

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 52 (1961)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Analogieverfahren zur Behandlung magnetischer Felder in nicht linearen nicht isotropen Medien  
**Autor:** Tschopp, P.A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-916823>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

Gemeinsames Publikationsorgan des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV)  
und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke (VSE)

## Analogieverfahren zur Behandlung magnetischer Felder in nicht linearen nicht isotropen Medien<sup>1)</sup>

Von P. A. Tschopp, Zürich

538.122 : 621.3.012.8

Für die bisher ungelöste Aufgabe der Bestimmung von Magnetfeldern bei örtlich variabler Permeabilität wurde in einer früheren Arbeit [1]<sup>2)</sup>, nebst einem graphischen Verfahren, eine Lösungsmethode mittels eines Analogienetzwerkes angegeben. Im Anschluss an dieses Modell beschreibt die vorliegende Arbeit weitere elektrische Analogien. Speziell untersucht wird dabei die Brauchbarkeit der einzelnen Modelle für die Berücksichtigung der Streuflussbildung, der Nichtlinearität (d. h. der Feldabhängigkeit der magnetischen Permeabilität), der Nichtisotropie (d. h. der Richtungsabhängigkeit der magnetischen Permeabilität) und der Hysterese. In einem weiteren Abschnitt wird die Ausdehnung des Verfahrens auf die Behandlung elektromagnetischer Felder angegeben. Schliesslich sind, zur Darstellung des Einflusses der Streuflussbildung auf die Feldverteilung, am Beispiel eines 90°-Winkelprofils einige ausgemessene Feldbilder angeführt.

Un travail antérieur [1] s'est occupé du problème, jusqu'alors non résolu, de la détermination de champs magnétiques dans un médium où la perméabilité est une variable scalaire du lieu. Deux méthodes de solution ont été indiquées : l'une graphique comme extension des procédés bien connus de Lehmann, l'autre à l'aide d'un réseau de résistances électriques. Le travail présent décrit d'abord d'autres analogies électriques pour la solution de ce même problème et considère spécialement les possibilités pour l'inclusion directe de la non-linéarité (perméabilité dépendant de la valeur du champ magnétique), de l'anisotropie (perméabilité dépendant de la direction du champ), de l'hystérèse magnétique et du flux de dispersion. Ensuite, l'extension de ces procédés d'analogie pour la détermination de champs électromagnétiques est traitée à l'aide d'un exemple d'application. Finalement, l'influence du flux de dispersion sur la distribution du champ est montrée sur l'exemple d'une partie caractéristique du circuit magnétique d'un transformateur (profil à angle droit).

### 1. Einleitung

In einer früheren Arbeit [1]<sup>2)</sup> wurden zwei Verfahren angegeben zur Bestimmung der differentiellen Struktur magnetischer Felder beliebiger Geometrie bei örtlich variabler Permeabilität des betrachteten Mediums. Das beschriebene graphische Verfahren kann als eine Erweiterung der bekannten Methoden von Th. Lehmann betrachtet werden. Nach Aufteilen des untersuchten Feldgebietes in einzelne Krafröhrenabschnitte kann dort zwischen der mittleren Breite und der mittleren Länge eines Abschnittes an Hand der Magnetisierungskennlinie  $B(H)$  ein funktioneller Zusammenhang gefunden werden, mit dessen Hilfe durch iteratives Vorgehen das magnetische Feld bestimmt wird. Für das zweite Verfahren wird die Analogie zwischen magnetischen Feldern und stationären elektrischen Strömungsfeldern herangezogen. Das betrachtete Feldgebiet wird durch Aufteilung in Flächenelemente diskretisiert, d. h. die Differentialgleichung für das magnetische Potential wird in eine Differenzengleichung umgesetzt. Ein von der örtlichen Permeabilität abhängiger Widerstand bildet dann ein entsprechendes Flächenelement nach. Zur Bestimmung des Feldbildes wird ebenfalls ein iteratives Vorgehen angewandt. Neben dieser Methode mit variablen Widerständen sind weitere elektrische Analogien für die Behandlung magnetischer Felder brauchbar, deren Untersuchung diese Arbeit gewidmet ist.

Bei der Untersuchung magnetischer Felder in nicht-linearen und nichtisotropen Medien sind vier Aspekte

besonders hervorzuheben. Dies sind die Nichtlinearität, die magnetische Hysterese, die Nichtisotropie und die Streuflussbildung.

#### 1.1 Nichtlinearität des magnetischen Mediums

Die Materialgleichung für das magnetische Feld setzt die magnetische Induktion  $\vec{B}$  zur magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  wie folgt in Beziehung:

$$\vec{B} = \mu_0 [T \vec{H}] \quad (1)$$

worin  $\mu_0$  die Permeabilitätskonstante des leeren Raumes ( $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ VsA}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ) bedeutet und  $T$  im allgemeinsten Fall einen Tensor zweiter Stufe darstellt, dessen Komponenten in ziemlich komplizierter Weise von denjenigen von  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  abhängen. Geht man auf den üblichen Spezialfall einer skalaren veränderlichen Permeabilität über, so ist:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (2)$$

Die relative Permeabilität  $\mu_r$  ist nun aber eine Funktion von  $H$ , wobei der Zusammenhang zwischen  $B$  und  $H$  durch die Magnetisierungskennlinie  $B = B(H)$  gegeben ist (Kurve 1 in Fig. 1a).

#### 1.2 Magnetische Hysterese

Bei zyklischer Magnetisierung des magnetischen Mediums gehören zu jedem  $H$ -Wert infolge der magnetischen Remanenz verschiedene Werte von  $B$ , d. h. die Induktion ist keine eindeutige Funktion der Feldstärke mehr. Sie hängt vielmehr von der bei der vorhergehenden Magnetisierung zurückgebliebenen Rema-

<sup>1)</sup> Mitteilung aus dem Institut für Höhere Elektrotechnik der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich.

<sup>2)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

nenz ab. Der Zusammenhang zwischen  $B$  und  $H$  gehorcht dann der sog. Magnetisierungsschleife. Nimmt man nach Fig. 1 einen einwelligen, sinusförmigen Fluss  $\Phi$  an, so ergibt sich der stark verzerrte Magnetisierungsstrom  $I$ , dessen Nulldurchgänge gegen die des Flusses voreilen. Dieser Strom  $I$  kann in die Komponenten  $I_m$

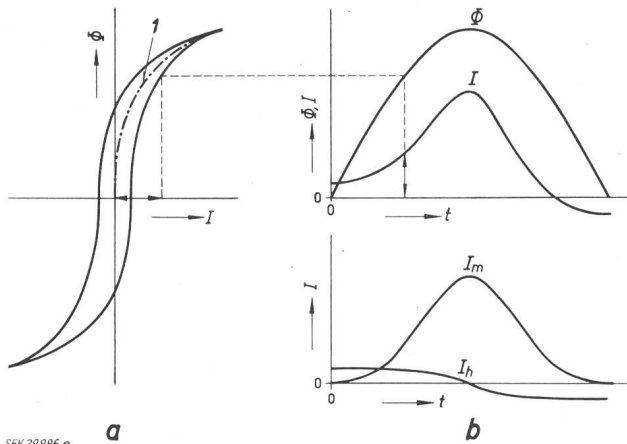


Fig. 1

#### Graphische Bestimmung des Magnetisierungsstromes

- a Zusammenhang zwischen dem magnetischen Fluss  $\Phi$  im magnetischen Medium und dem magnetisierenden Strom  $I$ , d. h. Magnetisierungsschleife  $B(H)$  in anderem Maßstab  
b  $\Phi(t)$  und  $I(t)$ , sowie Zerlegung von  $I$  in den eigentlichen Magnetisierungsstrom  $I_m$  (der durch die Neukurve 1 gegeben ist) und den Hystereseseanteil  $I_h$ , der gegenüber  $I_m$  um  $90^\circ$  voreilt

und  $I_h$  zerlegt werden:  $I_m$  ist dann mit dem Fluss in Phase,  $I_h$  ist die durch die Hysterese bedingte, um  $\pi/2$  voreilende Komponente. Bei konstanter d. h. feldunabhängiger Permeabilität ist  $B(H)$  eine Ellipse und die Neukurve (1 in Fig. 1a) eine Gerade. In diesem Falle entfällt die Verzerrung von  $I_m$ .

### 1.3 Nichtisotropie

Im Falle der Nichtisotropie ist die Permeabilität  $\mu_r$  eines bestimmten Feldpunktes nicht nur vom Betrag der dort herrschenden Feldstärke abhängig, sondern auch noch von deren Richtung, d. h. die Materialgleichung hat die Form der Gl. (1). Solche Medien sind z. B. die kaltgewalzten Magnetbleche für den Transformatorbau. In zunehmendem Masse finden dort doppelt-kornorientierte Ni-Fe-Bleche mit Würfeltextur Eingang, während einfach-kornorientierte Fe-Si-Bleche mit Goss-Textur seit mehr als 10 Jahren in grossem Maßstab verwendet werden. Für die Auswertung stehen bei diesen Blechen Magnetisierungskurven zur Verfügung in Abhängigkeit vom Winkel  $\alpha$  zwischen Walzrichtung und Magnetisierungsrichtung [2].

### 1.4 Streuflussbildung

In elektrischen Maschinen und Geräten wird der magnetische Fluss  $\Phi$  durch die Verwendung von Magnetmaterialien in bestimmte Wege geführt, um die gewünschten Wirkungen zu erzielen. Infolge der endlichen Permeabilität des Materials gibt es jedoch Feldlinien, welche besonders bei stark gesättigten Gebieten den vorgeschriebenen Weg verlassen; diese bilden den Streufluss. Seine Kenntnis ist für die Berechnung der magnetischen Kennlinie in den meisten Fällen notwendig, da die Erregung für den totalen Fluss (Nutzfluss plus Streufluss) dimensioniert werden muss.

## 2. Analytische und graphische Verfahren

Die bekannten analytischen Methoden zur Berechnung magnetischer Felder sind in ausgezeichneten Werken [3; 4] dargestellt; eines der wichtigsten Hilfsmittel ist dabei die konforme Abbildung [5]. Alle analytischen Verfahren setzen jedoch für das magnetische Medium eine konstante und gegenüber der Permeabilität der umgebenden Luft sehr grosse (unendliche) relative Permeabilität voraus. Es ist somit nicht möglich, die Nichtlinearität und die Nichtisotropie des magnetischen Materials einzubeziehen. Ebenso wenig gestatten die analytischen Methoden die Berücksichtigung der Hysterese und die genaue Berechnung des Streuflusses.

Unter diesen Gesichtspunkten sind die graphischen Methoden etwas vielseitiger. So erlaubt das graphische Verfahren nach [1] die Berücksichtigung der Nichtlinearität des magnetischen Mediums, durch die nichtlineare Beziehung  $\Delta l(\Delta b)$  zwischen der mittleren Breite  $\Delta b$  und der mittleren Länge  $\Delta l$  eines Flussröhrenabschnittes. Eine Ausdehnung des Verfahrens zum Einbezug der Nichtisotropie des Magnetmaterials ist möglich durch Einführung des Winkels  $\alpha$  als Parameter für die Darstellung  $\Delta l(\Delta b)$ . Bei der Auswertung muss dann jeweils die der mittleren Feldrichtung jedes Abschnittes entsprechende Kurve berücksichtigt werden. Hingegen ist es nicht ohne weiteres möglich, das graphische Verfahren in Richtung auf die Bestimmung des Streuflusses zu erweitern. Zumindest wird dann die Auswertung wegen der unstetigen Permeabilität an der Grenzfläche mit dem daraus resultierenden Feldlinien-Brechungsgesetz ziemlich kompliziert, so dass der notwendige Aufwand bald eine vernünftige Grenze überschreitet.

Ebenfalls gestattet das graphische Verfahren keine direkte Berücksichtigung der Hysterese. Doch wiegt dieser Nachteil weniger schwer, da bei gegebener Induktionsverteilung die durch die zyklische Magnetisierung bedingten Ummagnetisierungsverluste mittels bekannter Formeln berechnet werden können [2].

## 3. Elektrisches Analogon mit einem Netz aus variablen Widerständen

Beschränkt man sich auf die Untersuchung von magnetischen Feldern in Gebieten verschwindender elektrischer Stromdichte (wo also rot  $\vec{H} \equiv 0$ ), so gehorcht die Feldstruktur der folgenden Differentialgleichung für das magnetische Skalarpotential  $V_m$  [1]:

$$\mu_r \cdot \Delta V_m + \text{grad } \mu_r \cdot \text{grad } V_m = 0 \quad (3)$$

Gemäss dem Feldausschnitt in Fig. 2 hat dann die Beziehung (3) die Differenzenform:

$$\sum_{i=1}^4 \mu_{r_{0i}} (V_{m_i} - V_{m_0}) = 0 \quad (4)$$

worin  $\mu_{r_{0i}}$  die auf die Maschenmitte bezogene relative Permeabilität zwischen den Potentialpunkten  $V_{m_0}$  und  $V_{m_i}$  bedeutet, also:

$$\begin{aligned} \mu_{r_{01}} &= \mu_{r_0} - \frac{1}{4} (\mu_{r_2} - \mu_{r_1}) \\ \mu_{r_{02}} &= \mu_{r_0} + \frac{1}{4} (\mu_{r_2} - \mu_{r_1}) \text{ usw.} \end{aligned} \quad (5)$$

Die Übereinstimmung der Relation (4) mit der Kirchhoffschen Knotenregel

$$\sum_{i=1}^4 \left( \frac{V_i - V_0}{R_i} \right) + I_0 = 0 \quad (6)$$

wird hergestellt durch die Beziehungen:

$$\begin{aligned} I_0 &= 0 \\ k V_m &= V \\ R_i &= \frac{R_0}{\mu_{r0i}} \end{aligned} \quad (7)$$

worin  $R_0$  den Widerstand für die Nachbildung der Luft ( $\mu_{r0i} \equiv 1$ ) darstellt. Die Ausgestaltung der NetZRänder bei sprunghafter Änderung der Permeabilität an einer Grenzfläche sowie auch die praktische Anwendung des Verfahrens sind in [1] dargestellt und können deshalb hier übergangen werden.

In Bezug auf die in der Einleitung aufgeführten vier Gesichtspunkte ergibt sich folgendes für dieses Analogieverfahren:

Die Streuflussbildung wird automatisch berücksichtigt, während die Nichtlinearität durch das iterative Vorgehen über die Magnetisierungskurve einbezogen ist. Da bei jedem Iterationsschritt das gesamte Feldbild erhalten wird, kann auch die Nichtisotropie dargestellt werden. Es muss dann einfach bei jedem Schritt der Widerstand  $R_i$  aus  $\mu_{r0i}$  mittels der Magnetisierungskurve bestimmt werden, die der Feldrichtung in der betreffenden Maschenmitte entspricht.

Hingegen kann auch hier die Hysterese nicht direkt berücksichtigt werden. Wie beim graphischen Verfahren muss man deshalb die Ummagnetisierungsverluste aus dem Feldbild berechnen.

#### 4. Elektrisches Analogon mit konstanten Widerständen und zusätzlichen Stromquellen

Die aus der Differentialgleichung (3) folgende Differenzengleichung (4) kann bei anderer Zusammenfassung auch in der Form dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (V_{m_i} - V_{m_0}) + \frac{\mu_{r2} - \mu_{r1}}{4 \mu_{r0}} (V_{m_2} - V_{m_1}) + \\ + \frac{\mu_{r4} - \mu_{r3}}{4 \mu_{r0}} (V_{m_4} - V_{m_3}) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Der Vergleich dieser Relation mit der Knotenregel (6) erheischt dann infolge der Bedingung  $R_i = \text{konstant} = R$  die Beziehungen:

$$\begin{aligned} k V_m &= V \\ I_0 &= \frac{1}{4 R} \left[ \frac{V_2 - V_1}{\left( \frac{\mu_{r0}}{\mu_{r2} - \mu_{r1}} \right)} + \frac{V_4 - V_3}{\left( \frac{\mu_{r0}}{\mu_{r4} - \mu_{r3}} \right)} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

worin  $R$  ein frei wählbarer Bezugswiderstand ist, den man mit Vorteil zu  $R = R_0$  annimmt.

Die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  hat im Potentialpunkt  $V_{m_0}$  nach Fig. 2 infolge  $\vec{H} = -\text{grad } V_m$  den Betrag:

$$H = \sqrt{\left( \frac{V_0 - V_2}{k d} \right)^2 + \left( \frac{V_0 - V_4}{k d} \right)^2} \quad (10)$$

und bildet mit der positiven  $x$ -Richtung den Winkel:

$$\varphi = \arctg \left( \frac{V_0 - V_4}{V_0 - V_2} \right) \quad (11)$$

Das Vorgehen für die Bestimmung eines Feldbildes ist iterativ. Mit den vorgegebenen Randwerten wird auf dem Netz die Laplacesche Gleichung  $\Delta V_m = 0$  gelöst und dann für jeden Punkt die Feldstärke  $H$  nach Gl. (10) berechnet. Die Magnetisierungskennlinie  $B(H)$  liefert die zugehörigen  $\mu_r$ , mit denen die Ströme  $I_0$  nach Gl. (9) bestimmt werden. Nach Einspeisung dieser Ströme — jeder Punkt eines freien Randes erhält dabei gemäss [6] nur den halben Einspeisestrom — ergibt sich eine neue Potentialverteilung, aus welcher neue  $I_0$  berechnet werden usw. Dies wird so lange fortgesetzt, bis sich die  $V_{m_i}$  nicht mehr ändern.

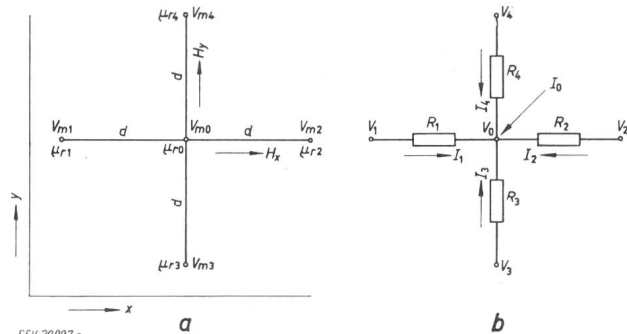


Fig. 2

Feldausschnitt (a) zur Umsetzung der Differentialgleichung für  $V_m$  in eine Differenzengleichung und Ausschnitt (b) aus dem analogen Widerstandsnetz mit dem zusätzlichen Einspeisestrom  $I_0$

Hinsichtlich der in der Einleitung behandelten vier Gesichtspunkte hat diese elektrische Analogie dieselben Eigenschaften wie jene mit variablen Widerständen. Für den Fall konstanter Permeabilität kann dazu der Einfluss der Hysterese für Wechselflüsse direkt nachgebildet werden. Für die RC-Schaltung nach Fig. 3 lässt sich nämlich die Beziehung angeben:

$$i_C = j \omega C \cdot U = j \omega R C \cdot i_R \quad (12)$$

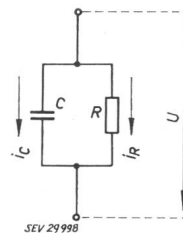


Fig. 3

Parallelschaltung eines Widerstandes  $R$  mit einer Kapazität  $C$  zur Nachbildung der Hysterese bei konstanter Permeabilität  
Es ist  $U = U_0 \cdot \exp(j\omega t)$

d. h. der Strom  $i_C$  eilt gegenüber  $i_R$  um  $\pi/2$  vor. Setzt man nun  $i_R = I_m$  und  $i_C = I_h$  gemäss Abschnitt 1.2, so wird durch die Parallelschaltung  $RC$  das Hystereseverhalten approximiert. Bei festem  $R$  muss dabei  $C$  von Fall zu Fall anhand von  $B(H)$  berechnet werden. Statt mittels der Parallelschaltung  $RC$  kann das Hystereseverhalten naturgemäss auch durch die dazu duale Serieschaltung  $RL$  dargestellt werden. Die der Gl. (12) entsprechende Beziehung besteht dann zwischen den Spannungen  $U_R = RI$  und  $U_L = j \omega LI$ , wobei wie im vorigen Fall  $U$  und  $I$  mit dem Zeitfaktor  $\exp(j\omega t)$  behaftet sind.

#### 4.1 Automatisierung des Iterationsprozesses

Für verschiedene Formen der Poissonschen Differentialgleichung  $\Delta P + f(P) = 0$  ist bisher mit Er-



folg versucht worden, die Ausführung der sukzessiven Iterationen auf dem elektrischen Netzwerk automatisch zu gestalten. Die Einspeiseströme werden dann von Speiseeinheiten geliefert, in welchen Bausteine (aus Servo- und Rechenverstärkern, Wendepotentio-metern, Servomotoren) von elektronischen Analog-rechnern die entsprechende Berechnung des Einspeise-stromes aus dem Potential des betreffenden Punktes vornehmen.

Im vorliegenden Problem hängt jedoch der Ein-speisestrom  $I_0$  nach Gl. (9) auch von den vier umlie-genden Potentialen ab; dazu muss für die Bestimmung der  $\mu_{r_i}$  über die komplizierte Beziehung  $B(H)$  bzw.  $\mu_r(H)$  vorgegangen werden. Wohl kann bei Einführung eines zusätzlichen Fehlers von einigen Prozenten die Magnetisierungskurve durch einen analytischen Aus-druck angenähert werden, doch wird der Aufwand für die Speiseeinheiten dann so gross, dass er jedes ver-nünftige Mass überschreitet. Am gleichen Einwand scheitert auch die — im Prinzip ebenfalls mögliche — Automatisierung des Iterationsprozesses für das Netz mit variablen Widerständen. Dort hängt der Wider-stand  $R_i$  ja neben der Magnetisierungskurve von 6 um-liegenden Potentialen ab [1].

## 5. Elektrische Analogie mit einem Netz aus Induktivitäten

### 5.1 Konstante und gesteuerte Induktivitäten

Es ist leicht einzusehen, dass die Ersetzung der kon-stanten Widerstände gemäss Abschnitt 4 durch eben-solche Induktivitäten keine wesentlich neuen Gesichts-punkte ergibt. Insbesondere berechnen sich der Ein-speisestrom  $I_0$  nach Gl. (9) und die magnetische Feld-stärke  $H$  nach den Gl. (10) und (11) mit den genau gleichen Formeln, in denen einfach der Widerstand  $R$  durch die Induktivität  $\omega L$  ersetzt wird. Ausserdem muss jetzt das Netz mit Wechselstrom betrieben werden.

Nicht viel anders verhält es sich, wenn die variablen Widerstände nach [1] und Abschnitt 3 durch gesteuerte Induktivitäten ersetzt werden. Die Widerstände  $R_i$  gehen dann über in die Induktivitäten  $L_i$ , welche nach dem Gesetz  $L_i = L_0/\mu_{r_{oi}}$  mit  $L_0 = \text{konstant}$  zu ver-ändern sind. Bei entsprechender Wahl der Induktivi-täten kann dies beispielsweise durch Gleichstromvor-magnetisierung mit dem Strom  $I_v$  mittels einer zusätz-lichen Wicklung geschehen. Von diesen gesteuerten Induktivitäten müssen dann für die Auswertung ge-naue Eichkurven  $L = f(I_v)$  d. h.  $I_v = f(\mu_{r_{oi}})$  zur Verfügung stehen. Die Herstellung solcher gleichstrom-vormagnetisierter Spulen mit dem notwendigen grossen Steuerbereich für  $L_i$  dürfte dabei einige Schwierigkeiten bereiten.

Da der Endeffekt, nämlich das exakte Einstellen eines Gleichstromes ( $I_v$ ) genau derselbe ist wie für das Modell mit konstanten Widerständen und zusätzlichem Einspeisestrom ( $I_0$ ), muss wegen des bedeutend kleineren Aufwandes diese Lösung wohl vorgezogen werden.

### 5.2 Feldabhängige Induktivitäten

Anders verhält es sich, wenn an Stelle von konstan-ten oder von gesteuerten Induktivitäten solche mit einem Kern aus dem betreffenden Medium verwendet werden. Unter allen bisher behandelten elektrischen

Analogien ist diese die am weitesten gehende, weil hier jedes Flächen- bzw. Volumenelement des betrachteten Mediums durch ein Netzwerkelement dargestellt wird, dessen Charakteristik genau der Magnetisierungs-schleife  $B(H)$  entspricht.

Für die Dimensionierung der Induktivitäten stellen sich verschiedene Forderungen, die man etwa am Bei-spiel eines normalen warmgewalzten (also isotropen) Dynamobleches betrachten kann. Erstens muss der Querschnitt des geblechten Kernes so festgelegt werden, dass bei den im Netz verwendeten und zulässigen Strömen die notwendigen Induktionen im Blech er-reicht werden. Zweitens muss der magnetische Kreis der Induktivität mit einem Material geschlossen werden, das auch bei hohen Kerninduktionen (bis etwa  $2...2,5 \text{ Vs/m}^2$ ) nur so schwach gesättigt wird und so niedrige Verlustkoeffizienten aufweist, dass die dadurch be-dingten zusätzlichen Hysterese- und Wirbelstromver-luste innerhalb der zulässigen Fehlergrenze bleiben. Schliesslich muss die gesamte Induktivität nach aussen möglichst vollkommen abgeschirmt sein, um eine gegen-seitige Beeinflussung der Netzwerkelemente durch unerwünschte Kopplung zu vermeiden.

Alle diese Forderungen werden in einfacher Weise erfüllt durch die Verwendung von Topfkernen aus keramischen halbleitenden Ferritmaterialien wie z. B. das Ferroxcube von Philips, das Siferit von Siemens u. a. m.

Das Ferroxcube-Material hat sehr kleine Verluste. Bei niedriger Aussteuerung liegt der bezogene Verlust-winkel  $\tan \delta/\mu_r$  noch für Frequenzen von einigen kHz in der Grössenordnung  $10^{-6}$ . Die relative Anfangs-permeabilität ist etwa  $10^3$ , während für die Sättigungs-induktion  $B_s$  der Wert  $0,45 \text{ Vs/m}^2$  (4500 Gauss) bei einer Feldstärke  $H_s = 160 \text{ kA/m}$  ( $\approx 2000$  Oersted) eingesetzt werden kann. Demgegenüber liegen übliche Si-C-Magnetbleche mit Verlustziffern  $v_{10} = 0,9...3,0 \text{ W/kg}$  bei einer Induktion von  $1,5 \text{ Vs/m}^2$  mit entspre-chenden Feldstärken  $H = 3,3...1,8 \text{ kA/m}$  schon stark im Sättigungsgebiet.

Bei der Herstellung der geblechten Kerne muss der Einfluss der Bearbeitung auf die magnetischen Eigen-schaften des Blechs berücksichtigt werden. Es wurde nämlich experimentell festgestellt [7], dass bei Schnei-den in Streifen von unter 10 mm Breite  $b$  die Permea-bilität des Bleches beträchtlich abfällt, während die Verluste stark ansteigen (z. B. um 30% bei  $b = 5 \text{ mm}$ ). Allerdings kann dieser Bearbeitungseinfluss durch nachträgliches Glühen (etwa bei  $800^\circ\text{C}$  in Stickstoff-atmosphäre) wieder rückgängig gemacht werden.

In Bezug auf die in der Einleitung aufgeführten vier Gesichtspunkte ergibt sich folgendes:

Die Nichtlinearität und die Hysterese des magneti-schen Mediums sind automatisch berücksichtigt, eben-so (bei Nachbildung der Luft durch konstante Induk-tivitäten bzw. entsprechende Widerstände) die Streu-flussbildung. Schwierigkeiten entstehen nur beim Ein-bezug der Nichtisotropie. Dies um so mehr, als die Ab-hängigkeit der Eisenverluste von  $\alpha$  allgemein einen ziemlich komplizierten Verlauf aufweisen kann. Eine angenäherte Berücksichtigung ist dadurch möglich, dass man die «vertikalen» und die «horizontalen» Netzwerkelemente verschieden macht gemäss den Werten für  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 90^\circ$  durch entsprechenden Schnitt der Kerne. Eine weitere Verbesserung ergibt die Einführung von Diagonalelementen im Netzwerk

bezw. der Übergang auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit entsprechendem Netz. Diese Probleme sollen in einer späteren Arbeit behandelt werden.

## 6. Ausdehnung auf elektromagnetische Felder

Der freie Raum und die meisten andern Medien, durch welche sich elektromagnetische Wellen fortpflanzen, enthalten sowohl Permeabilität wie Kapazität. Diese stellen die Speicher dar für kinetische und potentielle Energie, so dass die Fortpflanzung von elektrischer und magnetischer Energie zu einem Wellenphänomen wird. Es ist deshalb meist nicht möglich, eine Potentialfunktion zu definieren und durch Nachbildung die dem elektrischen und magnetischen Feld entsprechenden Potentialgradienten zu bestimmen, weil ja das elektrische und das magnetische Feld durch die Maxwell'schen Gleichungen eng miteinander verknüpft sind. Für im Feld skalar veränderliche, Permeabilität  $\mu$  und Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  lauten diese:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\left(\mu + \vec{H} \frac{\partial \mu}{\partial H}\right) \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \sigma \vec{E} + \left(\varepsilon + \vec{E} \frac{\partial \varepsilon}{\partial E}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \operatorname{grad} \varepsilon &= \rho \\ \mu \operatorname{div} \vec{H} + \vec{H} \operatorname{grad} \mu &= 0\end{aligned}\quad (13)$$

worin

$\sigma$  elektrische Leitfähigkeit und  $\rho$  elektrische Raumladungsdichte.

Für stromfreie Gebiete, d. h.  $J \equiv 0$  wird mit  $\vec{E} = 0$  und  $\sigma \neq 0$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= 0 \\ \mu \operatorname{div} \vec{H} + \vec{H} \operatorname{grad} \mu &= 0\end{aligned}\quad (14)$$

d. h. die Gl. (13) reduzieren sich auf den weiter oben behandelten Fall.

Im allgemeinen Fall ( $J \neq 0$ ) ist infolge der Kompliziertheit der Maxwell'schen Gleichungen (13) eine Nachbildung nicht möglich. Hingegen sind Analogien anwendbar für Fälle, wo eine Anzahl von Feldkomponenten und/oder deren Ableitungen Null sind. Das Vorgehen ist dann das folgende:

1. Die rot-Gleichungen werden durch Differenzenausdrücke angenähert. Das resultierende Gleichungssystem hat dann zweierlei Veränderliche, nämlich die von Null verschiedenen Komponenten von  $H$  und von  $E$ .

2. Die Differenzgleichungen werden aufgefasst als Knotengleichungen eines elektrischen Impedanznetzwerkes, wobei  $E$  den Knotenpotentialen und  $H$  den Strömen entspricht oder umgekehrt.

3. Das Netz wird aufgebaut. Entsprechende Randwerte, Anfangsbedingungen und innere Erregungen werden als Potentiale bzw. Ströme an das Netz angelegt und die gesuchten Größen des stationären Zustands an den interessierenden Knoten gemessen.

Diese Behandlung ist prinzipiell verschieden von jener bei einfachen elektrischen oder magnetischen Feldern. Denn die Knotenpotentiale bzw. Ströme sind *nicht mehr* die Darstellung der entsprechenden Größen eines einzigen Feldes (z. B.  $I_N \sim E$ ,  $V_N \sim V$  beim elektrischen Feld), sondern jede der Netzvariablen stellt die Feldstärke eines der beiden total verschiedenen Felder dar.

## 6.1 Beispiel einer Analogie

Betrachte man den Fall, wo alle Feldgrößen nur von den Koordinaten  $x$  und  $y$  eines Kartesischen Koordinatensystems  $(x, y, z)$  abhängen und wo speziell  $H_z = E_x = E_y = 0$  ist. Die Feldrotoren  $\operatorname{rot} \vec{E}$  und  $\operatorname{rot} \vec{H}$  schrumpfen dann zusammen auf:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}, -\frac{\partial E_z}{\partial x}, 0\right) \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \left(0, 0, \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\quad (15)$$

und überführen für zunächst konstantes  $\mu$  und  $\varepsilon$  die Maxwell'schen Rotationsausdrücke nach Gl. (13) in die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \sigma E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} &= -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= +\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}\end{aligned}\quad (16)$$

Durch die Ansätze

$$\begin{aligned}H_y &= H_y(x, y) \cdot e^{j\omega t} \\ H_x &= H_x(x, y) \cdot e^{j\omega t} \\ E_z &= E_z(x, y) \cdot e^{j\omega t}\end{aligned}$$

erhalten die Gl. (16) die Form:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \sigma E_z + j\omega \varepsilon E_z \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} &= -j\omega \mu H_x \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= +j\omega \mu H_y\end{aligned}\quad (17)$$

Die Ableitungen von  $\vec{H}$  in Differenzenform, bezogen auf den Punkt  $x, y$ , sind:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial H_y}{\partial x}\right|_{x,y} &\approx \frac{1}{d} \left[ H_y\left(x + \frac{d}{2}, y\right) - H_y\left(x - \frac{d}{2}, y\right) \right] = \\ &= \frac{1}{d} [H_{y_2} - H_{y_1}] \\ \left.\frac{\partial H_x}{\partial y}\right|_{x,y} &\approx \frac{1}{d} \left[ H_x\left(x, y + \frac{d}{2}\right) - H_x\left(x, y - \frac{d}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{d} [H_{x_4} - H_{x_3}]\end{aligned}\quad (18)$$

In ähnlicher Weise erhält man für die Ableitungen von  $E_z$  aus Fig. 4:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial E_z}{\partial y}\right|_{x,y} &\approx \frac{1}{d} [E_z(x, y + d) - E_z(x, y)] = \frac{1}{d} [E_{z_4} - E_{z_0}] \\ \left.\frac{\partial E_z}{\partial x}\right|_{x,y} &\approx \frac{1}{d} [E_z(x + d, y) - E_z(x, y)] = \frac{1}{d} [E_{z_2} - E_{z_0}]\end{aligned}\quad (19)$$

a Feldausschnitt mit den entsprechenden Feldgrößen  
b die dazu analoge Portion des Impedanznetzwerkes  
Bezeichnungen siehe im Text

$$\begin{aligned} \sigma d E_z + \mathbf{j} \omega \varepsilon d E_z &= +H_{y_2} - H_{y_1} - H_{x_4} + H_{x_3} \\ \frac{1}{R} V_0 + \mathbf{j} \omega C V_0 &= -i_2 + i_1 - i_4 + i_3 \end{aligned} \quad (20)$$
$$\begin{aligned} -\mathbf{j}\omega\mu d H_x &= E_{z4} - E_{z0} \\ \mathbf{j}\omega\mu d H_y &= E_{z2} - E_{z0} \\ -\mathbf{j}\omega Li_4 &= V_4 - V_0 \\ -\mathbf{j}\omega Li_2 &= V_2 - V_0 \end{aligned} \quad (21)$$

<i>Elektromagnetisches Feld</i>	<i>Netzwerk</i>
$E_z$	$V_0$
$H_x$	$i_y$
$H_y$	$-i_x$
$\varepsilon d$	$C$
$\sigma d$	$1/R$
$\mu d$	$L$

**Ausschnitt aus dem Impedanz-  
netzwerk nach Fig. 4 b mit den  
angeschriebenen Impedanzen  
der einzelnen Elemente**  
Für ein lineares Medium gilt  
 $\mu_{oi} = \text{konstant}$

Bull. SEV Bd. 52(1961), Nr. 6, 25. März

Verfügung mit  $R = 3,5 \text{ k}\Omega$ , so dass nur das Luftgebiet von Fall zu Fall mit Widerständen  $R_0 = \mu_r R$  nachgebildet werden musste. Mit Widerständen von  $10 \text{ k}\Omega$ ,  $100 \text{ k}\Omega$  und  $1 \text{ M}\Omega$  erhält man so die Nachbildung für die relativen Permeabilitäten  $\mu_r = 2,86 \approx 3$ ,  $\mu_r = 28,6 \approx 30$  und  $\mu_r = 286 \approx 300$ . Dazu kommen die beiden Grenzfälle  $\mu_r = 1$  (wo  $R_0 = R = 3,5 \text{ k}\Omega$ ) und  $\mu_r = \infty$  (wo  $R_0 = \infty$ ).

Zum Erreichen einer genügenden Genauigkeit findet für die Messungen eine Kompensationsmethode Anwendung, sofern nicht ein digitales Voltmeter zur Verfügung steht. Dieses erlaubt eine Beschleunigung der Messungen um etwa das Zehnfache.

Aus dem ausgemessenen Feldbild kann der Streufluss in einfacher Weise bestimmt werden. Die durch die einspringende Ecke  $E$  (Fig. 6) des Winkelprofils

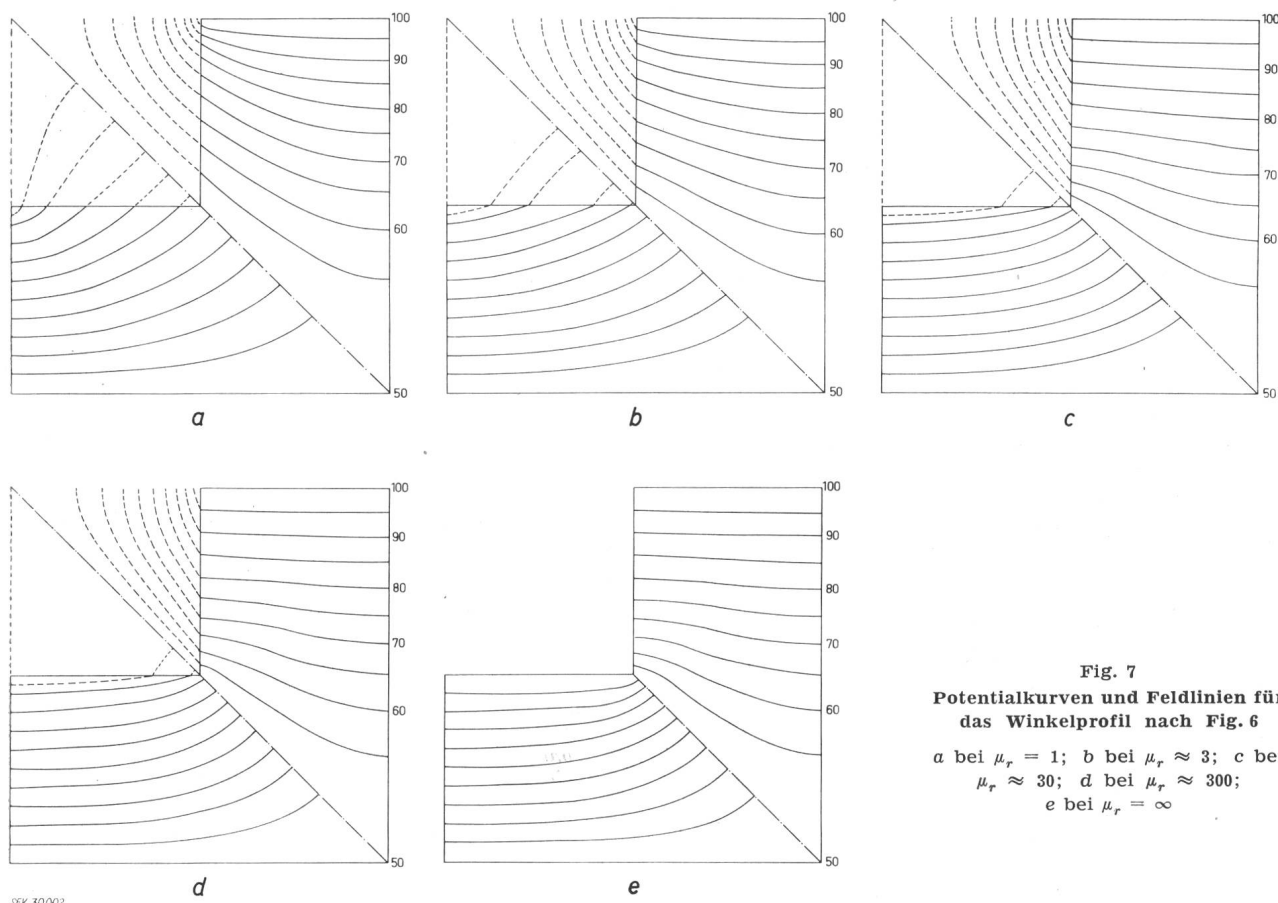


Fig. 7  
Potentialkurven und Feldlinien für das Winkelprofil nach Fig. 6

a bei  $\mu_r = 1$ ; b bei  $\mu_r \approx 3$ ; c bei  $\mu_r \approx 30$ ; d bei  $\mu_r \approx 300$ ; e bei  $\mu_r = \infty$

Alle Widerstände besitzen die Toleranz 1%. Mit einer Standardabweichung im statistischen Sinne von  $5 \cdot 10^{-3}$  darf im ungünstigsten Fall mit einer Genauigkeit von mindestens  $10^{-3}$  für die Knotenpotentiale gerechnet werden, da für ein Feld mittlerer Ausdehnung mit gleichförmigem Potentialgradienten die Standardabweichung für das Potential  $6,7 \cdot 10^{-5}$  beträgt [6]. Aus der konformen Abbildung wird ebenfalls die Grösse der Maschenweite bestimmt, welche notwendig ist, um den dadurch bedingten Fehler zu begrenzen. Sie wurde zu  $h = 0,1a$  gewählt, so dass die gesamte Nachbildung A-C-F-G  $21^2 = 441$  Maschenpunkte umfasst.

### 7.3 Messungen und Auswertung

Besonders einfach sind die beiden Grenzfälle  $\mu_r = 1$  und  $\mu_r = \infty$ , weil dort die Feldlinien direkt als Potentialkurven des dualen Falles bestimmt werden können. Bei  $\mu_r = 1$  liegen dann die Potentiale  $V_m = 0$  bzw.  $V_m$  an den Strecken F-G-C bzw. B-A-D anstelle von  $\overline{DF}$  bzw.  $\overline{BC}$ , während für den Fall  $\mu_r = \infty$  B-A-D durch B-E-D ersetzt wird, da das Gebiet A-B-E-D dann nicht vorhanden ist. Für die übrigen Fälle hingegen müssen die Feldlinien an Hand des ausgemessenen Feldbildes rechnerisch bzw. graphisch bestimmt werden.

gehende Feldlinie teilt nämlich die Strecke  $\overline{DF} = a$  in zwei Segmente  $s$  und  $a-s$ , welche direkt das prozentuale Verhältnis von Streufluss  $\Phi_\sigma$  zu Haupt- (= Nutz-) fluss  $\Phi_h$  bzw. Totalfluss  $\Phi = \Phi_\sigma + \Phi_h$  angeben.

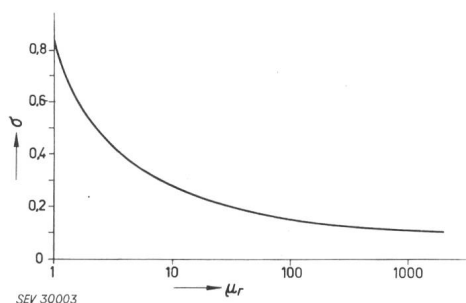


Fig. 8  
Streukoeffizient  $\sigma = \Phi_\sigma / \Phi_h$  in Funktion von  $\mu_r$  für das Winkelprofil nach Fig. 6

Für den Streukoeffizienten  $\sigma$  erhält man dann:

$$\sigma = \frac{\Phi_\sigma}{\Phi_h} = \frac{s}{a-s}$$

mit

$$\frac{s}{a} = \frac{\Phi_\sigma}{\Phi} = \frac{\sigma}{1+\sigma}$$



Die sich aus den verschiedenen Werten von  $\mu_r$  ergebenden Streukoeffizienten sind in Fig. 12 in Funktion von  $\mu_r$  aufgetragen, während die Fig. 7...11 die entsprechenden ausgewerteten Felddbilder zeigen.

Der Autor dankt Prof. Dr. M. J. O. Strutt, Vorstand des Instituts für höhere Elektrotechnik, für die Anregung zur vorliegenden Arbeit. Diese wurde ermöglicht durch einen Kredit des Aluminiumfonds Neuhausen; dieser sei hier ebenfalls bestens verdankt.

#### Literatur

- [1] Tschopp, P. A. und A. H. Frei: Analogienetzwerkmethode und graphisches Verfahren zur Bestimmung von magnetischen Feldern mit örtlich variabler Permeabilität. Arch. Elektrotechn. Bd. 44(1959), Nr. 7, S. 441...454.
- [2] Brechna, H.: Einfluss von Form und Bauart der Transformator-Eisenkörper auf die Ummagnetisierungsverluste. Scientia electr. Bd. 5(1959), Nr. 1, S. 1...18.

- [3] Buchholz, H.: Elektrische und magnetische Potentialfelder. Berlin: Springer 1957.
- [4] Ollendorff, F.: Berechnung magnetischer Felder. Wien: Springer 1952.
- [5] Frey, K. G.: Anwendung der konformen Abbildung auf praktische Probleme des Elektromaschinenbaus. Diss. TH Karlsruhe 1922. [Maschinenschrift.] Koppenfels, W. von und F. Stallmann: Praxis der konformen Abbildung. Berlin: Springer 1959.
- [6] Cremošnik, G.: Ermittlung von Raumladungsfeldern und Kapazitäten mit Hilfe eines Widerstandnetzes mit Stromquellen. Diss. ETH. Zürich: Juris-Vlg. 1957.
- [7] Oberrettl, K.: Die genauere Berechnung des Magnetisierungsstromes von dreiphasigen Asynchronmaschinen. Bull. Oerlikon Bd. -(1959), Nr. 335, S. 66...84.
- [8] Spangenberg, K., G. Walters und F. Schott: Electrical Network Analyzers for the Solution of Electromagnetic Field Problems. Proc. IRE Bd. 37(1949), Nr. 7, S. 724...729; Nr. 8, S. 866...872.

#### Adresse des Autors:

P. A. Tschopp, Dipl. El.-Ing. ETH, Institut für höhere Elektrotechnik an der ETH, Gloriastrasse 35, Zürich 7/6.

## Ersatzschema der Zuleitung in der Hochspannungs-Messtechnik, insbesondere bei der Messung rasch veränderlicher Stoßspannungen

Von A. Ašner, Genf

621.317.32.027.3 : 621.317.333.8

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem der Darstellung der Zuleitung, des Einflusses ihres elektrischen Ersatzschemas in der Stoßspannungs-Messtechnik, insbesondere bei rasch veränderlichen Steilstößen, theoretisch untersucht. Bisher war es allgemein üblich, die Anschlussleitung einer Messanordnung für Stoss als konzentrierte Induktivität darzustellen. Während diese Vereinfachung bei der Messung niederfrequenter, voller sowie im Rücken abgeschnittener Normalstöße 1/50 bestimmt berechtigt ist, bedarf es bei den viel hochfrequenteren, rasch veränderlichen Steilstößen einer genauen Überprüfung der Zulässigkeit und Grenzen einer derartigen Vereinfachung. Durch Darstellung der Zuleitung als verlustloser, am Ende mit einer den Parametern des Teilers entsprechenden Impedanz abgeschlossener Wellenleiter konnte das Problem mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst werden. Die Berechnung ergibt, dass es eine kürzeste Grenzanstiegs- oder -abschneidezeit  $T_{gr}$  des linearen Steilstosses gibt, für welche die vereinfachte Darstellung der Zuleitung als konzentrierte Induktivität noch zulässig ist. Diese Grenzanstiegszeit ist eine Funktion des Verhältnisses  $C/C_0$  (Ersatzkapazität des Spannungsteilers durch Erdkapazität der Zuleitung) und von  $R_s$ , dem Dämpfungswiderstand der Messanordnung.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass für die meisten Stoßspannungs-Messanordnungen die Annahme der Zuleitung als konzentrierte Induktivität selbst bei Steilstößen mit Anstiegszeiten von 0,5...0,6  $\mu s$  berechtigt ist.

### 1. Theoretischer Teil

Beim Entwurf einer Messanordnung für Stoss, die allgemein aus Zuleitung, Spannungsteiler und Niederspannungsarm mit Messkabel und Oszillograph zusammengesetzt ist, wird man bestrebt sein, den Übertragungsfehler für verschiedene Stossspannungen unter Annahme der berechneten oder gemessenen elektrischen Parameter der Messanordnung möglichst genau vorauszubestimmen. Während über die Ersatzschemata der heute gebrauchten Spannungsteiler eingehende theoretische und experimentelle Arbeiten vorliegen [1]<sup>1)</sup>, ist der Einfluss des Ersatzschemas der Zuleitung bisher nicht näher untersucht worden. Die Zuleitung ist stets als konzentrierte Induktivität  $L$ , die annähernd der Induktivität einer Freileitung zu 1,25  $[\mu H/m]$  gleichge-

Le présent article traite d'une manière théorique du problème de la représentation du conducteur d'aménée, de l'influence de son schéma équivalent dans la technique de mesure des tensions de choc, notamment en ce qui concerne les impulsions rapides à front raide. Jusqu'à présent, la connexion à l'objet de mesure fut présentée comme inductance concentrée pour le courant de choc. Tandis que cette simplification est justifiée pour la mesure de chocs normalisés 1/50, c'est-à-dire pour les chocs à basse fréquence, les chocs pleins et les chocs coupés, il est nécessaire d'examiner l'admissibilité et les limites d'une telle simplification pour les impulsions rapides à front raide à haute fréquence. Le problème a pu être résolu par l'application de la transformation de Laplace et la représentation du conducteur d'aménée comme ligne homogène sans perte chargée à son extrémité par une impédance qui correspond aux paramètres du diviseur. La théorie démontre qu'il existe un temps de montée ou de coupure minimal  $T_{gr}$  du choc à front linéaire pour lequel la représentation simplifiée du conducteur d'aménée comme inductance concentrée reste valable. Le temps de montée est une fonction de la relation  $C/C_0$  (capacité équivalente du diviseur de tension divisée par la capacité de terre du conducteur d'aménée) et de  $R_s$  (résistance d'atténuation du dispositif de mesure).

En résumé, on constate que pour la plupart des dispositifs de mesure des tensions de choc l'admission de l'inductance concentrée pour le conducteur d'aménée est justifiée même pour les chocs à front raide avec un temps de montée de 0,5...0,6  $\mu s$ .

setzt wurde, dargestellt worden (Fig. 1). Während diese Annäherung im Bereiche der niederfrequenten vollen und im Rücken abgeschnittenen Normalstößen berechtigt ist [2], bedarf es bei einer solchen

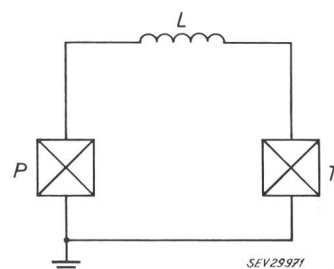


Fig. 1

Vereinfachte Darstellung der Zuleitung als konzentrierte Induktivität

P Prüfling; T Spannungsteiler; L Induktivität der Zuleitung

Vereinfachung in Anbetracht der viel hochfrequenten, rasch veränderlichen Steilstößen einer genaueren Überprüfung der Zulässigkeit und ihrer Grenzen.

<sup>1)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.