

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 53 (1962)

Heft: 1

Artikel: Vergleich dreier elektronischer Rechenmethoden für die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme

Autor: Bürgin, H.G.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-916901>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Vergleich dreier elektronischer Rechenmethoden für die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme

Von H. G. Bürgin, Zollikerberg

518.5 : 517.91

Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen können mit Hilfe von Analogierechengeräten, digitalen Allzweckrechnern oder digitalen Differentialanalysatoren (DDA) gelöst werden. Der erste Teil dieser Arbeit beschreibt den DDA, seine Wirkungsweise wird anhand der Differentialgleichung $y' = -y$ erklärt. Der Zusammenhang zwischen Rechengenauigkeit und Skalierung wird diskutiert. Gemeinsame Merkmale von Analogierechenanlagen und DDA sowie prinzipielle Unterschiede zwischen diesen beiden Rechenmaschinentypen werden erklärt. Der zweite Teil zeigt, wie ein einfaches Problem aus der mechanischen Schwingungslehre mit allen drei Rechenmethoden gelöst werden kann. Schliesslich werden die drei Methoden in Bezug auf Rechengeschwindigkeit, Rechengenauigkeit und Programmierungsaufwand miteinander verglichen.

1. Einleitung

Die mathematische Formulierung vieler technischer Probleme (z. B. elektrische und mechanische Schwingungsprobleme) führt auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, die sehr oft nichtlinear sind. Zur Lösung dieser Differentialgleichungen können drei Typen von elektronischen Rechenmaschinen eingesetzt werden. Zwei davon, die Analogierechenmaschine und der digitale Allzweckrechner, sind allgemein bekannt, der dritte Typ, der digitale Differentialanalysator (im folgenden kurz DDA genannt), soll hier in seiner Funktionsweise kurz beschrieben werden.

In einem zweiten Teil wird gezeigt, wie ein Problem aus der mechanischen Schwingungslehre mit jeder dieser drei Methoden gelöst werden kann und welches die Vor- und Nachteile der verschiedenen Verfahren sind.

2. Der digitale Differentialanalysator

2.1 Historische Entwicklung

Digitale Differentialanalysatoren sind seit etwas mehr als zehn Jahren bekannt. Sie wurden entwickelt, weil einerseits die Genauigkeit elektronischer Analogierechengeräte bei der Behandlung nichtlinearer Regelkreise, wie sie vor allem bei Problemen der Steuerung von Fernlenkwaffen und Raketen auftreten, oft nicht ausreicht und weil anderseits die Programmierung solcher Probleme auf digitalen Allzweckrechnern, welche im allgemeinen die geforderte Genauigkeit liefern, kompliziert und zeitraubend ist bzw. weil vor allem die Rechenzeiten bei der Verwendung von numerischen Methoden für die Lösung komplizierter Differentialgleichungssysteme etwas zu lang werden.

Der erste DDA, die «MADDIDA» der Northrop Aircraft, erschien vor elf Jahren auf dem Markt. Es scheint, dass dieser erste DDA nicht ganz befriedigend arbeitete, teilweise wegen ungenügenden Toleranzen in den Komponenten (wodurch Fehlrechnungen entstanden), teilweise wegen der rein dualen Daten-Ein- und Ausgabe, wodurch ein rationelles Arbeiten erschwert wurde [1]¹). Es folgten dann eine Reihe weiterer verbesselter Fabrikate, so z. B. 1954 der D-12 der Bendix Aviation Corp. In Europa ist ein D-12 im elektronischen Rechenzentrum der Universität Neapel, welches unter der Leitung von Prof. Savastano steht, in Betrieb. Es folgte ein DDA der Computer Research Corp. (CRC

Les systèmes d'équations différentielles ordinaires peuvent être résolus à l'aide de calculateurs analogiques, de calculateurs numériques d'emploi général ou d'analyseurs différentiels numériques (ADN). Dans la première partie de cet article, l'auteur décrit l'ADN, dont il explique le fonctionnement pour l'équation différentielle $y' = -y$, puis il discute de la relation entre la précision du calcul et la mise en échelles. Il indique quelles sont les caractéristiques communes aux calculateurs analogiques et à l'ADN, ainsi que les différences de principes entre ces types de machines à calculer. Dans la deuxième partie, il montre comment un simple problème d'oscillations mécaniques peut être résolu selon les trois méthodes de calcul. Pour terminer, ces trois méthodes sont comparées entre elles, des points de vue de la rapidité et de la précision du calcul, ainsi que du travail de programmation.

105). Packard Bell entwickelte das volltransistorisierte Modell «TRICE» und im vergangenen Jahr schliesslich beendigte das Royal Aircraft Establishment, Farnborough, England die Entwicklungen an einem eigenen DDA, dem CORSAIR [2]. Diese Zusammenstellung von DDA-Modellen ist keineswegs vollständig, sie will lediglich darauf hinweisen, dass seit dem Erscheinen des «MADDIDA» der DDA ständig weiterentwickelt und fabriziert wird.

Unter den DDA nimmt der Bendix DA-1 insofern eine besondere Stellung ein, als er nicht ein selbständiges Rechengerät, sondern ein Zusatzgerät zum Bendix Magnettrommelrechner G-15 ist und nur mit dem G-15 zusammengekoppelt betrieben werden kann.

2.2 Prinzip und Wirkungsweise des DDA

Das Grundelement des DDA bildet der Integrator. Ein Integrator kann vorerst als black-box aufgefasst werden (Fig. 1). Demnach besitzt jeder Integrator zwei Eingänge, einen ersten für die Inkremente der unabhängigen Integrationsvariablen dx , einen zweiten für Inkremente der abhängigen Integrationsvariablen dy , sowie einen Ausgang, der die Inkremente dz liefert. Im

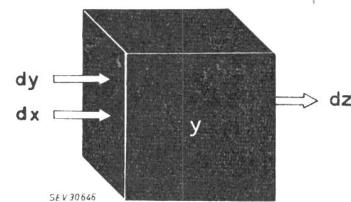


Fig. 1
Der Integrator als «Black-Box»

Der Inhalt des Integrators ist y . Eingänge zum Integrator bilden die beiden Grössen dx und dy . Der Ausgang ist dz

Integrator gespeichert ist der momentane Wert der Integrationsvariablen, also y . Zwischen diesen Grössen sollen folgende Beziehungen erfüllt sein:

$$y = y_0 + \Sigma dy \quad (1)$$

$$dz = k y dx \quad (2)$$

Integratoren, die Gl. (1) und (2) erfüllen, sind schon lange bekannt, dazu gehört z. B. der Scheibenintegrator von Bush, der vor etwa 30 Jahren am MIT gebaut wurde [3]. Fig. 2 zeigt die Prinzipskizze eines Scheiben-

¹⁾ Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

integrators; Eingänge dieses Integrators sind der Drehwinkel der vertikalen Welle und der Abstand der vertikalen Scheibe vom Zentrum. Ausgangsgröße ist der Drehwinkel z der horizontalen Welle. Man sieht leicht, dass Gl. (2) erfüllt ist, wenn man

$$K = \frac{1}{k}$$

setzt.

Im Gegensatz zum mechanischen Integrator von Bush, der in die Klasse der analogen Geräte gehört, erfolgt beim DDA die Integration numerisch, die Inkremente dx , dy und dz sind diskrete Zahlen. Im Prinzip

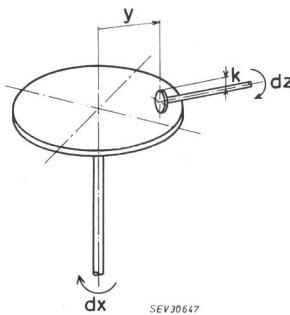


Fig. 2
Scheibenintegrator nach Bush
Zwischen den Drehwinkeln der vertikalen und der horizontalen Welle gilt folgende Gleichung:
 $ydx = kdz$

besteht beim DDA ein Integrator aus drei Registern, wie dies in Fig. 3 dargestellt ist. Das erste, üblicherweise mit Y-Register bezeichnet, akkumuliert algebraisch die dy -Eingangsinkremente. Im zweiten Register, dem R-Register, wird jedesmal, wenn der Integrator einen dx -Eingangsimpuls erhält, der momentane Inhalt des Y-Registers zum bereits vorhandenen Inhalt des R-Registers addiert. Überschreitet dabei der Inhalt des R-Registers den Wert +1, so gibt das R-Register einen Ausgangsimpuls dz von der Grösse 1 dz ab und behält als neuen Inhalt des R-Registers nur noch den Rest. Wird bei der Addition des Inhaltes des Y-Registers zum Inhalt des R-Registers dessen Wert kleiner als Null, so gibt es einen Ausgangsimpuls von der Grösse $-1 dz$ ab. Auch bei dieser Operation bleibt der Rest im R-Register erhalten.

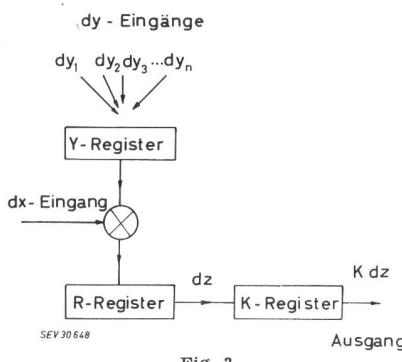


Fig. 3

Prinzipieller Aufbau des Integrators in einem DDA

Im Y-Register werden die dy -Eingänge algebraisch summiert. Ein dx -Impuls bewirkt die Addition des Y-Registers zum Inhalt des R-Registers. Überfluss im R-Register gibt den Impuls $\pm dz$, welcher mit dem Wert K multipliziert die Ausgangsgröße Kdz liefert

Am leichtesten wird die Arbeitsweise eines DDA-Integrators verständlich, wenn man sich an Hand eines numerischen Beispieles jeden Schritt bei der Lösung einer Differentialgleichung überlegt. Sehr gut eignet sich dazu die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -y \quad (3)$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$.

Diese Differentialgleichung benötigt zu ihrer Lösung einen einzigen Integrator. Fig. 4a zeigt das Schalt- schema für die Lösung dieser Gleichung mit den beim DDA gebräuchlichen Symbolen. Wie man sofort aus Fig. 4a ablesen kann, gilt:

$$dy = dz = -y dx \quad (4)$$

womit Gl. (3) erfüllt ist. Für die vorliegende Aufgabe muss im Y-Register des Integrators zur Zeit $t = 0$ der Anfangswert von y , also y_0 gespeichert sein.

Fig. 4b zeigt nochmals dieselbe Schaltung, jetzt ist aber der Integrator als ein Gebilde aus einzelnen Registern dargestellt. Ein im DDA selbst enthaltener Generator liefert in zeitlich konstanten Abständen (beim DA-1 zirka alle 30 ms) einen Impuls, welcher als dx -Eingangsimpuls verwendet wird. Im Y-Register ist

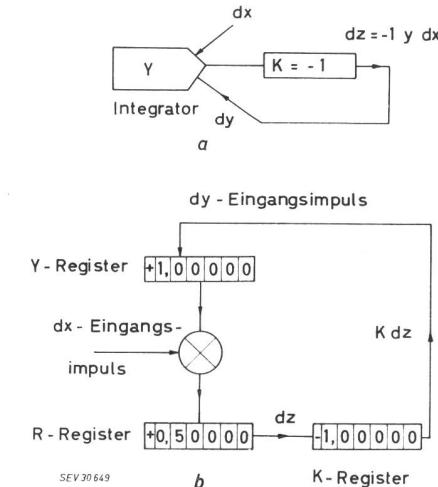


Fig. 4
Schaltung des DDA zur Lösung der Differentialgleichung
 $y' = -y$; $y(0) = +1$

a Prinzipschema; b Registerinhalte zur Zeit $t = 0$

der Anfangswert y_0 gespeichert, im besprochenen Falle soll $y_0 = 1$ sein. Das R-Register enthält zu Beginn der Rechnung den Wert 0,5; es wird sich weiter unten zeigen, welchen Zweck diese Zahl erfüllt.

Funktionsverlauf bei der Integration der Differentialgleichung
 $y' = -y$ bei einer Skalierung von $dy = 0,1$

Tabelle I

Zahl der Integrations- schritte n	Inhalt des Y-Registers y	Inhalt des R-Registers R	Wert des Ausgangsimpulses $K dz$
0	1,0	0,5	— 0,1
1	0,9	0,5	— 0,1
2	0,8	0,4	— 0,1
3	0,7	0,2	— 0,1
4	0,7	0,9	0
5	0,6	0,6	— 0,1
6	0,5	0,2	— 0,1
7	0,5	0,7	0
8	0,4	0,2	— 0,1
9	0,4	0,6	0
10	0,3	0	— 0,1
11	0,3	0,3	0
12	0,3	0,6	0

Tabelle I gibt den zeitlichen Ablauf des Rechenvorganges wieder, in der ersten Kolonne findet man die Zahl der Integrationsschritte, in der zweiten die nach dem n -ten Schritt sich im Y-Register befindende Zahl; die dritte Kolonne enthält den Wert des R-Registers zwischen dem n -ten und dem $n+1$ -ten Integrations schritt, die vierte schliesslich zeigt, ob nach dem n -ten Schritt der Integrator einen Ausgangsimpuls abgegeben hat (d. h. ob bei der Addition des Y-Registers zum R-Register in diesem ein Überfluss entstanden ist).

Kurve *a* in Fig. 5 zeigt den Verlauf der Funktion $y = f(x)$ entsprechend den in Tabelle I berechneten Werten. Wäre zur Zeit $t = 0$ im R-Register anstatt 0,5 der Wert 0 gestanden, so hätte die Funktion $y = f(x)$ am Anfang der Lösung stärker vom richtigen Wert abgewichen; da bei Beginn einer Rechnung der Inhalt des R-Registers zu- oder abnehmen kann, ist es sinnvoll, am Anfang seinen Wert in die Mitte des Bereiches, nämlich auf 0,5 zu stellen.

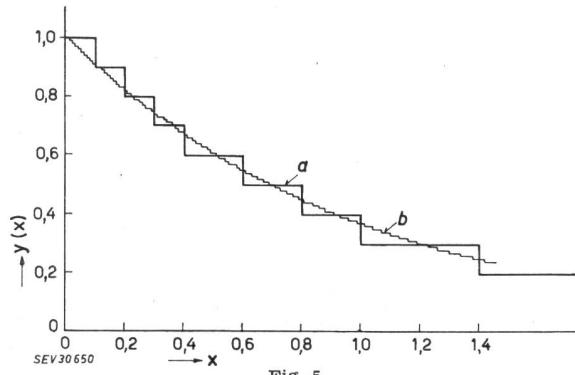


Fig. 5

Funktionsverlauf der Lösung nach der in Fig. 4 gezeigten Schaltung

- a* Skalierung: $dy = 0,1$; $dx = 0,1$
- b* Skalierung: $dy = 0,01$; $dx = 0,01$

Die Integratoren können auch in einer zweiten Operationsart verwendet werden, als sog. Entscheidungselemente. Ein solches Element gibt dann und nur dann einen Ausgangsimpuls ab, wenn im Y-Register eine von Null verschiedene Grösse gespeichert ist und ein dx -Impuls an den Integrator gelangt. Es gilt dann:

$$dz = \text{sign } y \text{ (für } y \neq 0)$$

und

$$dz = 0 \quad (\text{für } y = 0)$$

Jeder Integrator kann einen einzigen dx -Eingang empfangen, er kann hingegen beliebig viele dy -Eingänge verarbeiten. Der Ausgang jedes Integrators kann als dx - oder dy -Eingang in jedem beliebigen andern Integrator verwendet werden. Daraus geht hervor, dass nicht alle Integratoren die gleiche unabhängige Integrationsvariable haben müssen (bei rein elektronischen Analogrechenanlagen ist dies notwendigerweise immer die Zeit), sondern dass als unabhängige Integrationsvariable ein beliebiger Ausgang eines andern Integrators verwendet werden kann. Dank dieser Eigenschaft lassen sich auf dem DDA eine Reihe mathematischer Funktionen sehr elegant erzeugen (z. B. der Logarithmus). Eine grosse Anzahl von Schaltungsmöglichkeiten zur Funktionserzeugung gibt *Forbes* [4].

2.3 Skalierung

In Fig. 4b wurde der dy -Eingang beim Y-Register über die erste Stelle nach dem Dezimalkomma ge-

zeichnet. Damit ist angedeutet, dass ein dy -Eingangs impuls den Wert 0,1 haben soll. Es steht dem Benutzer eines DDA frei, dem Eingangsimpuls einen beliebigen Wert 10^{-x} zuzuordnen, wobei x beim DA-1 eine ganze Zahl zwischen 1 und 7 sein kann. Es ist leicht einzusehen, dass die Genauigkeit der Lösung von dieser Skalierung der dy -Eingänge abhängt, je kleiner die dy skaliert sind, umso genauer wird die Lösung. So kann man im letzten Beispiel dy zehn mal kleiner wählen, also 0,01; die dy -Eingänge wären jetzt an der zweiten Stelle nach dem Komma aufzusummieren. Ein dx -Inkrement besitzt dann noch die Grösse 0,01. Kurve *b* in Fig. 5 zeigt den Verlauf von $y(x)$ bei dieser neuen Skalierung. Man sieht, dass die Rechnung in diesem Falle zehn mal genauer ist, dass aber für die Durchrechnung der Lösung zehn mal mehr Rechenschritte notwendig werden (vgl. Tabelle II). Es folgt daraus der wichtige Schluss für die Skalierung des DDA:

Funktionsverlauf bei der Integration der Differentialgleichung
 $y' = -y$ bei einer Skalierung von $dy = 0,01$

Tabelle II

Zahl der Integrations schritte n	Inhalt des Y-Registers Y	Inhalt des R-Registers R	Wert des Ausgangsimpulses $K dz$
0	1,00	0,50	— 0,01
1	0,99	0,50	— 0,01
2	0,98	0,49	— 0,01
3	0,97	0,47	— 0,01
4	0,96	0,44	— 0,01
5	0,95	0,40	— 0,01
6	0,94	0,35	— 0,01
7	0,93	0,29	— 0,01
8	0,92	0,22	— 0,01
9	0,91	0,14	— 0,01
10	0,90	0,05	— 0,01
11	0,90	0,95	0
12	0,89	0,85	— 0,01

Einem dy -Inkrement kann ein beliebiger Wert zugeordnet werden. Große Werte für die dy ergeben grobe Approximation des Funktionsverlaufes in wenigen Rechenschritten (Kurve *a* in Fig. 5); kleinere Werte für dy ergeben entsprechend bessere Approximation der Lösungsfunktion und benötigen mehr Integrationsschritte (Kurve *b* in Fig. 5).

Da beim DDA die Rechenzeit genau proportional zur Anzahl der Integrationsschritte ist, folgt, dass die Rechenzeit sich umgekehrt proportional zur erreichten Genauigkeit verhält. Beim Skalieren legt also der Benutzer die Genauigkeit der Lösung und die Rechenzeit fest.

3. Vergleich des DDA mit dem Analogrechner

Einen wesentlichen Anstoß zur Entwicklung des DDA gab die Tatsache, dass man den Ingenieuren ein Gerät zur Verfügung stellen wollte, das die gleiche Leichtigkeit der Programmierung und vor allem die selbe Anschaulichkeit wie ein Analogrechengerät bieten, aber den Nachteil der geringen Genauigkeit nicht aufweisen sollte. Es liegt deshalb nahe, die verschiedenen gemeinsamen Merkmale des DDA und des Analogrechners zusammenzustellen.

Beide Geräte haben als Grundelement den Integrator, daneben Konstantenmultiplikatoren und Addierglieder. Das hat zur Folge, dass das Rechenschema

beim DDA und beim Analogrechner für viele Aufgaben genau gleich aufgebaut ist. Bei beiden Rechenmethoden können zum Beispiel Blockschaltbilder von Regelkreisen direkt auf die Rechenmaschine übertragen werden, wodurch eine äusserst übersichtliche Programmierung zustande kommt.

Ein zweites gemeinsames Merkmal beider Rechenmethoden ist die Art der Skalierung. Genau wie beim Analogrechner ist es auch beim DDA notwendig, so zu skalieren, dass alle Integratoren möglichst voll ausgesteuert werden; nur so erreicht man die grösstmögliche Genauigkeit. Vor allem beim Skalieren des DDA kommen einem Erfahrungen, die man beim Arbeiten mit Analogrechenmaschinen gewonnen hat, zugute.

Sowohl beim Analogrechner wie auch beim DDA müssen vor Beginn einer Rechnung in allen Integratoren die entsprechenden Anfangsbedingungen gesetzt werden; bei beiden Methoden kann die Rechnung zu einer beliebigen Zeit angehalten werden, um beispielsweise gewisse Konstanten zu ändern; die Rechnung kann nachher am selben Ort mit den neuen Konstanten weitergeführt werden.

Schliesslich liefern beide Methoden das Resultat in Form von registrierten Kurven, die Lösungen werden dadurch anschaulich, bei einigen Modellen von DDA werden die Resultate zusätzlich auch in Tabellenform ausgeschrieben²⁾.

Neben diesen gemeinsamen Merkmalen gibt es auch einige grundsätzliche Verschiedenheiten zwischen DDA und elektronischen Analogrechengeräten. Wohl der wichtigste Unterschied liegt in der Natur der unabhängigen Variablen dx . Diese ist beim elektronischen Analogrechner (falls er ohne jede mechanische Komponente arbeitet) naturgemäß immer die Zeit, sie kann beim DDA beliebige Werte annehmen, sie kann sogar negativ werden. Dadurch wird der Anwendungsbereich des DDA wesentlich grösser als derjenige des Analogrechners.

Ein zweiter wichtiger Unterschied zwischen DDA und Analogrechner liegt darin, dass bei diesem die Rechengenauigkeit durch die Komponentengenauigkeit beschränkt ist, und dass daran durch den Benutzer nichts geändert werden kann, während es beim DDA möglich ist, die Genauigkeit innerhalb gewisser Grenzen dem Problem anzupassen.

4. Illustratives Beispiel aus der mechanischen Schwingungslehre

4.1 Physikalisches Problem

An Hand eines einfachen Beispieles aus der mechanischen Schwingungslehre soll im folgenden gezeigt werden, wie die drei Rechenmethoden angewendet werden können. Das hier behandelte Problem führt auf lineare Differentialgleichungen, die auch elementar analytisch gelöst werden könnten, doch soll mit Nachdruck darauf hingewiesen werden, dass für alle drei elektronischen Rechenmethoden eine Linearität des Problems keineswegs gefordert ist. Während bei Berechnung von Hand für lineare Probleme vielfach eine analytische Lösung gefunden werden kann, deren numerische Auswertung keinen allzugrossen Aufwand braucht, ist bei nichtlinearen Problemen eine analy-

²⁾ Durch Zusatzgeräte können heute auch die Ergebnisse von Digitalrechenmaschinen in Kurvenform erhalten werden.

tische Lösung in den wenigsten Fällen möglich. Bei den elektronischen Rechenmethoden wird der Aufwand wohl etwas grösser, wenn die Differentialgleichungen nichtlinear sind, doch ist in den meisten Fällen die Lösung dadurch nicht prinzipiell schwieriger zu finden.

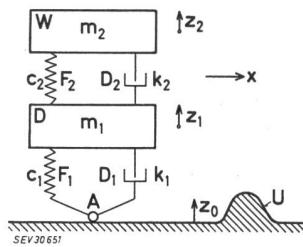


Fig. 6
Lineares Zweimassensystem
beim Überfahren
eines Einzelhindernisses
Das Zweimassensystem fährt mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung x über ein einzelnes Hindernis z_0 (x)
Weitere Bezeichnungen
siehe im Text

Es soll hier berechnet werden, welche Bewegung ein Eisenbahnwagen, der über ein einzelnes Hindernis fährt, ausführt. Interessiert man sich nur für die Bewegungen in vertikaler Richtung, so kann ein Drehgestell-Eisenbahnwagen stark vereinfacht durch ein Zweimassensystem, wie es in Fig. 6 dargestellt ist, nachgebildet werden. Die Masse m_1 stellt das Drehgestell dar, die Masse m_2 den Wagenkasten. Das Drehgestell ist mittels der Feder F_1 auf der Radachse A abgestützt, über die Feder F_2 der Wagenkasten auf dem Drehgestell. Parallel zu diesen zwei Federn wirken die geschwindigkeitsproportionalen hydraulischen Stossdämpfer D_1 und D_2 .

Dieses lineare System soll sich mit konstanter Geschwindigkeit in der Richtung x bewegen, sein Fusspunkt, die Radachse, soll dabei ein einmaliges Hindernis von der Form

$$z_0 = \frac{1}{2} H (1 - \cos \omega t) \quad \left| \begin{array}{l} \omega t = 2\pi \\ \omega t = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

überfahren, und zwar so, dass kein Absprung der Radachse von der Schiene erfolge. Die Hindernisform nach Gl. (5) wurde gewählt, weil bei ihr die Unebenheit sowie ihre erste Ableitung an beiden Enden gleich Null sind. Die Bewegungsdifferentialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + d_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_0) + \kappa d_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + v_1(z_1 - z_0) + \\ + \kappa v_2(z_1 - z_2) = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

$$\ddot{z}_2 + d_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + v_2(z_2 - z_1) = 0$$

wobei

$$\begin{aligned} v_1 &= c_1/m_1 & v_2 &= c_2/m_2 \\ d_1 &= k_1/m_1 & d_2 &= k_2/m_2 \\ \kappa &= m_2/m_1 \end{aligned}$$

bedeuten.

Für z_0 soll gelten:

$$z_0 = 0,005 (1 - \cos 100 t) \quad \left| \begin{array}{l} t = 2\pi/100 \\ t = 0 \end{array} \right.$$

Die angegebenen Differentialgleichungen sollen für verschiedene Werte der Konstanten gelöst werden, beispielsweise lauten diese Werte für einen Zweitklass-Wagen der Schweizerischen Bundesbahnen [5]:

$$\begin{aligned} v_1 &= 1086 \text{ s}^{-2} & v_2 &= 143 \text{ s}^{-2} \\ d_1 &= 55,7 \text{ s}^{-1} & d_2 &= 9,6 \text{ s}^{-1} \\ \kappa &= 5,57 \end{aligned}$$

4.2 Die Lösung mit dem Analogierechengerät

Das Schaltschema für die Lösung des Differentialgleichungssystems (6) auf dem Analogrechner ist in Fig. 7 dargestellt. Man kann daraus ersehen, dass für die Lösung dieser Aufgabe insgesamt 5 Integratoren, 10 Umkehr- und Addierverstärker und 7 Koeffizientenpotentiometer gebraucht werden. Von den 5 Integratoren dienen vier zur Integration der beiden abhängi-

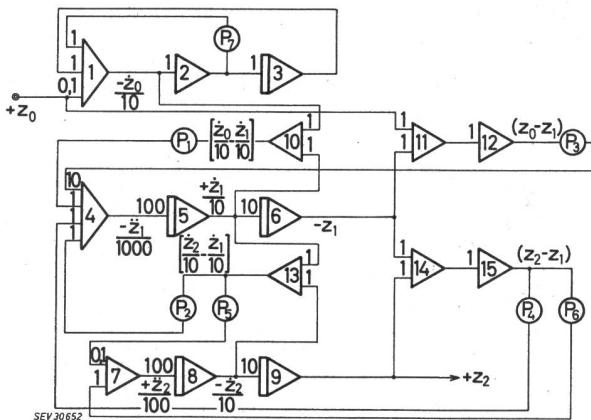


Fig. 7

Schaltung des Analogierechengeräts zur Lösung des Differentialgleichungssystems (6)

Eingangsgröße ist die Unebenheitsfunktion $z_0(t)$

Potentiometerstellungen: $P_1 = d_1/100 = 0,557$; $P_2 = \kappa d_1/100 = 0,535$; $P_3 = \nu_1/10000 = 0,109$; $P_4 = \kappa \nu_1/1000 = 0,797$; $P_5 = d_2/100 = 0,010$; $P_6 = \nu_2/100 = 0,143$; $P_7 = k = 0,995$

Weitere Bezeichnungen siehe im Text

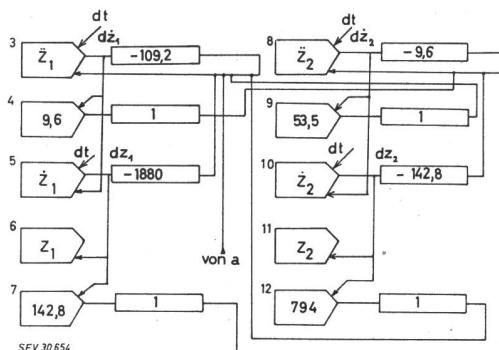
gen Variablen, der fünfte Integrator wird in der Schaltung zur angenäherten Differentiation von z_0 gebraucht. Diese hier angewendete Schaltung erlaubt, die exakte Differentiation, die physikalisch unmöglich ist, durch eine angenäherte Differentiation zu ersetzen. Die Störfunktion $z_0(t)$ wird in einer externen Schaltung erzeugt. In Fig. 8 sind die mit dem Analogierechengerät erhaltenen Lösungskurven aufgezeichnet.

4.3 Die Lösung mit dem DDA

Fig. 9 zeigt das Schaltschema für die Lösung der Differentialgleichungen (6) mit dem DDA. Auch die Störfunktion wird hier auf dem DDA erzeugt; in der rechten Hälfte der Fig. 9 ist dargestellt, wie durch Lösen der Differentialgleichung

$$\ddot{y} = -\omega^2 y$$

mit geeigneten Anfangsbedingungen die Störfunktion von der Zeit $t = 0$ bis zur Zeit $t = 2\pi/100$ s erzeugt wird. Nach Ablauf der Zeit $t = 2\pi/100$ s müssen die



Eingänge der Störfunktion in den Integrator 1 aufgetrennt werden.

Die vier Integratoren Nr. 3, 5, 8 und 10 integrieren die abhängigen Variablen z_1 und z_2 . In den beiden Integratoren Nr. 6 und 11 werden die Inkremente dz_1 und dz_2 zu z_1 und z_2 aufsummiert; die Integratoren Nr. 4, 7, 9 und 12 sind als Konstantenmultiplikatoren geschaltet.

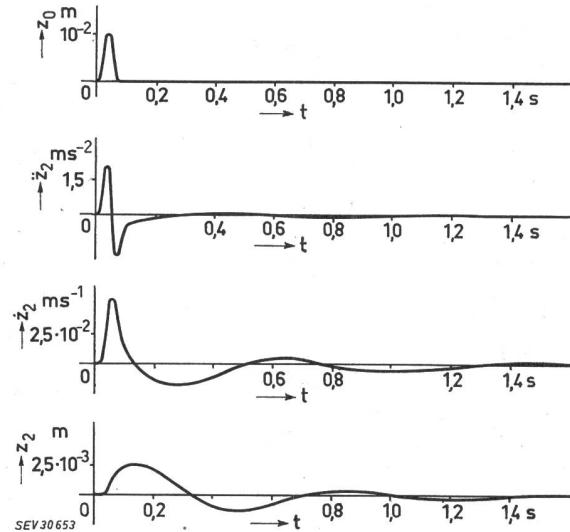


Fig. 8

Mit dem Analogierechengerät erhaltene Lösungskurven

Von oben nach unten sind dargestellt: Verlauf der Unebenheit, Beschleunigung, Geschwindigkeit und Auslenkung der Masse m_2

Die Art und Weise, wie dieses Schaltschema auf dem DDA realisiert wird, hängt vom Typ des DDA ab. Beim Bendix DA-1 erfolgt die gesamte Programmierung durch numerisch codierte Befehle, welche mit der Schreibmaschine dem Computer übermittelt werden, beim CORSAIR wird der Schaltplan, gleich wie bei einem Analogierechengerät, auf einem Steckbrett mittels Drahtverbindungen gestöpselt.

Die Resultate liefert der Bendix DA-1 in Form von Tabellen, in welchen man mit der Schreibmaschine jeweils nach einer programmierten Anzahl von Integrationsschritten den Inhalt der Y-Register beliebiger Integratoren herausschreiben kann. Man hat weiter die Möglichkeit, eine der Variablen in Funktion einer beliebigen andern Variablen mittels eines Kurvenzeichners aufzuzeichnen.

Die Skalierung des DDA für diese Aufgabe erfolgte derart, dass die Resultate sicher auf drei bedeutsame Dezimalstellen genau werden. Dies erforderte für die unabhängige Variable dx eine Skalierung von:

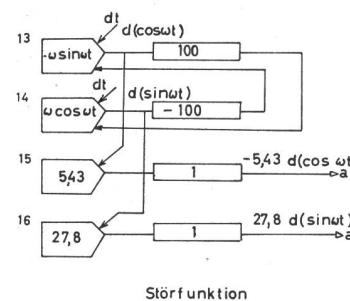


Fig. 9

Schaltschema zur Lösung des Differentialgleichungssystems (7) auf dem DDA

Die Integratoren auf der linken Hälfte dienen zur Integration der Differentialgleichungen, diejenigen auf der rechten Hälfte zur Erzeugung der Störfunktion

$$dx = dt = 2^{-16}$$

Bis der DDA die Lösung bis zum Moment des Endes des Hindernisses gerechnet hat, braucht er

$$n = \frac{2\pi/100}{2^{-16}} = 4118$$

Integrationsschritte; da der DA-1 pro Sekunde 34 Integrationsschritte ausführt, dauert die Rechenzeit bis zum Ende des Hindernisses zirka 121 s.

4.4 Lösung mit der digitalen Allzweckrechenmaschine

Wohl jedem Benutzer einer digitalen Rechenmaschine steht eine Programmbibliothek zur Verfügung, und es ist anzunehmen, dass er darin mindestens ein Programm für die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung findet (z. B. ein Programm nach dem Verfahren Runge-Kutta). Somit reduziert sich die Programmierungsaufgabe auf

Tabelle III

t [ms]	z_1 [mm]	z_2 [mm]	\dot{z}_1 [mm/s]	\dot{z}_2 [mm/s]
3.1416	.0133	.0001	12.4460	.1280
6.2832	.0985	.0015	44.4210	.9532
9.4248	.3043	.0073	87.8130	2.9565
12.5660	.6539	.0216	134.6700	6.3788
15.7080	1.1464	.0489	177.6500	11.2290
18.8500	1.7596	.0934	210.5100	17.3040
21.9910	2.4537	.1585	228.5200	24.2300
25.1330	3.1769	.2460	228.7800	31.5060
28.2740	3.8717	.3562	210.4600	38.5680
31.4160	4.4811	.4875	174.7300	44.8470
34.5580	4.9546	.6366	124.6600	49.8320
37.6990	5.2541	.7988	64.8010	53.1250
40.8410	5.3574	.9684	.7928	54.4810
43.9820	5.2611	1.1391	- 61.2730	53.8340
47.1240	4.9806	1.3047	- 115.4400	51.3070
50.2660	4.5494	1.4598	- 156.5000	47.1990
53.4070	4.0151	1.6001	- 180.4800	41.9610
56.5490	3.4355	1.7229	- 185.0900	36.1440
59.6900	2.8728	1.8272	- 169.8800	30.3560
62.8320	2.3872	1.9143	- 136.3800	25.1950

die Programmierung der rechten Seiten der Differentialgleichungen. Mit einiger Erfahrung wird es einem auch leicht fallen, einen vernünftigen Wert für die Schrittweite h zu finden, derart, dass die Genauigkeit hinreichend gut und die Rechenzeit vernünftig kurz wird. Vielleicht steht sogar ein Programm zur Verfügung, das die Schrittweite ständig kontrolliert und dem Verlauf der Lösungsfunktion anpasst. Tabelle III zeigt die mit dem Bendix G-15-Computer berechnete

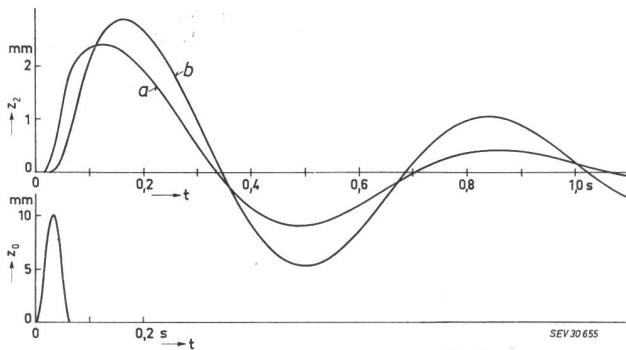


Fig. 10

Mit dem digitalen Allzweckrechner und einem Kurvenzeichner erhaltenene Lösungskurven

oben ist die Auslenkung der Masse m_2 aufgetragen
Kurve a mit einem Dämpfer D_1 , Kurve b ohne Dämpfer D_1
unten ist der Verlauf der Unebenheit aufgetragen

Lösung mittels dem Verfahren Runge-Kutta. Auch eine graphische Registrierung der Resultate mit dem Graph-Plotter ist beim G-15 möglich, dies erspart einem das mühselige Aufzeichnen von Funktionsverläufen aus Tabellen. Fig. 10 zeigt die mit dem Graph-Plotter automatisch registrierte Lösung; für die Kurve b wurde der Dämpfer D_1 im mechanischen System weggelassen³⁾.

5. Vergleich aller drei Rechenmethoden

Zum Schluss sollen die drei Methoden in Bezug auf

- Rechengeschwindigkeit
- Rechengenauigkeit
- Programmierungsaufwand

kurz gegeneinander abgewogen werden.

5.1 Rechengeschwindigkeit

In Bezug auf die Rechengeschwindigkeit ist der elektronische Analogrechner den beiden andern Methoden überlegen. Beim Analogrechner ist die Rechengeschwindigkeit für das hier behandelte Beispiel praktisch einzig durch die Zeit, welche aufgewendet werden muss, um das Resultat zu registrieren, beschränkt.

Für den DDA hängt die Rechengeschwindigkeit von der geforderten Genauigkeit ab. Für eine Genauigkeit von 3 bedeutsamen Dezimalstellen beträgt der Zeitbedarf beim DA-1 120 s, beim CORSAIR würde er etwa 10 s.

Für die Rechenzeit bei digitalen Rechenmaschinen sollen drei charakteristische Fälle betrachtet werden:

1. Lösung mit Magnettrommelrechner älterer Bauart (z. B. Bendix G-15, 1956) in einem interpretativen Programmiersystem mit Gleitkomma (Intercom beim G-15):

20 Integrationsschritte à 150 Operationen à 0,125 s:

$T = 37.5$ s

2. Lösung mit gleicher Maschine wie unter 1., aber in optimaler Maschinensprache und mit Festkomma:

20 Integrationsschritte à 150 Operationen à 0,0125 s:

$T = 37.5$ s

3. Lösung mit modernem, schnellem Kernspeicherrechner (zum Beispiel Bendix G-20):

20 Integrationsschritte à 150 Operationen à 40 μ s:

$T = 0.12$ s

Die Rechenzeit bei digitalen Rechenmaschinen kann also, je nach dem verwendeten Typ und dem Programmiersystem, in sehr weiten Grenzen variieren.

Handelt es sich um die Lösung komplizierterer Differentialgleichungssysteme, so kann sich das Verhältnis der Rechenzeiten noch etwas zu Gunsten des DDA ändern, denn beim DA-1 wird ja auf alle Fälle pro Trommelmeldrehung jeder der 108 Integratoren einzeln und nur einmal prozessiert, die Rechenzeit ist somit nicht abhängig von der Zahl der verwendeten Integratoren; im Gegensatz dazu nimmt beim Runge-Kutta-Verfahren, bei welchem pro Integrationsschritt alle rechten Seiten der Differentialgleichungen viermal berechnet werden müssen, die Rechenzeit mit der Komplexität eines Problems stark zu.

5.2 Genauigkeit

Beim Analogrechner ist die Genauigkeit der Lösung weitgehend durch die Komponentengenauigkeit des

³⁾ Die Berechnungen mit dem G-15 sowie mit dem DA-1 wurden im Rechenzentrum der Omni Ray AG in Zürich durchgeführt.

Rechengerätes bestimmt. Diese liegt für elektronische Analogrechner heute in der Grössenordnung von 10^{-4} und dürfte auch in Zukunft kaum wesentlich verbessert werden können.

Beim DDA kann man innerhalb der durch die Wortlänge des DDA gegebenen Grenzen die Genauigkeit mittels der Skalierung festlegen.

Die grösste Genauigkeit liefert der digitale Allzweckrechner. Hier hängt die Genauigkeit der Lösung von der Wortlänge des Computers sowie von der gewählten Schrittänge ab.

5.3 Programmierungsaufwand

Beim Programmierungsaufwand haben sich die Verhältnisse innerhalb der letzten Jahre grundlegend geändert. War noch vor wenigen Jahren für die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen der Programmierungsaufwand für den elektronischen Analogrechner am geringsten, derjenige für digitale Rechenmaschinen am grössten, so kann man heute wohl annehmen, dass durch die enormen Fortschritte in

der automatischen Programmierung digitaler Rechenmaschinen der Programmierungsaufwand für diesen Maschinentyp am kleinsten wird. Für die Lösung von Differentialgleichungssystemen liegt meistens ein Bibliotheksprogramm vor. Es müssen dann nur noch die rechten Seiten der Gleichungen, beispielsweise in ALGOL, programmiert werden.

Literatur

- [1] Johnson, C. L.: Analog Computer Techniques. New York: McGraw-Hill 1956.
- [2] Owen, P. L., M. F. Patridge und T. R. Sizer: Corsair, a Digital Differential Analyser. Electronic Engng. 32(1960)394, S. 740..745.
- [3] Bush, V.: The Differential Analyzer. A New Machine for Solving Differential Equations. J. Franklin Inst. 212(1931)4, S. 447..488.
- [4] Bürgin, H. G.: Untersuchungen über das dynamische Verhalten von Drehgestell-Personenwagen. Diss. ETH. Zürich: Juris-Verlag 1960.
- [5] Forbes, G. F.: Digital Differential Analysers. Sylmar: 1957. (Exemplare können bezogen werden bei: G. F. Forbes, 13745 Eldridge Ave, Sylmar (San Fernando) Cal. USA).

Adresse des Autors:

Dr. H. G. Bürgin, Rietholzstrasse 28, Zollikerberg (ZH).

Wellenleiter

Publikation des Internationalen Elektrotechnischen Wörterbuchs (2. Ausgabe), herausgegeben von der CEI

621.372.8

Die Commission Electrotechnique Internationale hat im letzten Sommer das Kapitel «Wellenleiter» der 2. Auflage des Internationalen Elektrotechnischen Wörterbuchs herausgegeben [1] ¹⁾. Diese Publikationen, welche 46 Seiten im Format A4 umfasst, enthalten Definitionen von 130 Ausdrücken in englischer und französischer Sprache, die in der Wellenleitertechnik und in der Technik der Mikrowellenantennen am gebräuchlichsten sind, sowie die entsprechenden Übersetzungen dieser Ausdrücke in deutscher, spanischer, italienischer, holländischer, polnischer und schwedischer Sprache. Ein alphabetisches Sachregister, welches in den 8 verwendeten Sprachen abgefasst ist, erlaubt es, den gesuchten Ausdruck oder dessen Übersetzung in einer dieser Sprachen mit Leichtigkeit zu finden.

Kein Wörterbuch kann perfekt sein, wenn man die unendlichen Feinheiten der Sprache und den im allgemeinen beschränkten zur Verfügung stehenden Umfang berücksichtigt. Im betreffenden Fall wurde die Schwierigkeit, ein möglichst exaktes Werk zu schaffen, durch die relative Neuheit und die rasche Entwicklung des Gebietes, welches bearbeitet werden sollte, noch erhöht. Trotzdem und dank der Anstrengungen der Spezialisten verschiedener Länder, kann das erreichte Ergebnis als sehr gut bezeichnet werden.

Die Arbeit wurde ziemlich genau vor 10 Jahren aufgenommen und ein durch das Nationalkomitee von Grossbritannien ausgearbeiteter erster Entwurf in französischer und englischer Fassung im Monat März 1952 den Nationalkomitees unterbreitet [Dokument 1(Secrétariat)219]. Die Prüfung dieses Dokumentes wurde in der Schweiz durch das Fachkollegium 1 (Wörterbuch) des Schweiz. Elektrotechnischen Komitees (CES) einer kleinen Arbeitsgruppe von Spezialisten anvertraut, welche in einer Stellungnahme dem CES im September 1952 zahlreiche Bemerkungen und Vorschläge vorlegte [1(Suisse)111]. Einer der wesentlichen Diskussionspunkte bestand in der Definition der verschiedenen «Schwingungsmoden» in den Wellenleitern. Die, verschiedenen Ländern angehörenden Verfasser haben in der Tat, gestützt auf die Abbildung entweder des elektrischen oder des magnetischen Feldes, verschiedene Bezeichnungen für die selben Schwingungsmethoden eingeführt. Es gehörte nicht zur Aufgabe des Fachkollegiums 1, eine Wahl zu tun und gewisse Bezeichnungen abzuschaffen, sondern sie alle zu definieren. Dies hat dazu geführt, mehrere gleichwertige Bezeichnungen für den gleichen Modus zu geben. Als Beispiel sei der «mode magnétique transversal» erwähnt, welcher im französischen ebenfalls Mode

TH, Mode TM; Mode E genannt wird. Klare, vollständige und eindeutige Definitionen für die verschiedenen Schwingungsmoden zu finden war schwierig und gab zu Diskussionen Anlass. Ohne Zweifel werden jedoch die Gruppierungen der verschiedenen Bezeichnungen für die Schwingungsmoden und die entsprechenden Definitionen, die sich schliesslich ergaben, allenjenigen eine wertvolle Hilfe sein, welche Arbeiten über dieses Gebiet lesen oder publizieren. Es ist zu hoffen, dass sich mit der Zeit die eine oder andere Variante behaupten wird und dass es möglich wird, in einer zukünftigen Ausgabe gewisse Varianten auszuschliessen.

Im Anschluss an eine, am 17. Mai 1955 in Brüssel stattgefunden Sitzung, an welcher die Delegierten der verschiedenen Länder teilnahmen, welche seinerzeit zum Grunddokument Bemerkungen vorgelegt hatten, wurden diese geprüft. Als Folge konnte ein zweiter, wesentlich verbesselter Entwurf den Nationalkomitees unterbreitet [1(62)(Secrétariat)257] und unter Beachtung der 6-Monate-Regel auf Dezember 1955 zur Annahme empfohlen werden. Das CES, wie auch andere Nationalkomitees der CEI, machten noch einige Bemerkungen zu diesem Dokument [1(62)(Suisse)128]. Das Sekretariatskomitee berücksichtigte sie, indem es im Februar 1958 eine 3. Fassung [1(62)(Secrétariat)264] herausgab, die unter Beachtung der 2-Monate-Regel zur Annahme empfohlen wurde. Wiederum brachte die Arbeitsgruppe des Fachkollegiums 1 des CES Verbesserungsvorschläge vor, welche zum Teil in der endgültigen Ausgabe berücksichtigt worden sind.

Parallel zu ihrer Arbeit bei der Ausarbeitung des Inhaltes des französisch-englischen Dokumentes, hat das CES ebenfalls an der deutschen Fassung mitgearbeitet. Als die Arbeit im Jahre 1952 angefangen wurde und Deutschland und Österreich ihren Platz in der CEI noch nicht wieder eingenommen hatten, beschloss das CES, dass die Dokumente des Wörterbuchs in der Schweiz auf deutsch übersetzt werden sollten. So wurde der erste Entwurf von Klauser, Ingenieur der Albiswerke AG, in hervorragender Weise übersetzt. Das ursprüngliche Dokument erfuhr leider nachträglich wesentliche Änderungen, so dass der erwartete Nutzen der vorgenommenen grossen Übersetzungsaufgabe zum Teil ausblieb. Vermutlich ist es überhaupt das einzige Dokument des Wörterbuchs, welches vollständig übersetzt wurde.

Die schweizerischen Experten der deutschen Sprache haben später, zusammen mit jenen aus Deutschland und Österreich, nur an der deutschen Übersetzung der Ausdrücke mitgearbeitet. Sie setzten sich ein, damit die in der Schweiz benützten Ausdrücke

¹⁾ Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.