Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 54 (1963)

Heft: 19

Artikel: Die digitale Berechnung von Ausgleichsvorgängen in elektrischen Netzwerken unter besonderer Berücksichtigung komplizierter Randschaltungen

Autor: Althammer, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-916514

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

Gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV) und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)

Die digitale Berechnung von Ausgleichsvorgängen in elektrischen Netzwerken unter besonderer Berücksichtigung komplizierter Randschaltungen

Von *P. Althammer*, Baden

621.316.11.08.782.3

Zur Berechnung von Ausgleichsvorgängen in elektrischen Netzwerken bedient man sich häufig eines nach Bergeron benannten Wanderwellenverfahrens. Der vorliegende Aufsatz beschreibt eine Erweiterung dieses Verfahrens, welche die Berücksichtigung von komplizierten Randschaltungen, besonders auch die Behandlung von Nichtlinearitäten, erlaubt. Die Ausführungen werden im Hinblick auf eine Programmierung auf einer digitalen Rechenmaschine formuliert. Einige Anwendungsbeispiele zeigen die Leistungsfähigkeit der Methode.

Pour le calcul des phénomènes transitoires survenant dans les réseaux électriques, on se sert souvent du procédé dit des ondes mobiles de Bergeron. Le présent travail décrit une extension de ce procédé qui, en considérant certains circuits de couplage d'extrémité complexes, permet également d'envisager le cas de non linéarités. Les représentations sont formulées en un sens tel qu'il soit possible de les programmer sur une calculatrice numérique. Par ailleurs, des exemples pratiques illustreront la validité et la portée de la méthode.

1. Einleitung

Die Berechnung von elektromagnetischen Ausgleichsvorgängen in elektrischen Netzwerken hat in den letzten Jahren in steigendem Masse an Bedeutung gewonnen. Bei der immer weiter fortschreitenden Vermaschung der elektrischen Netze und den immer höheren Betriebsspannungen wird es unerlässlich, ein Bild von den Überspannungsvorgängen zu erhalten, die nach Schaltmanövern und Störungsfällen, wie Blitzeinschlägen usw., zu erwarten sind.

Eine mathematische Methode zur Behandlung solcher Ausgleichsvorgänge, die schon seit längerer Zeit erfolgreich verwendet wird, ist ein in der technischen Literatur meist nach *Bergeron* [1][1]) benanntes Wanderwellenverfahren[2]). Über dieses Verfahren existiert bereits eine umfangreichere Literatur. Ein kürzlich erschienener Aufsatz von *Prinz*, *Zaengl* und *Völcker* [2] gibt eine gute Übersicht über die Methode und ausserdem eine Zusammenstellung der über diesen Gegenstand vorhandenen Literatur.

Das Bergeron-Verfahren ist ursprünglich als ein graphisches Verfahren entwickelt worden. Der erforderliche Aufwand wird aber bei komplizierteren Netzkonfigurationen rasch so gross, dass man sich bei einer graphischen Bearbeitung auf relativ einfache Schaltungen beschränken muss. Insbesondere wird die Behandlung von nichtlinearen Schaltungen sehr mühsam. Aus diesem Grunde drängt sich eine analytische Formulierung der Methode auf, um einen Einsatz von digitalen Rechenautomaten und damit die Behandlung komplizierterer Fälle zu ermöglichen.

In einem früheren Aufsatz [3] wurde bereits eine auf dem Bergeron-Verfahren aufbauende rein analytische Methode beschrieben, die als Grundlage für ein universelles Digitalprogramm zur Berechnung von elektromagnetischen Ausgleichsvorgängen diente. Diese Methode wurde in der Zwischenzeit in verschiedenen Richtungen weiterentwickelt. Der vorliegende Aufsatz soll eine Zusammenfassung der mathematischen Grundlagen des Verfahrens geben und an einigen Beispielen seine praktischen Möglichkeiten erläutern.

[1]) Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

[2]) Es sei jedoch bemerkt, dass die mathematischen Grundlagen dieses Verfahrens bereits weitgehend *Riemann* bekannt waren.

2. Die Grundlage der Theorie

Die Grundlagen der Theorie von *Bergeron* sind in der Literatur bereits öfters dargelegt worden (vgl. z. B. [1; 2]), so dass man sich mit einer knappen Zusammenfassung begnügen kann. Die Ausgleichsvorgänge auf einer verlustlosen Freileitung werden durch die bekannten Leitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L' \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C' \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

beschrieben. Hierin bedeuten $u(x, t)$ und $i(x, t)$ Spannung gegen Erde bzw. Strom, L' und C' die Induktivität bzw. Kapazität der Leitung pro Längeneinheit. Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen lautet:

$$\begin{aligned} i(x, t) &= F(x - v\,t) + f(x + v\,t) \\ u(x, t) &= Z \cdot F(x - v\,t) - Z \cdot f(x + v\,t) \end{aligned} \tag{2}$$

worin $F(y)$ und $f(y)$ zwei beliebige Funktionen einer Variablen y und

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}\,; \quad Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Vorgänge auf der Leitung bzw. den Wellenwiderstand bedeuten. In einem konkret

vorliegenden Fall müssten die Funktionen $F(y)$ und $f(y)$ aus den jeweiligen Rand- und Anfangsbedingungen bestimmt werden. Eine geschlossene Darstellung dieser Funktionen ist jedoch nur in einfacheren Fällen möglich.

Das Bergeron-Verfahren vermeidet die geschlossene Berechnung der Funktionen $F(y)$ und $f(y)$, vielmehr werden die Lösungen mittels eines Schrittverfahrens aufgebaut, das auch in komplizierteren Fällen zum Ziele führt. Der Grundgedanke besteht in der Ausnützung der durch Kombination der Gl. (2) folgenden Beziehungen:

$$u(x,t) + Z \cdot i(x,t) = \quad 2Z \cdot F(x - v\,t)$$
$$u(x,t) - Z \cdot i(x,t) = -2Z \cdot f(x + v\,t)$$

Diese Beziehungen besagen, dass für Punkte x, t der Ort-Zeit-Ebene, die nach $x - v\,t =$ konst. zusammenhängen, auch $u(x,t) + Z \cdot i(x,t) =$ konst. gilt; entsprechend ist $u(x,t) - Z \cdot i(x,t) =$ konst. für $x + v\,t =$ konst. Man pflegt diesen Umstand anschaulich so zu beschreiben, dass ein mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v bewegter «Beobachter» auf der Leitung Spannungen und Ströme feststellt, die einer Relation:

$$u(x,t) \pm Z \cdot i(x,t) = \text{konst.} \tag{3}$$

genügen. Diese linearen Beziehungen zwischen den Zuständen, d.h. den Spannungen und Strömen, sollen im folgenden als «Zustandsgleichungen» bezeichnet werden. Um den Zustand der Leitung für einen Punkt x_0, t_0 der Ort-Zeit-Ebene zu bestimmen, lässt man zu den Zeiten $t_1 = t_0 - \tau_1$ und $t_2 = t_0 - \tau_2$ in den beiden benachbarten Orten $x_1 = x_0 - v\,\tau_1$ und $x_2 = x_0 + v\,\tau_2$ zwei «Beobachter» mit der Geschwindigkeit v in Richtung auf x_0 starten, die beide zur Zeit t_0 in x_0 eintreffen, und bestimmt den Schnittpunkt der ihnen entsprechenden Zustandsgeraden:

$$u(x,t) + Z \cdot i(x,t) = u(x_1,t_1) + Z \cdot i(x_1,t_1)$$
$$u(x,t) - Z \cdot i(x,t) = u(x_2,t_2) - Z \cdot i(x_2,t_2)$$

Dieser Schnittpunkt liefert den Zustand der Leitung im Ort x_0 zur Zeit t_0. Vorauszusetzen ist hiebei, dass der Zustand für die Orte x_1, x_2 zu den Zeiten $t_1 = t_0 - \tau_1$, $t_2 = t_0 - \tau_2$ bereits bekannt war.

3. Die Berücksichtigung von Verbindungsschaltungen

Die Ausführungen des Abschnittes 2 berücksichtigten nur den einfachsten Fall einer Leitung ohne elektrische Schaltungen. In der Praxis befinden sich jedoch in einem Netzwerk stets noch irgendwelche Schaltungen, wie Generatoren, Transformatoren o. ä. Die Laufzeit der Wellen durch diese Schaltungen ist vernachlässigbar klein. Man kann die Schaltungen durch konzentrierte Elemente, etwa konzentrierte Ohmsche Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten, darstellen. Mathematisch werden sie durch Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben, die auch nichtlinearen Charakter besitzen können (z.B. bei Berücksichtigung der Sättigung). Im einfachen Fall von rein Ohmschen Widerständen treten an Stelle von Differentialgleichungen nur finite Gleichungen auf.

Der Einfachheit halber sollen zunächst nur Leitungssysteme ohne Verzweigungen betrachtet werden. Das Schema des Systems besitzt also die in Fig. 1 angegebene prinzipielle Gestalt. Das System umfasse l Freileitungen oder Kabel $l_1 \ldots l_l$, die als verlustlos vorausgesetzt und durch ihren Wellenwiderstand Z_j und die Laufzeit der Wellen τ_j charakterisiert

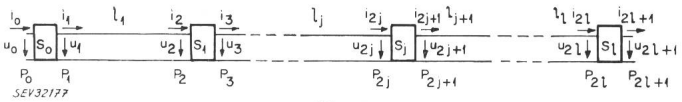


Fig. 1

Schema eines unverzweigten Leitungssystems mit l Leitungen $l_1 \ldots l_l$ und $l+1$ Schaltungen $S_0 \ldots S_l$

sind. Zwischen den Leitungen l_j und am Rande des Leitungssystems befinden sich $l+1$ Schaltungen $S_0, \ldots, S_l$ von konzentrierten Elementen. Während die Leitungen l_j durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden, sind die Schaltungen S_j durch Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen bzw. durch finite Gleichungen charakterisiert. Ausserdem müssen an den beiden Rändern P_0, P_{2l+1} Randbedingungen vorgegeben sein. Sie sollen in einer linearen Beziehung zwischen Spannung und Strom vorausgesetzt werden:

$$A_j(t) \cdot u_j(t) + B_j(t) \cdot i_j(t) = C_j(t) \tag{4}$$
$$j = 0, \quad 2l+1$$

Weiter wird angenommen, dass der Ausgleichsvorgang zur Zeit $t = 0$ durch ein Schaltmanöver oder eine Störung eingeleitet wird und der Zustand des Systems vor dieser Störung, d.h. für $t < 0$, bekannt ist. Mathematisch besteht die Aufgabe darin, die Leitungsgleichungen (1) unter den Anfangsbedingungen und den durch die Relationen in Gl. (4) und die Schaltungen S_j gegebenen Randbedingungen zu integrieren. Man kann sich darauf beschränken, die Spannungen $u_j(t)$ und die Ströme $i_j(t)$ in den unmittelbar an den Klemmen der Schaltungen S_j befindlichen Punkten $P_0, P_1, \ldots, P_{2l+1}$ (vgl. Fig. 1) für die Zeiten $0, h, 2h, \ldots, Nh$ zu berechnen. h ist hiebei die Schrittlänge des numerischen Verfahrens. Weiterhin sei vorausgesetzt, dass die Laufzeiten der Wellen τ_j ganzzahlige Vielfache der Schrittlänge h sind:

$$\tau_j = T_j\,h$$
$$T_j \text{ ganzzahlig}, \quad j = 1, \ldots, l$$

Zur Bestimmung der Zustände

$$\Psi_j(0) = [u_j(0), i_j(0)]$$

in den Punkten P_j, $j = 0, \ldots, 2l+1$, zur Zeit Null geht man wie folgt vor (ist erst der Zustand für $t = 0$ vollständig bestimmt, so kann man zur Berechnung des Zustandes für $t = h$ nach einer Zeittransformation $t^* = t - h$ in derselben Weise verfahren):

In jedem Punkt P_j besteht zur Zeit $t = 0$ zwischen Spannung $u_j(0)$ und Strom $i_j(0)$ eine bekannte Beziehung der Form:

$$a_j(0)\,u_j(0) + b_j(0)\,i_j(0) = c_j(0)$$
$$j = 0, \ldots, 2l+1$$

Die Koeffizienten $a_j(0)$, $b_j(0)$, $c_j(0)$ berechnen sich dabei nach folgendem Schema:

$$\begin{aligned}
a_0(0) &= A_0(0)\\
b_0(0) &= B_0(0)\\
c_0(0) &= C_0(0)\\
a_{2j-1}(0) &= 1\\
b_{2j-1}(0) &= -Z_j\\
c_{2j-1}(0) &= u_{2j}(-\tau_j) - Z_j\,i_{2j}(-\tau_j)\\
a_{2j}(0) &= 1\\
b_{2j}(0) &= Z_j\\
c_{2j}(0) &= u_{2j-1}(-\tau_j) + Z_j\,i_{2j-1}(-\tau_j)\\
&\quad j = 1, \ldots, l
\end{aligned}$$

$$a_{2l+1}(0) = A_{2l+1}(0)$$
$$b_{2l+1}(0) = B_{2l+1}(0)$$
$$c_{2l+1}(0) = C_{2l+1}(0)$$

Die oberen und die unteren drei Zeilen folgen hiebei sofort aus den Randbedingungen in Gl. (4), während man die mittleren Zeilen durch Spezialisierung der Zustandsgleichungen (3) erhält.

An den Klemmen P_{2j}, P_{2j+1} der Schaltung S_j bestehen also zwischen den vier Spannungen und Strömen $u_{2j}(0)$, $i_{2j}(0)$, $u_{2j+1}(0)$, $i_{2j+1}(0)$ zwei lineare Beziehungen:

$$a_{2j}(0) \quad u_{2j}(0) + \quad b_{2j}(0) \quad i_{2j}(0) = \quad c_{2j}(0) \qquad (5a)$$
$$a_{2j+1}(0)\, u_{2j+1}(0) + b_{2j+1}(0)\, i_{2j+1}(0) = c_{2j+1}(0) \qquad (5b)$$

Um diese vier Grössen berechnen zu können, sind noch zwei weitere Gleichungen erforderlich. Diese beiden Gleichungen werden durch den Vierpol S_j geliefert, der die Zustände Ψ_{2j} und Ψ_{2j+1} in einer für die jeweilige Gestalt der Schaltung typischen Weise miteinander verknüpft. Die rechnerische Behandlung dieser Verknüpfung kann auf verschiedene Arten erfolgen und soll in den nächsten Abschnitten erläutert werden.

4. Die Modifizierung der Zustandsgeraden

Eine erste Möglichkeit, das am Ende des vorigen Abschnittes angedeutete Problem zu behandeln, besteht in der «Modifizierung» der Zustandsgeraden (Gl. 5a, b). Ein einfaches Beispiel soll darlegen, was darunter verstanden wird:

Die Schaltung S_j bestehe aus einem Ohmschen Vierpol, d.h. enthalte lediglich passive lineare Ohmsche Widerstände. Ein solcher Ohmscher Vierpol kann durch seine Kettenmatrix:

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}$$

charakterisiert werden, die den Zusammenhang zwischen den Zuständen an den Ein- und Ausgangsklemmen herstellt:

$$\begin{aligned} u_{2j} &= A_{11}\, u_{2j+1} + A_{12}\, i_{2j+1} \\ i_{2j} &= A_{21}\, u_{2j+1} + A_{22}\, i_{2j+1} \end{aligned} \qquad (6)$$

Die Determinante von A muss stets gleich 1 sein. Setzt man die besonders auch für $t = 0$ geltende Beziehung (6) in die Zustandsgleichung (5a) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} &[A_{11}\, a_{2j}(0) + A_{21}\, b_{2j}(0)]\, u_{2j+1}(0) + \\ &\quad + [A_{12}\, a_{2j}(0) + A_{22}\, b_{2j}(0)]\, i_{2j+1}(0) = c_{2j}(0) \end{aligned} \qquad (7a)$$

Entsprechend erhält man, wenn man Gl. (6) zunächst nach u_{2j+1} und i_{2j+1} auflöst und dann in Gl. (5b) einsetzt:

$$\begin{aligned} &[A_{22}\, a_{2j+1}(0) - A_{21}\, b_{2j+1}(0)]\, u_{2j}(0) + \\ &\quad + [-A_{12}\, a_{2j+1}(0) + A_{11}\, b_{2j+1}(0)]\, i_{2j}(0) = c_{2j+1}(0) \end{aligned} \qquad (7b)$$

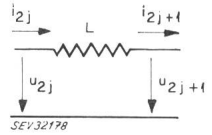
Die linearen Gleichungen (7a, b) sollen als die «Modifizierungen» der Zustandsgeraden in Gl. (5a, b) bezeichnet werden. Sie haben die prinzipielle Gestalt:

$$a'_{2j}(0)\, u_{2j+1}(0) + \quad b'_{2j}(0)\, i_{2j+1}(0) = \quad c'_{2j}(0) \qquad (8a)$$
$$a'_{2j+1}(0) \quad u_{2j}(0) + b'_{2j+1}(0) \quad i_{2j}(0) = c'_{2j+1}(0) \qquad (8b)$$

wobei die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a'_{2j}(0) &= A_{11}\, a_{2j}(0) + A_{21}\, b_{2j}(0) \\ b'_{2j}(0) &= A_{12}\, a_{2j}(0) + A_{22}\, b_{2j}(0) \\ c'_{2j}(0) &= c_{2j}(0) \\ a'_{2j+1}(0) &= A_{22}\, a_{2j+1}(0) - A_{21}\, b_{2j+1}(0) \\ b'_{2j+1}(0) &= -A_{12}\, a_{2j+1}(0) + A_{11}\, b_{2j+1}(0) \\ c'_{2j+1}(0) &= c_{2j+1}(0) \end{aligned}$$

Fig. 2
Eine konzentrierte Induktivität im Zuge der Leitung



lauten. Durch Auflösung der beiden Gleichungen (5a), (8b) kann man nun den Zustand $\Psi_{2j}(0)$ und aus Gl. (5b), (8a) den Zustand $\Psi_{2j+1}(0)$ bestimmen. Dieser numerischen Auflösung der linearen Gleichungen (5) und (8) entspricht bei graphischer Behandlung des Problems [1] der Schnitt der Zustandsgeraden in der Strom-Spannungs-Ebene.

Die soeben dargelegte Methode lässt sich im Sinne eines Näherungsverfahrens auch beim Auftreten von konzentrierten Induktivitäten und Kapazitäten anwenden. Der Grundgedanke der Methode sei am Beispiel einer in Serie in die Leitung eingeschalteten Induktivität erläutert (Fig. 2).

Zwischen den Ein- und Ausgangsgrössen der Schaltung bestehen die Beziehungen

$$u_{2j} = u_{2j+1} + L\,\frac{\mathrm{d}i_{2j+1}}{\mathrm{d}t} \qquad (9a)$$
$$i_{2j} = i_{2j+1} \qquad (9b)$$

In der oberen dieser Gleichungen ersetzt man den Differentialquotienten durch einen symmetrischen Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} &\frac{u_{2j}(0) + u_{2j}(-h)}{2} = \\ &= \frac{u_{2j+1}(0) + u_{2j+1}(-h)}{2} + L\,\frac{i_{2j+1}(0) - i_{2j+1}(-h)}{h} \end{aligned} \qquad (10)$$

Damit diese näherungsweise Ersetzung des Differentialquotienten zulässig ist, muss die Schrittlänge h genügend klein gewählt werden. Mittels der Gl. (9b) und (10) kann man in (5a) $u_{2j}(0)$ und $i_{2j}(0)$ bzw. in Gl. (5b) $u_{2j+1}(0)$ und $i_{2j+1}(0)$ eliminieren und erhält wieder «modifizierte» Zustandsgleichungen der Form (8a, b), wobei sich diesmal die Koeffizienten zu

$$a'_{2j}(0) = a_{2j}(0)$$
$$b'_{2j}(0) = b_{2j}(0) + \frac{2L}{h}\, a_{2j}(0)$$
$$\begin{aligned} c'_{2j}(0) &= \\ &= c_{2j}(0) - a_{2j}(0)\left[u_{2j+1}(-h) - u_{2j}(-h) - \frac{2L}{h}\, i_{2j+1}(-h)\right] \end{aligned}$$
$$a'_{2j+1}(0) = a_{2j+1}(0)$$
$$b'_{2j+1}(0) = b_{2j+1}(0) - \frac{2L}{h}\, a_{2j+1}(0)$$
$$\begin{aligned} c'_{2j+1}(0) &= \\ &= c_{2j+1}(0) - a_{2j+1}(0)\left[u_{2j}(-h) - u_{2j+1}(-h) + \frac{2L}{h}\, i_{2j}(-h)\right] \end{aligned}$$

berechnen. In der bereits früher beschriebenen Weise lässt sich nun der Zustand $\Psi_{2j}(0)$ und $\Psi_{2j+1}(0)$ bestimmen.

Das soeben erläuterte Verfahren kann im Prinzip auf jede Schaltung von linearen konzentrierten Elementen angewendet werden. Man hat dazu in der im obigen Beispiel beschriebenen Weise sämtliche auftretenden Differentialquotienten durch Differenzenquotienten zu ersetzen. Die Koeffizienten der modifizierten Zustandsgeraden (8a, b) berechnen sich dann in einer für die Schaltung charakteristischen Weise aus den Koeffizienten der ursprünglichen Zustandsgeraden (5a, b), den Konstanten der Schaltung, dem Zustand der Schaltung zur Zeit $-h$ und der Schrittlänge.

5. Simultane Integration eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Das in Abschnitt 4 erklärte Verfahren der Modifizierung besitzt einige Nachteile, die seine universelle Verwendbarkeit einschränken. Einesteils wird nämlich die Anwendung dieser Methode bei komplizierteren Schaltungen sehr mühsam, anderenteils lassen sich Nichtlinearitäten (Berücksichtigung der Sättigung o. ä.) in dieser Weise nicht ohne weiteres behandeln. In solchen Fällen erscheint es zweckmässiger, die Randbedingungen direkt zu berücksichtigen, indem man das gekoppelte Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen (1) unter den durch die Schaltung S_j gegebenen Randbedingungen schrittweise auflöst in die Integration eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen und die nachfolgende Bestimmung der Lösung der partiellen Differentialgleichungen.

Der Grundgedanke der Methode möge zunächst am bereits im vorigen Abschnitt behandelten einfachen Beispiel einer in Serie geschalteten konzentrierten Induktivität erläutert werden (vgl. Fig. 2). Für die Grösse $y = i_{2j} = i_{2j+1}$ gilt nach Gl. (9a) die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}\left[u_{2j}(t) - u_{2j+1}(t)\right] \tag{11}$$

Die Zustandsgleichungen (5a, b), die auch für eine beliebige Zeit t gelten, ergeben:

$$\begin{aligned} u_{2j}(t) &= \frac{c_{2j}(t) - b_{2j}(t)\cdot y(t)}{a_{2j}(t)} \\ u_{2j+1}(t) &= \frac{c_{2j+1}(t) - b_{2j+1}(t)\cdot y(t)}{a_{2j+1}(t)} \end{aligned} \tag{12}$$

Dies in Gl. (11) eingesetzt, liefert die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}\left[\frac{c_{2j}(t) - b_{2j}(t)\cdot y(t)}{a_{2j}(t)} - \frac{c_{2j+1}(t) - b_{2j+1}(t)\cdot y(t)}{a_{2j+1}(t)}\right] \tag{13}$$

Ausgehend von dem bekannten Wert $y(-h)$, kann man durch Integration dieser Differentialgleichung $y(0) = i_{2j}(0) = i_{2j+1}(0)$ bestimmen. $u_{2j}(0)$ und $u_{2j+1}(0)$ erhält man anschliessend nach Gl. (12). Man beachte, dass die in Gl. (13) auftretenden Koeffizientenfunktionen $a_{2j}(t), \ldots, c_{2j+1}(t)$ für $t \leq 0$ bekannt sind.

Das an diesem einfachen Beispiel skizzierte Verfahren kann auf Schaltungen beliebiger Gestalt angewendet werden. Das Problem muss sich dazu auf folgende mathematische Form bringen lassen:

Die Schaltung S_j sei durch m «Hilfsvariablen» $y_1(t), \ldots, y_m(t)$ (irgendwelche Ströme, Spannungen, zeitabhängige Widerstände o. ä.) charakterisiert, die einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}t} = f_k(y_1, \ldots, y_m, u_{2j}, i_{2j}, u_{2j+1}, i_{2j+1}, t) \tag{14}$$

$$k = 1, \ldots, m$$

Ausserdem müssen zwischen den Hilfsgrössen y_k und den Zuständen Ψ_{2j}, Ψ_{2j+1} an den Klemmen der Schaltung Zusammenhänge der Form

$$\varphi_{11}(y_1, \ldots, y_m, t)\, u_{2j} + \ldots + \varphi_{14}(y_1, \ldots, y_m, t)\, i_{2j+1} = \varphi_1(y_1, \ldots, y_m, t) \tag{15a}$$

$$\varphi_{21}(y_1, \ldots, y_m, t)\, u_{2j} + \ldots + \varphi_{24}(y_1, \ldots, y_m, t)\, i_{2j+1} = \varphi_2(y_1, \ldots, y_m, t) \tag{15b}$$

bestehen. Dann lassen sich die vier in den Funktionen u_{2j}, i_{2j}, u_{2j+1}, i_{2j+1} linearen Gleichungen (5a, b) (15a, b) nach diesen Grössen auflösen:

$$\left.\begin{aligned} u_{2j} &= \chi_1(y_1, \ldots, y_m, a_{2j}, \ldots, c_{2j+1}, t) \\ i_{2j} &= \chi_2(y_1, \ldots, y_m, a_{2j}, \ldots, c_{2j+1}, t) \\ u_{2j+1} &= \chi_3(y_1, \ldots, y_m, a_{2j}, \ldots, c_{2j+1}, t) \\ i_{2j+1} &= \chi_4(y_1, \ldots, y_m, a_{2j}, \ldots, c_{2j+1}, t) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Diese Relationen in Gl. (14) eingesetzt, ergibt für die Hilfsvariablen $y_1, \ldots, y_m$ ein Differentialgleichungssystem der Gestalt

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}t} = g_k(y_1, \ldots, y_m, a_{2j}, \ldots, c_{2j+1}, t),$$

$$k = 1, \ldots, m$$

Man kann nun, ausgehend von den als bekannt vorausgesetzten Werten $y_1(-h), \ldots, y_m(-h)$, den Zustand $y_1(0), \ldots, y_m(0)$ durch Integration dieses Gleichungssystems gewinnen. Die Integration wird man zweckmässigerweise mittels eines numerischen Näherungsverfahrens durchführen, etwa mittels des Verfahrens von *Euler-Cauchy* oder von *Runge-Kutta*. Bei Verwendung des Runge-Kutta-Verfahrens müssen jedoch die Werte der Funktionen $a_{2j}, \ldots, c_{2j+1}$ ausser für die Zeiten $-h$ und 0 auch noch für $t = -h/2$ bekannt sein.

Hat man in dieser Weise die Hilfsgrössen $y_1(0), \ldots, y_m(0)$ bestimmt, so liefern die Gl. (16) die Werte von Spannung und Strom an den Klemmen der Schaltung.

Mit der soeben beschriebenen Methode sollte es möglich sein, sämtliche in der Praxis auftretenden Typen von Verbindungsschaltungen zu behandeln. Besondere Bedeutung dürfte der Methode beim Vorhandensein von nichtlinearen Gliedern zukommen.

6. Leitungsverzweigungen

Die bisherigen Ausführungen bezogen sich lediglich auf die Berechnung von Ausgleichsvorgängen in unverzweigten Leitungen. Nur kurz soll auf die Behandlung von Leitungsverzweigungen eingegangen werden. Es möge dabei lediglich der einfache Fall besprochen werden, dass im Verzweigungspunkt keinerlei Schaltungen von konzentrierten Elementen vorhanden sind; doch lassen sich solche Schaltungen in einer ähnlichen Weise wie bei den Ausführungen der Abschnitte 4 und 5 berücksichtigen.

Wie Fig. 3 zeigt, möge der Verzweigungspunkt durch den Zusammenstoss von m Leitungen $l_1, \ldots, l_m$ entstehen. Jede der Leitungen l_j liefert für die zugehörige «Klemme» P_j des Verzweigungspunktes eine Zustandsgleichung zwischen Spannung und Strom

$$a_j u_j + b_j i_j = c_j$$

$$j = 1, \ldots, m$$

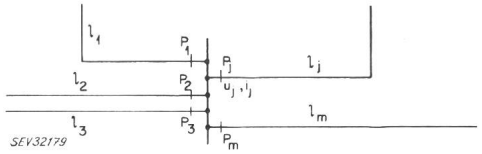


Fig. 3

Schema eines Verzweigungspunktes mit m zusammenstossenden Leitungen $l_1 \ldots l_m$

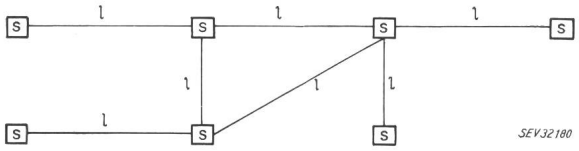


Fig. 4

Beispiel für die mit dem Programm behandelbaren Netzkonfigurationen

l Leitungen; *S* elektrische Schaltungen

Ausserdem gelten die Beziehungen:

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_m$$

und

$$\sum_k \varepsilon_k i_k = 0$$

wobei

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1\,, & \text{falls die positive Stromrichtung auf der Leitung } l_k \text{ auf den Verzweigungspunkt hin zeigt.} \\ -1\,, & \text{falls die positive Stromrichtung auf der Leitung } l_k \text{ vom Verzweigungspunkt weg zeigt.} \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Spannungen und Ströme in den Klemmen $P_1, \ldots, P_m$ zu:

$$u_j = \sum_k \varepsilon_k \frac{c_k}{b_k} : \sum_k \varepsilon_k \frac{a_k}{b_k}$$

und

$$i_j = \frac{c_j - a_j u_j}{b_j}$$

$$j = 1, \ldots, m$$

7. Ein digitales Rechenprogramm

Nach den in den vorangegangenen Abschnitten erläuterten Gesichtspunkten wurde ein universelles Digitalprogramm zur Berechnung von Ausgleichsvorgängen in elektrischen Netzwerken für den Rechner Siemens 2002 entwickelt. Eine erste Fassung dieses Programmes ist bereits in [3] beschrieben.

Mit diesem Digitalprogramm können beliebig vermaschte Netze behandelt werden, wie es in Fig. 4 für einen einfachen Fall angedeutet ist. Die am häufigsten auftretenden Grundschaltungen *S* sind fest programmiert und werden durch bestimmte Kennzahlen charakterisiert. Kompliziertere Schaltungen müssen von Fall zu Fall neu bearbeitet und in Form eines Unterprogrammes vorgegeben werden. Wegen der beschränkten Speicherkapazität der Maschine dürfen die Netze maximal 30 Leitungen *l* und 24 Knotenpunkte *S* umfassen.

Für jede Rechnung muss ein Datenstreifen hergestellt werden, der die Angaben über die Topologie des Netzes, die Konstanten der Schaltungen *S* und der Leitungen *l* usw. enthält. Die Vorbereitung dieses Streifens erfordert nur einen geringen Zeitaufwand.

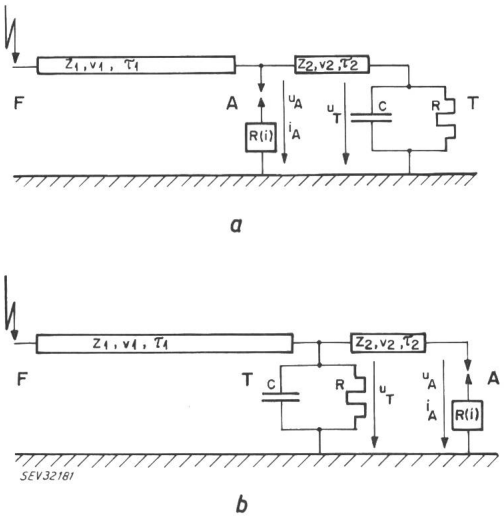


Fig. 5

Schema für die Untersuchung von Überspannungsvorgängen bei Blitzeinschlägen

T Transformator; *A* Ableiter; *F* Fehlerstelle

Daten: *a* $Z_1 = Z_2 = 500\,\Omega$; $R = 10\,000\,\Omega$; $v_1 = v_2 = 300$ m/µs; $\tau_1 = 1$ µs; $\tau_2 = 0{,}1$ µs; $C = 10^{-9}$ F

b wie *a*, jedoch $\tau_1 = 1{,}1$ µs

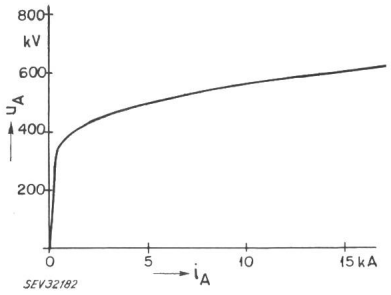


Fig. 6

Strom-Spannungs-Charakteristik des Ableiters HKF 228

8. Beispiele

8.1 Schutz eines Transformators durch einen Ableiter

Die Möglichkeiten und Leistungsfähigkeiten der im vorangegangenen geschilderten Methoden sollen an Hand einiger Beispiele illustriert werden. Als erstes Beispiel wird die Berechnung von Überspannungen betrachtet, die bei einem Blitzeinschlag in eine Freileitung an einem in der Nähe befindlichen Transformator zu erwarten sind.

Das Schema der betrachteten Anordnung ist in Fig. 5 wiedergegeben. Der Transformator *T*, der durch Wellenwiderstand *R* und Eingangskapazität *C* dargestellt ist, wird durch einen in einer Entfernung von 30 m befindlichen Ableiter *A* geschützt. Im ersten Fall (Fig. 5a) ist der Ableiter an der Freileitung vor dem Transformator angebracht, im zweiten Fall (Fig. 5b) hinter dem Transformator (etwa auf einer separaten Abzweigung von einer Sammelschiene). Im störungsfreien Betrieb wirkt der Ableiter als Isolator. Er spricht erst an, sobald durch eine Störung bedingt die Ansprechspannung überschritten wird. Während bei den bisher bekannt gewordenen Rechnungen vorausgesetzt wurde, dass die Restspannung unabhängig vom Strom oder zumindestens die Ansprechspannung unabhängig von der Frontsteilheit der einfallenden Welle ist, konnten diese Einschränkungen bei den im folgenden beschriebenen Rechnungen fallengelassen werden. In Fig. 6 ist die Abhängigkeit der Restspannung vom Ableitstrom und in Fig. 7 die Abhängigkeit der Ansprechspannung von der Steilheit der einfallenden Welle für den modernen Ableiter HKF 228 (Löschspannung 228 kV, Restspannung bei Nennableitver-

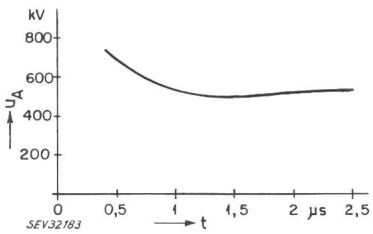


Fig. 7

Ansprechspannung u_A in Funktion der Frontdauer der einfallenden Welle für den Ableiter HKF 228

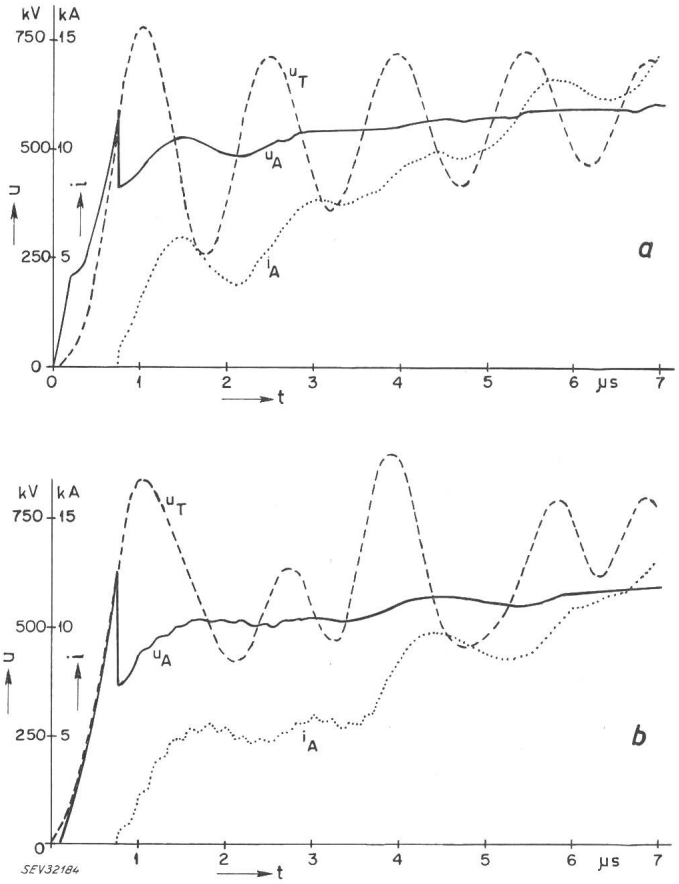


Fig. 8

Zeitlicher Verlauf von Transformatorspannung u_T, Ableiterspannung u_A und Ableiterstrom i_A (Steilheit der einfallenden Welle 1000 kV/μ_s)

a Anordnung nach Fig. 5*a*; *b* Anordnung nach Fig. 5*b*

mögen 570 kV) dargestellt, der den folgenden Rechnungen zu Grunde gelegt wurde.

Der Blitzeinschlag erfolge im Punkte *F* in einer Entfernung von 330 m vom Transformator. Es wird angenommen, dass an der Fehlerstelle die Spannung linear bis zu einem Wert von 1500 kV ansteigt, was einer oberen Grenze für das Isolationsniveau der Leitung entspricht. Nachher möge die Spannung konstant auf diesem Wert bleiben. Bezüglich der Steilheit des Spannungsanstieges wurden zwei Fälle, und zwar Gradienten von 1000 kV/μs bzw. 500 kV/μs, untersucht.

Für insgesamt vier Varianten wurden die Spannungsverläufe am Transformator u_T und über dem Ableiter u_A sowie der Ableitstrom i_A berechnet. Die Fig. 8a, b zeigen zwei Beispiele der erhaltenen Kurvenverläufe. Man erkennt deutlich den Moment des Ansprechens des Ableiters an dem in diesem Moment eintretenden Spannungseinbruch. Nachher steigt die Spannung über dem Ableiter wieder langsam an. Die Transformatorspannung schwingt um die Ableiterspannung, die Frequenz dieser Schwingungen wird in erster Näherung durch Leitungsinduktivität und Transformatorkapazität bestimmt. Da für die Variante nach Fig. 5b am Transformator zwei Leitungen angrenzen, erhält man zwei Frequenzen, deren Überlagerung die in Fig. 8b gezeigte Form ergibt.

Die am Transformator maximal auftretenden Spannungen sind für die verschiedenen behandelten Fälle in Tabelle I zusammengestellt; in Klammern sind die entsprechenden Ansprechspannungen beigefügt. Natürlich bewirkt die steilere einfallende Spannungswelle auch höhere Überspannungen. Weiter erkennt man, dass die Anordnung des Ableiters auf

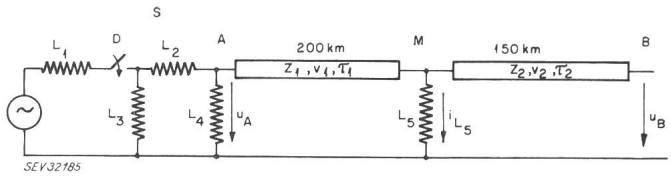


Fig. 9

Schema für die Untersuchung von Einschaltvorgängen auf einer 380-kV-Übertragung

Daten: $Z_1 = Z_2 = 385\ \omega$; $v_1 = v_2 = 300$ m/μs; $\tau_1 = 667$ μs; $\tau_2 = 500$ μs; $L_1 = 1{,}22$ H; $L_2 = 0{,}31$ H; $L_3 = 20$ H; $L_4 = 13{,}5$ H; $L_5 = 6{,}75$ H

der Freileitung vor dem Transformator vorteilhafter ist. Ein Grund hiefür ist darin zu suchen, dass bei der Anordnung nach Fig. 5b der Spannungsanstieg am Ableiter steiler ist und dadurch die Ansprechspannung höher liegt.

8.2 Einschaltvorgänge auf einer 380-kV-Übertragung

Schliesslich werden Überspannungsvorgänge beim Einschalten einer 380-kV-Übertragungsleitung betrachtet. Das der Rechnung zu Grunde gelegte Ersatzschema der Übertragung ist in Fig. 9 angegeben. Von der Station *S* geht eine 350 km lange Freileitung aus. Es wird der Fall untersucht, dass das Leitungsende in *B* offen ist; bekanntlich ergeben Ausgleichsvorgänge bei Reflexionen an einem offenen Ende die gefährlichsten Überspannungen. Am Leitungsanfang *A* und in der Leitungsmitte *M* sind Hochspannungsdrosselspulen L_4 und L_5 angebracht, die so bemessen sind, dass sie ca. 70% der Blindleistung kompensieren. Die Generatoren und Transformatoren der Station *S* werden durch ihren Leistungen entsprechende Induktivitäten L_1 und L_2 dargestellt. L_3 bezeichnet eine weitere Hochspannungsdrosselspule.

Die Wirkverluste der Freileitung von 0,05 Ω/km wurden durch zwei in die Leitung eingeschaltete konzentrierte Ohmsche Widerstände von insgesamt 17,5 Ω nachgebildet. Die Ohmschen Verluste der Generatoren, Transformatoren und Hochspannungsdrosselspulen wurden vernachlässigt.

Es wurden die Überspannungsvorgänge beim Einschalten des Schalters *D* untersucht; die Schaltung erfolge im Spannungsmaximum. Der Verlauf der Spannung am Leitungsanfang *A* und am Leitungsende *B* ist in Fig. 10a, b wiedergegeben (ausgezogene Kurven). Die angegebenen Amplituden beziehen sich auf das Einschalten einer Spannung von 1 V Scheitelwert. Die am offenen Ende *B* auftretenden Überspannungen betragen etwa das Doppelte der angelegten Spannung.

Man beobachtet deutlich, wie nach der doppelten Laufzeit durch die Leitung (2,33 ms) die am offenen Ende reflektierten Wellen wieder am Leitungsanfang eintreffen. Der weitere Verlauf der Spannungen ist durch die Überlagerung der erregenden Frequenz (50 Hz) und der Eigenfrequenz des Systems zu erklären. Wegen der als gering vorausgesetzten Dämpfung

Berechnete Maxima der Transformatorspannung u_T (in kV) für die verschiedenen Rechenvarianten (in Klammern sie die entsprechenden Ansprechspannungen beigefügt)

Tabelle I

Steilheit der einfallenden Welle kV/μs	Anordnung nach Fig. 5a	Anordnung nach Fig. 5b
500	645 (530)	765 (545)
1000	780 (600)	900 (630)

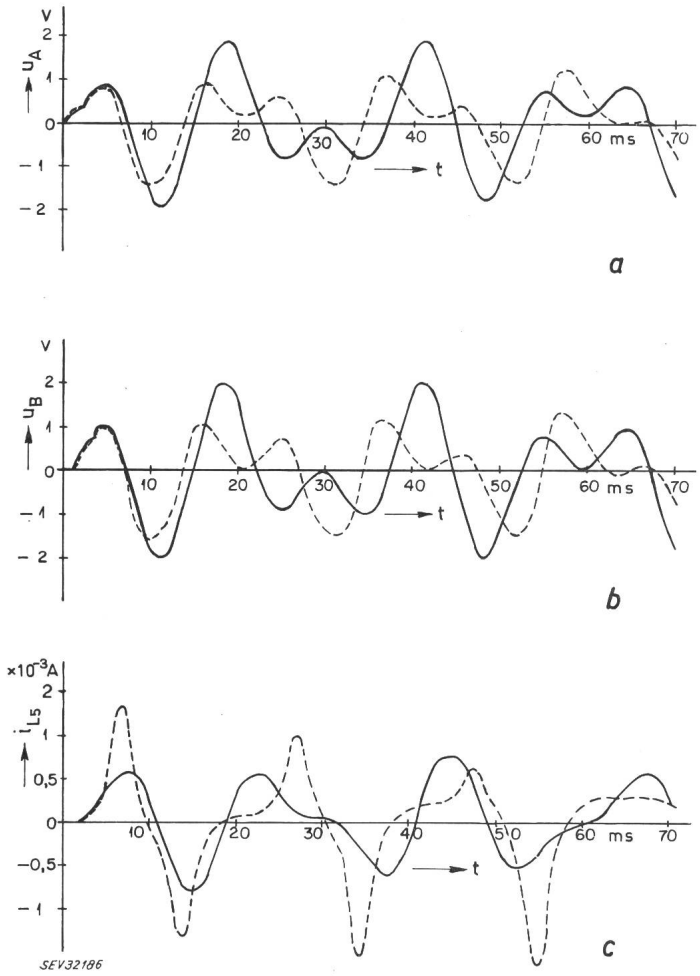


Fig. 10

Überspannungsvorgänge beim Einschalten einer 380-kV-Freileitung

——— Rechnung ohne Sättigung

- - - - - - Rechnung unter Berücksichtigung der Sättigung der Hochspannungsdrosselspulen

a Spannung am Leitungsanfang *A*; *b* Spannung am Leitungsende *B*; *c* Strom durch die Drosselspule L_5

klingt der Einschaltvorgang nur langsam ab. Innerhalb des bei der Rechnung betrachteten Zeitraums von 70 ms ist der stationäre Zustand noch nicht erreicht.

Bei einer weiteren Rechenvariante wurde die Sättigung der Hochspannungsdrosselspulen L_4 und L_5 berücksichtigt. Es wurden dazu die in Abschnitt 5 geschilderten mathematischen Methoden verwendet. In Fig. 11 ist die zu Grunde gelegte Sättigungskurve (Fluss Φ als Funktion des durch die Drosselspule fliessenden Stromes i_L, wieder bezogen auf 1 V Scheitelwert der eingeschalteten Spannung) angegeben. Das Resultat der Rechnung ist in Fig. 10 gestrichelt eingezeichnet. Man erkennt einen beachtlichen Einfluss der Sättigung. Die Überspannungen werden bedeutend reduziert und betragen am offenen Ende nur noch etwa das 1,6fache der eingeschalteten Spannung.

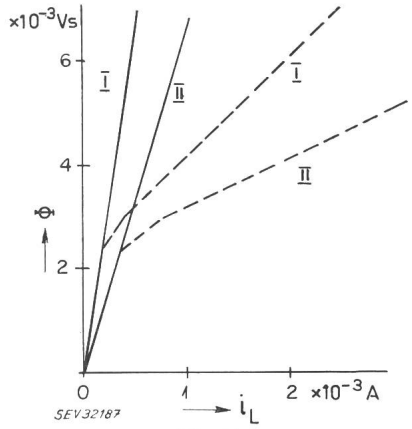


Fig. 11

Bezogene Sättigungskurven $\Phi = f(i_L)$ für die beiden Hochspannungsdrosselspulen L_4 und L_5

I Drosselspule L_4; *II* Drosselspule L_5

Zum Vergleich sind auch die linearen Charakteristiken wiedergegeben:

——— lineare Charakteristik,

- - - - - - gesättigte Charakteristik

Um einen weiteren Vergleich zwischen gesättigter und ungesättigter Drosselspule zu ermöglichen, ist für diese beiden Fälle in Fig. 10c der Strom durch die Drosselspule in der Leitungsmitte aufgetragen. Im gesättigten Fall zeigt der Stromverlauf das von nichtlinearen Schwingkreisen bekannte Verhalten.

9. Schlussfolgerungen

Bereits die wenigen hier angeführten Beispiele lassen erkennen, dass es heute möglich ist, auch komplizierte Ausgleichsvorgänge in elektrischen Netzwerken mittels rein mathematischer digitaler Methoden zu behandeln. Die Hauptarbeit ist hiebei für die Aufstellung eines universellen Digitalprogrammes aufzuwenden. Liegt ein solches Rechenprogramm fertig ausgeprüft vor, so erfordert die Durchrechnung eines besonderen Falles nur einen geringen Zeitaufwand. Als Vorteil der Digitalrechnung gegenüber einer Untersuchung auf einem Schwingungsnetzmodell ist insbesondere hervorzuheben, dass die Vorbereitungszeit gering ist, die Rechnung jederzeit wiederholt werden kann und der gedruckt vorliegende Daten- und Resultatstreifen eine leichte Kontrolle der Rechnung ermöglicht.

Literatur

[1] *Bergeron, L.:* Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité. Paris: Dunod 1950.

[2] *Prinz, H., W. Zaengl* und *O. Völcker:* Das Bergeron-Verfahren zur Lösung von Wanderwellenaufgaben. Bull. SEV 53(1962)16, S. 725...739.

[3] *Frey, W.* und *P. Althammer:* Die Berechnung elektromagnetischer Ausgleichsvorgänge auf Leitungen mit Hilfe eines Digitalrechners. Brown Boveri Mitt. 48(1961)5/6, S. 344...355.

Adresse des Autors:

Dr. *P. Althammer,* Mathematiker, AG Brown, Boveri & Cie., Baden (AG).