpha$  zu einem weiteren freien Parameter in der Kurvenapproximation, und es ist möglich, dass man so ökonomischere Approximationsfunktionen findet als bei einer a-priori-Wahl eines festen Wertes von  $\alpha$ , wie dies von Head vorgeschlagen wurde. Die hier beschriebene Methode, welche  $\alpha$  als zusätzlichen freien Parameter betrachtet, ist vor allem dann sehr zweckmässig, wenn man die Approximation mittels eines Rechenautomaten durchführt.

## 5. Numerische Ermittlung der Koeffizienten $a_k$

Es soll im folgenden angenommen werden, die Gewichtsfunktion sei  $w(t) = 1$  und der Skalierungsfaktor  $\alpha$  sei gegeben. Für die unabhängige Variable macht man folgende Substitution:

$$\tau = \alpha t \quad (22)$$

und erhält somit als Ausdruck für die approximierende Funktion:

$$\bar{y}(\tau) = e^{-\tau} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot L_k(2\tau) \quad (23)$$

Die Koeffizienten  $a_k$  werden dann gemäss Gl. (17) bestimmt durch:

$$a_k = 2 \int_0^{\infty} e^{-\tau} \cdot y(\tau) \cdot L_k(2\tau) d\tau \quad (24)$$

Wohl die beste Art, dieses Integral numerisch auszuwerten, ist die Gauss-Laguerre-Integration, d. h.:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot f(x) dx \approx \sum_{j=1}^P w_j \cdot f(x_j) \quad (25)$$

Die Gewichte  $w_j$  und die Abszissenwerte  $x_j$  sind in der Literatur tabelliert [5; 9].

Ist die zu approximierende Funktion für äquidistante Abszissenwerte gegeben, so genügt in vielen Fällen auch eine einfache Ermittlung des Integrales mittels der Simpsonschen Formel. Es ist aber darauf zu achten, dass die Intervallbreite genügend klein ist; dies ist besonders kritisch für die Laguerrefunktionen höherer Ordnung.

## 6. Numerisches Beispiel

Es sei die in Tabelle II, Kolonne 2 und in Fig. 2 als ausgezogene Kurve dargestellte Funktion gegeben. Zur Demonstration soll diese Funktion mittels Summen von Laguerrefunktionen angenähert werden, wobei die Approximation

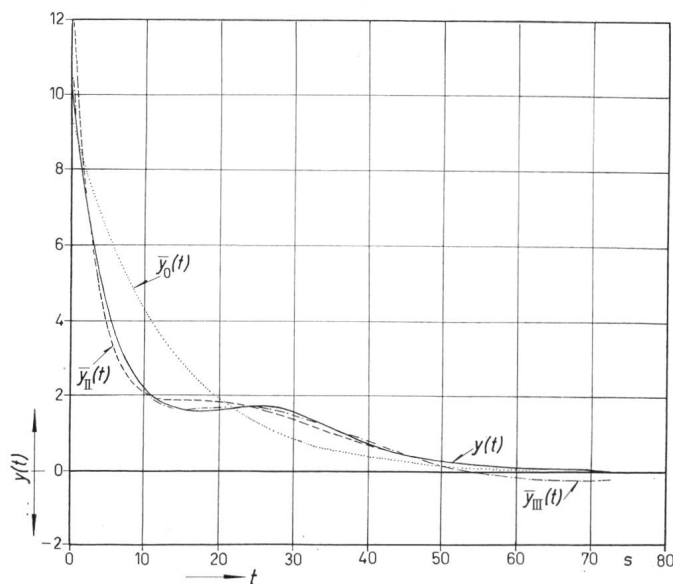


Fig. 2  
Numerisches Beispiel

— gegebene Funktion; ..... Annäherung mit reiner Exponentialfunktion; ----- Laguerre-Approximation mit  $w(t) = e^{+\alpha t}$ ; - · - · - Laguerre-Approximation  $w(t) = e^{-\alpha t}$

mit verschiedenen Gewichtsfunktionen durchgeführt werden soll. Die folgenden drei Fälle werden untersucht:

Fall I:  $w(t) = 1$

Fall II:  $w(t) = e^{+\alpha t}$

Fall III:  $w(t) = e^{-\alpha t}$

Der erste Schritt besteht in der Bestimmung eines geeigneten Maßstabfaktors für die Zeitachse. Approximiert man die Funktion gemäss Gl. (21) mittels einer reinen Exponentialfunktion, so findet man:

$$\bar{y}_0(t) \approx 9,4 e^{-0,08 t} \quad (26)$$

Diese erste Annäherung ist in Fig. 2 punktiert eingetragen.

Für die folgenden Approximationen wurde der Einfachheit halber ein  $\alpha$  von 0,1 gewählt. Der optimale Wert von  $\alpha$  ist verschieden je nach der Gewichtsfunktion.  $\alpha = 0,1$  ist ein Wert, der gute Resultate für alle drei Gewichtsfunktionen ergibt.

Um den Effekt der Gewichtsfunktion deutlicher zum Vorschein kommen zu lassen, wird absichtlich die Anzahl der Terme in der Approximation klein gehalten ( $N = 5$ ). Die Koeffizienten  $a_k$  wurden mittels Gauss-Laguerre-Integration bestimmt (50 Punkte Integration, von welchen 12 in den Bereich  $0 \leq \alpha t \leq 7,2$  fallen).

Die Koeffizienten  $a_k$  werden:

	Fall I $w(t) = 1$	Fall II $w(t) = e^{+\alpha t}$	Fall III $w(t) = e^{-\alpha t}$
$a_0$	+ 8,37	+ 10,15	+ 8,67
$a_1$	— 0,17	— 5,35	+ 1,00
$a_2$	+ 2,33	+ 1,19	+ 1,14
$a_3$	+ 0,60	+ 3,67	— 0,07
$a_4$	— 0,35	+ 2,35	— 0,18

In Tabelle II sind die approximierenden Funktionen für diese drei Fälle tabelliert. In Fig. 2 ist die Approximations-

Tabelle II

$t$	$\tau = \alpha t$	$\gamma(\tau)$	Fall I $w(t) = 1$ $\bar{y}_I(\tau)$	Fall II $w(t) = e^{+\alpha t}$ $\bar{y}_{II}(\tau)$	Fall III $w(t) = e^{-\alpha t}$ $\bar{y}_{III}(\tau)$
0	0,0	10,30	10,77	12,00	10,49
2	0,2	7,55	7,36	7,39	7,42
4	0,4	5,15	5,08	4,69	5,20
6	0,6	3,61	3,61	3,19	3,67
8	0,8	2,70	2,70	2,42	2,68
10	1,0	2,15	2,18	2,07	2,09
12	1,2	1,83	1,88	1,94	1,78
14	1,4	1,70	1,75	1,91	1,65
16	1,6	1,62	1,69	1,92	1,62
18	1,8	1,58	1,67	1,91	1,64
20	2,0	1,60	1,66	1,88	1,67
22	2,2	1,65	1,64	1,82	1,69
24	2,4	1,72	1,61	1,73	1,69
26	2,6	1,72	1,55	1,62	1,66
28	2,8	1,67	1,48	1,49	1,59
30	3,0	1,55	1,39	1,35	1,50
32	3,2	1,40	1,29	1,21	1,38
34	3,4	1,24	1,78	1,07	1,24
36	3,6	1,04	1,06	0,94	1,10
38	3,8	0,85	0,94	0,82	0,95
40	4,0	0,70	0,83	0,70	0,80
42	4,2	0,59	0,72	0,60	0,66
44	4,4	0,50	0,61	0,50	0,52
46	4,6	0,40	0,51	0,42	0,39
48	4,8	0,33	0,42	0,35	0,27
50	5,8	0,28	0,34	0,29	0,17
52	5,2	0,20	0,27	0,23	0,07
54	5,4	0,18	0,21	0,19	0,00
56	5,6	0,13	0,15	0,15	— 0,07
58	5,8	0,11	0,10	0,12	— 0,13
60	6,0	0,10	0,06	0,09	— 0,17
62	6,2	0,08	0,03	0,07	— 0,21
64	6,4	0,06	0,00	0,05	— 0,23
66	6,6	0,04	— 0,02	0,04	— 0,25
68	6,8	0,02	— 0,04	0,03	— 0,27
70	7,0	0,01	— 0,05	0,02	— 0,27
72	7,2	0,005	— 0,06	0,01	— 0,27

funktion für den Fall II strichpunktiert, für den Fall III gestrichelt dargestellt.

Der Einfluss der Gewichtsfunktion zeigt sich noch deutlicher in Fig. 3, wo die Fehler als Funktion der Zeit für die drei Fälle dargestellt sind. Man sieht gut, wie die Gewichtsfunktion  $w(t) = e^{+\alpha t}$  die Approximation zwingt, für grosse Werte von  $t$  sich der gegebenen Kurve anzupassen, während die Gewichtsfunktion  $e^{-\alpha t}$  gerade den umgekehrten Effekt hat.

Durch Berücksichtigung von mehr Gliedern in der Approximation (z. B.  $N = 8$ ), lässt sich die Kurve mit Zeichengenauigkeit annähern.

## 7. Herleitung der Laplacetransformation der Laguerre-Funktionen

Wohl eine der attraktivsten Eigenschaften der Laguerre-Funktionen ist die Tatsache, dass sie eine einfache Laplace-transformierte besitzen, und dass sie deshalb leicht mittels Analogcomputer oder elektrischen Netzwerken nachgebildet werden können. Da die Herleitung der Laplacetransformierten

der verallgemeinerten Laguerre-Funktionen, soweit es dem Verfasser bekannt ist, nirgends in der Literatur zu finden ist, sei sie im folgenden kurz erwähnt.

Es sei

$$y(t) = e^{-t} \cdot L_n(mt) \quad (27)$$

Dann ist definitionsgemäss die Laplacetransformierte:

$$L(y(t)) = Y(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-t} L_n(mt) dt \quad (28)$$

Indem man für  $mt = \xi$  substituiert, kann man  $L_n(mt)$  gemäss Gl. (5) ausdrücken als:

$$L_n(\xi) = \frac{1}{n!} e^\xi \cdot \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi} \cdot \xi^n) \quad (29)$$

Der letzte Term in Gl. (29) kann geschrieben werden als:

$$(e^{-\xi} \cdot \xi^n)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 i! \cdot (-1)^{n-i} e^{-\xi} \cdot \xi^{n-i} \quad (30)$$

Substituiert man Gl. (30) in Gl. (29) und dann in Gl. (28), so erhält man:

$$Y(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-t} \cdot \frac{1}{n!} e^{mt} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 i! \cdot (-1)^{n-i} e^{-mt} (mt)^{n-i} dt \quad (31)$$

Vertauscht man Summation und Integration, so ergibt sich:

$$Y(s) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 i! \cdot (-m)^{n-i} \int_0^\infty e^{-t(s+1)} t^{n-i} dt \quad (32)$$

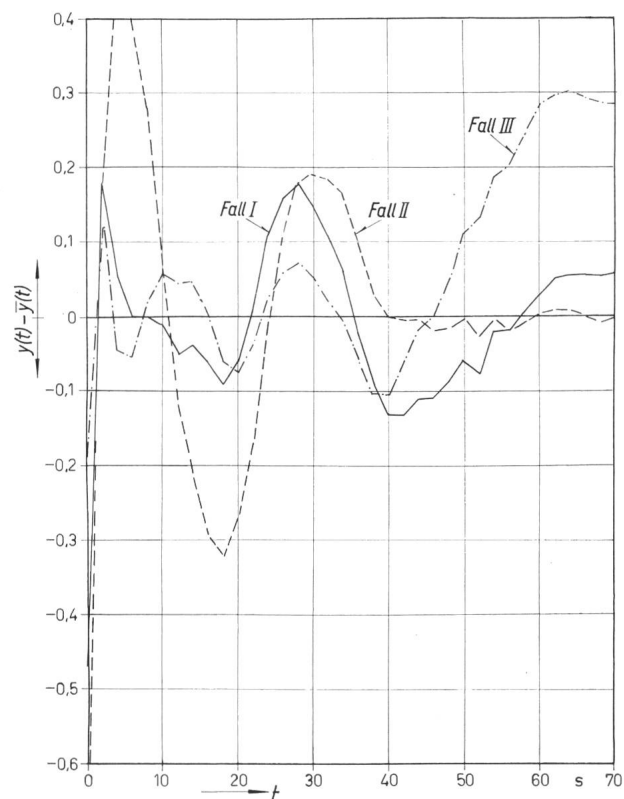


Fig. 3  
Fehler in der Approximationsfunktion als Funktion der Zeit

$$e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$$

—  $e(t)$  für Fall I [ $w(t) = 1$ ];      - - - - -  $e(t)$  für Fall II  
[ $w(t) = e^{+\alpha t}$ ];      - · - · -  $e(t)$  für Fall III [ $w(t) = e^{-\alpha t}$ ]



Für den Wert des Integrales in Gl. (32) findet man in Tabellen, z. B. [10, S. 820]:

$$\int_0^{\infty} e^{-t(s+1)} t^{n-i} dt = \frac{(n-i)!}{(1+s)^{n-i+1}} \quad (33)$$

Substituiert man Gl. (33) in Gl. (32), so findet man:

$$Y(s) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 i! \cdot (-m)^{n-i} \frac{(n-i)!}{(1+s)^{n-i+1}} \quad (34)$$

oder

$$Y(s) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(1+s)^{n+1}} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 i! \cdot (n-i)! \cdot (-m)^{n-i} (1+s)^i \quad (35)$$

oder

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^{n+1}} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-m)^{n-i} (s+1)^i \quad (36)$$

Die Summe im obigen Ausdruck ist aber nichts anderes als:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-m)^{n-i} (s+1)^i = (s+1-m)^n \quad (37)$$

so dass man für die Laplacetransformierte der Laguerre-Funktion schliesslich findet:

$$L(e^{-x} \cdot L_n(mx)) = \frac{(s+1-m)^n}{(s+1)^{n+1}} \quad (38)$$

Für den wichtigen Spezialfall, wo  $m = 2$  ist, ergibt sich:

$$L[e^{-x} \cdot L_n(2x)] = \frac{(s-1)^n}{(s+1)^{n+1}} \quad (39)$$

## 8. Nachbildung der Laguerre-Funktionen auf dem Analogrechner

Es sei im folgenden wieder angenommen, die Zeitfunktion laute

$$y(t) = e^{-t} \cdot L_n(2t) \quad (40)$$

Ihre Laplacetransformierte ist durch Gl. (39) gegeben. Es soll eine Analogcomputerschaltung gefunden werden, welche diese Funktion erzeugt. Es wurde zum Beispiel vorgeschlagen [11], diese Funktion im Prinzip durch Serieschaltung von Elementen von der Form  $(s-1)/(s+1)$  und einem Element  $1/(s+1)$  zu erzeugen. Diese Art, Laguerre-Funktionen mittels Analogrechnern zu erzeugen, kann aber nicht empfohlen werden, da diese Schaltung zu Instabilität neigt und für Rauschen anfällig ist. Dean [5] schlug vor, die Laplacetransfor-

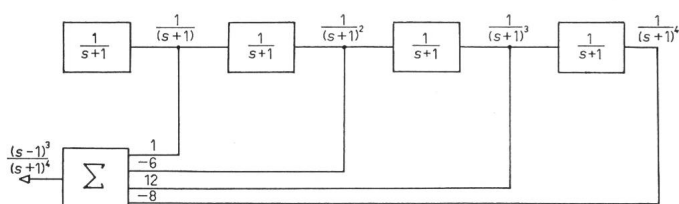


Fig. 4

Blockschaltbild für die Darstellung der Laguerre-Funktionen auf einem Analogrechner

Die resultierende Zeitfunktion dieser Schaltung ist:  $y(t) = e^{-t} \cdot L_3(2t)$

mierte in Partialbrüche zu zerlegen. Es lässt sich (durch mathematische Induktion), beweisen, dass:

$$\frac{(s-1)^n}{(s+1)^{n+1}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} (-2)^k \frac{1}{(s+1)^{k+1}} \quad (41)$$

Die rechte Seite von Gl. (41) lässt sich auf einem Analogrechner ohne Schwierigkeiten, durch den ausschliesslichen Gebrauch von linearen Elementen stabil nachbilden. Fig. 4 zeigt das Blockschaltbild für die Analogrechner-Nachbildung der Funktion

$$y(t) = e^{-t} \cdot L_3(2t) \quad (42)$$

Ein Beispiel für die Analogrechner-Realisierung einer Kurvenapproximation ist in [12] gegeben.

Tabelle III gibt die Koeffizienten für die Nachbildung der Laguerre-Funktionen bis zur sechsten Ordnung.

Koeffizienten  $b_k$  für die Partialbruchzerlegung der Funktion  $(s-1)^n/(s+1)^{n+1}$

Tabelle III

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	-2					
2	1	-4	4				
3	1	-6	12	-8			
4	1	-8	24	-32	16		
5	1	-10	40	-80	80	-32	
6	1	-12	60	-160	230	-192	64

$$\frac{(s-1)^n}{(s+1)^{n+1}} = \sum_{k=0}^n b_k \frac{1}{(s+1)^{k+1}}$$

## Literatur

- [1] Y. W. Lee: Synthesis of Electric Networks by Fourier Transformations of Laguerre's Functions. J. Math. Phys. Mass. Inst. Technology 11(1932)-, S. 83...113.
- [2] J. W. Head: Approximation to Transients by Means of Laguerre Series. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Part IV, 52(1956)-, S. 640...651.
- [3] J. W. Head and W. P. Wilson: Laguerre Functions, Tables and Properties. Proc. IEE, Part C Monographs, 103(1956)-, S. 428...440.
- [4] J. W. Head and G. M. Oulton: Coefficients for Decomposition of Functions into Laguerre Function Series. Proc. IEEE, Part C Monographs 105(1958)-, S. 55...56.
- [5] W. C. Dean: Seismological Applications of Orthogonal Function Expansions. Semi-Annual Technical Summary Report. Prepared for Geophysical Research Directorate, US Air Force Office of Scientific Research, Washington 1963.
- [6] E. N. Laguerre: Sur l'intégrale  $\int_0^{\infty} e^{-x/x} dx$ , Bulletin de la Société mathématique de France 7(1879)-, S. 72...81.
- [7] Jahnke/Emde: Tables of Higher Functions. Teubner Stuttgart 1952.
- [8] C. Lanczos: Applied Analysis. Prentice-Hall, Englewood 1956.
- [9] A. Abramowitz and I. Stegun: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, Washington 1964.
- [10] G. A. Korn and T. M. Korn: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Mc Graw-Hill, New York 1961.
- [11] E. Mishkin and L. Braun: Adaptive Control Systems. Mc Graw-Hill Electrical and Electronic Engineering Series. Mc Graw-Hill New York 1961.
- [12] H. G. Bürgin: Function Generation on an Analog Computer Using Generalized Laguerre Functions. Simulation 3(1965)3, S. 152...156.

## Adresse des Autors:

Dr. G. H. Bürgin, General Dynamics/Convair, San Diego (Kalifornien) (USA).