

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 50 (1959)
Heft: 9

Artikel: Graphische Ermittlung des Spannungsabfalls an Energieübertragungsleitungen
Autor: Keller, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1059450>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Graphische Ermittlung des Spannungsabfalls an Energieübertragungsleitungen

Von W. Keller, Biel

518.4 : 621.317.321.015.1 : 621.315.1

Die beschriebene Methode gestattet, den Spannungsabfall für induktive und kapazitive Belastungen, unter Berücksichtigung der kapazitiven und induktiven Reaktanz der Leitung, auf einfache Weise genau zu ermitteln.

L'auteur développe une méthode qui permet de déterminer avec précision et d'une manière très simple la chute de tension soit pour des charges inductives ou capacitives en tenant compte de la réactance inductive et capacitive de la ligne.

Die genaue Berechnung des Spannungsabfalls an Energieübertragungsleitungen nimmt verhältnismässig viel Zeit in Anspruch; denn es ist notwendig, ausser dem Ohmschen Widerstand auch die Induktivität der Leitung, bei höheren Spannungen und entsprechend langen Leitungen auch die Kapazität zwischen den Leitern in die Rechnung einzubeziehen. Es ist somit ein Bedürfnis, ein Verfahren zu entwickeln, das gestattet, schneller zum Ziele zu gelangen, ohne dabei ungenaue Resultate erwarten zu müssen. Es hat sich nun erwiesen, dass die im folgenden beschriebene graphische Lösung diesen Forderungen gerecht wird.

Es sollen bedeuten

U_a, U_e	Spannung am Anfang bzw. am Ende der Leitung
U_R, U_X	Spannung am Ohmschen Widerstand bzw. an der Reaktanz der Leitung
P_a, P_e	Leistung am Anfang bzw. am Ende der Leitung
R, X	Ohmscher Widerstand bzw. Reaktanz der Leitung
r, x	Widerstand und Reaktanz pro km Leitungslänge
l	Leitungslänge in km
$\varepsilon_a, \varepsilon_e, \varepsilon_R, \varepsilon_X$	Spannungen in % der Anfangsspannung U_a
ε	Spannungsverlust in % von U_a

In den meisten praktischen Fällen sind U_a, P_e und $\cos \varphi_e$ bekannt. Der Strom ist somit

$$I = \frac{P_e}{U_e \cos \varphi_e}$$

Da U_e unbekannt ist, kann I nicht direkt ermittelt werden. Es kann gesetzt werden

$$U_R = I R = \frac{P_e R}{U_e \cos \varphi_e}$$

und

$$U_X = I X = \frac{P_e X}{U_e \cos \varphi_e}$$

somit ist

$$\varepsilon_R = \frac{100 U_R}{U_a} = \frac{100 P_e R}{U_e U_a \cos \varphi_e}$$

und

$$\varepsilon_X = \frac{100 U_X}{U_a} = \frac{100 P_e X}{U_e U_a \cos \varphi_e}$$

Wegen

$$U_e = \frac{\varepsilon_e U_a}{100}$$

wird

$$\varepsilon_R = \frac{10^4 P_e R}{\varepsilon_e U_a^2 \cos \varphi_e}$$

und

$$\varepsilon_X = \frac{10^4 P_e X}{\varepsilon_e U_a^2 \cos \varphi_e}$$

Ferner ist

$$\varepsilon_e = \varepsilon_a - \varepsilon = 100 - \varepsilon \quad (1)$$

und deshalb

$$\varepsilon_R = \frac{100}{100 - \varepsilon} \cdot \frac{100 P_e l r}{U_a^2 \cos \varphi_e} \quad (2)$$

und

$$\varepsilon_X = \frac{100}{100 - \varepsilon} \cdot \frac{100 P_e l x}{U_a^2 \cos \varphi_e} \quad (2a)$$

Setzt man

$$\frac{100 P_e l r}{U_a^2 \cos \varphi_e} = \varepsilon_R' \quad (3)$$

und

$$\frac{100 P_e l x}{U_a^2 \cos \varphi_e} = \varepsilon_X' \quad (4)$$

so wird

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R' \frac{100}{100 - \varepsilon} \quad (5)$$

und

$$\varepsilon_X = \varepsilon_X' \frac{100}{100 - \varepsilon} \quad (5a)$$

Aus $\cos \varphi_e, r$ und x ergeben sich die Richtungen der Spannungsvektoren, und das Spannungsdiagramm gemäss Fig. 2, wie es für die graphische Ermittlung des Spannungsabfalls benötigt wird, kann aufgezeichnet werden.

Um ε genau bestimmen zu können, ist es vorteilhaft, im maßstäblichen Diagramm für 1% eine Strecke von 1 cm zu wählen. Damit für das Diagramm nicht übermässig viel Platz benötigt wird, zeichnet man in die Fig. 1 nur das Dreieck $\varepsilon_R', \varepsilon_X', \varepsilon_Z'$ ein, während die zum voraus eingezeichneten $\cos \varphi$ -Strahlen die jeweilige Richtung von ε_e angeben.

Nachdem ε_R' und ε_X' gemäss Gl. (3) und (4) berechnet und in die Fig. 1 eingezeichnet sind, legt man die Fig. 2, die auf durchsichtiges starkes Papier gezeichnet wird, in der Weise auf Fig. 1, dass sich die Linie, auf welche der ε -Maßstab aufgetragen ist, mit dem passenden $\cos \varphi$ -Strahl, d.h. mit der ε_e -Richtung deckt und der ε_a -Kreisbogen zugleich den Punkt A berührt. Beim Punkt B kann nun auf dem ε -Maßstab das gesuchte ε abgelesen werden.

Würde man die Strecke OB in cm messen, ergäbe sich nicht ε sondern ε' . Nach Gl. (5) ist

$$\varepsilon = \varepsilon' \frac{100!}{100 - \varepsilon} \quad (6)$$

Nachdem die zu den Werten ε' gehörenden Strecken ε nach Gl. (6) vorausberechnet worden sind, kann der in Fig. 2 einzuzuzeichnende ε -Maßstab erstellt werden. Er gestattet, den Betrag von ε auf Bruchteile von $\frac{0}{100}$ genau abzulesen.

Zeichnet man die Fig. 2 auf geeignetes Papier, wird sie eine lange Lebensdauer haben. Fig. 1 wird mit Vorteil ebenfalls auf Pauspapier gezeichnet,

damit nach Bedarf jeweils neue Abzüge davon erstellt werden können.

Bei kapazitiven Belastungen kann es bekanntlich vorkommen, dass $U_e > U_a$. Diese Tatsache äussert sich dadurch, dass das am Maßstab abgelesene ε negativ erscheint, sofern man darauf achtet, dass nun die im kapazitiven Bereich der Fig. 1 gelegenen $\cos \varphi$ -Strahlen berücksichtigt werden.

Für die Berechnung des Spannungsabfalls an Freileitungen mit Betriebsspannungen von etwa

$$U_Z = U_{Z1} + U_{Z2} + \dots + U_{Zn} = \frac{I_c Z}{n^2} \cdot$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{I_c Z}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(n+1) = n^2$$

und

$$U_Z = \frac{I_c Z}{n^2} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{I_c Z}{2}$$

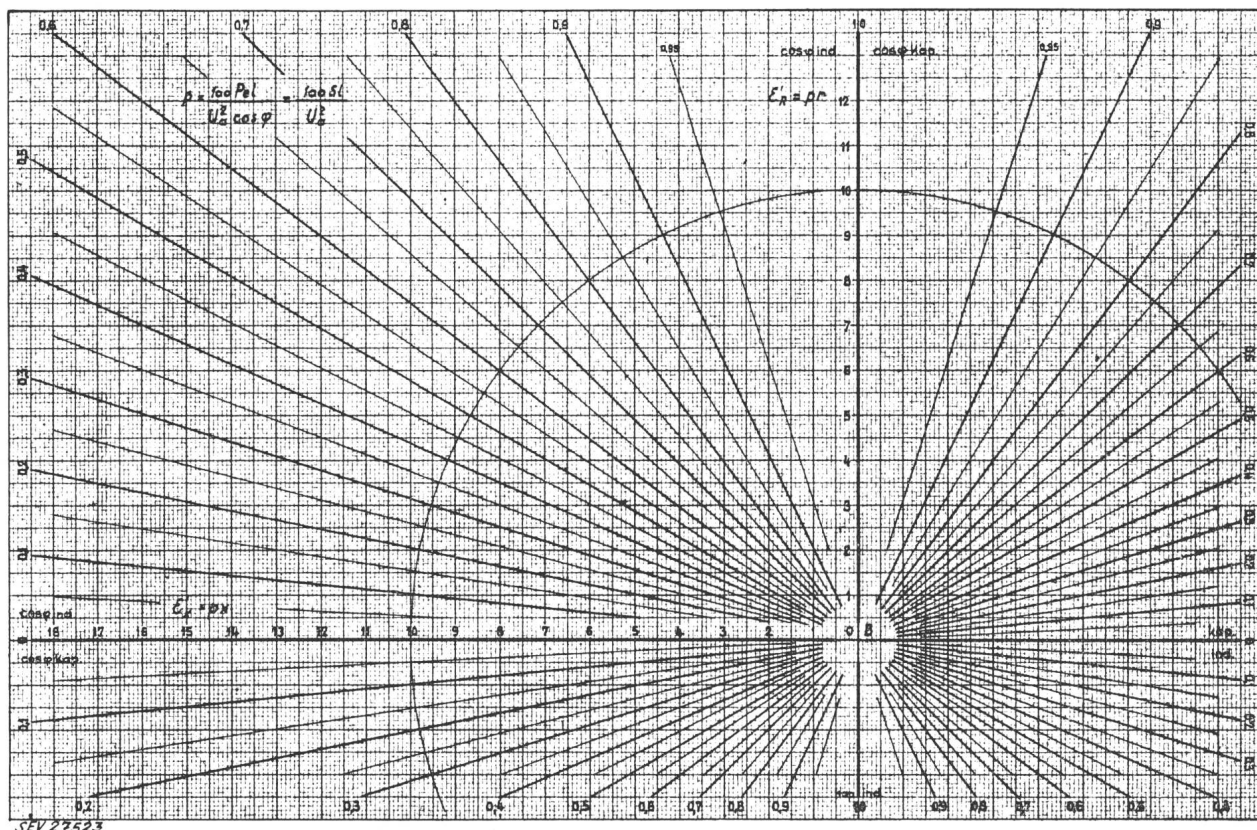


Fig. 1

Gitter zum Einzeichnen der Werte ε_R und ε_X

50 kV und mehr oder an Kabelleitungen muss die Kapazität der Leitung in die Rechnung einbezogen werden. Diese Kapazität ist gleichmässig längs der ganzen Leitung verteilt, und der Ladungsstrom I_c nimmt vom Ende bis zum Anfang der Leitung von Null bis zum Wert I_c stetig zu. Diesem Strom entspricht eine kapazitive Blindleistung Q_c .

Teilt man die Leitung in n gleiche Abschnitte ein, entstehen n Teilkapazitäten und n Teilimpedanzen Z/n ; jede Teilkapazität nimmt den Teilstrom I_c/n auf.

In der letzten Teilimpedanz Z/n bewirkt der Strom I_c/n einen Spannungsabfall

$$U_{Z1} = \frac{I_c}{n} \cdot \frac{Z}{n} = \frac{I_c Z}{n^2}$$

An der zweitletzten Teilimpedanz Z/n entsteht durch den Strom $2 I_c/n$ die Spannung

$$U_{Z2} = \frac{2 I_c Z}{n^2} \text{ usf.}$$

Die Spannung an der ganzen Impedanz Z ist somit

Diese Überlegungen lassen erkennen, dass die längs der Leitung verteilte Kapazität den gleichen Spannungsabfall bewirkt wie eine Blindleistung von der Grösse der halben Leitungs-Blindleistung $Q_c/2$, die am Ende der Leitung angeschlossen würde.

Durch die Einwirkung der Leitungskapazität ändert sich mit der Blindleistung auch der Leistungsfaktor $\cos \varphi$.

Es genügt, in Gl. (3) und Gl. (4) an Stelle von $\cos \varphi_e$ einen entsprechend korrigierten Wert $\cos \varphi_k$ zu setzen, um für ε_R' und ε_X' Werte zu erhalten, die den Einfluss der Leitungskapazität berücksichtigen. Man findet $\tan \varphi_k$, indem man die Hälfte der kapazitiven Leitungs-Blindleistung $Q_c/2$ von der Blindleistung der Belastung subtrahiert und diese Differenz durch die Leistung P_e dividiert.

$$\tan \varphi_k = \frac{\pm Q_e - Q_c/2}{P_e} = \frac{\pm Q_e}{P_e} - \frac{Q_c}{2 P_e};$$

$$\frac{\pm Q_e}{P_e} = \frac{\pm \sin \varphi_e}{\cos \varphi_e}$$

Somit wird

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pm \sin \varphi_e}{\cos \varphi_e} - \frac{Q_c}{2 P_e} \right)^2}}$$

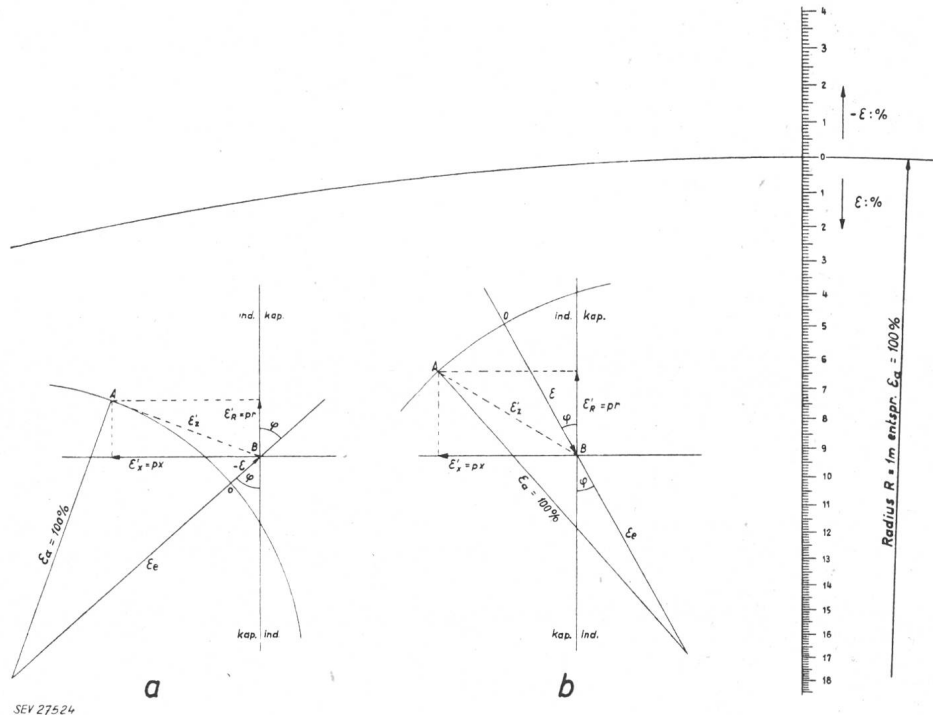
$$\cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi_e} - 1} - \frac{Q_c}{2 P_e} \right)^2}} \quad (7)$$

Bei kapazitiver Belastung ist in der Klammer vor der Wurzel das negative Vorzeichen zu setzen. Wird der Klammerausdruck negativ, befindet sich der resultierende Phasenwinkel im kapazitiven Bereich, und es ist in Fig. 1 der entsprechende $\cos \varphi$ -Strahl zu berücksichtigen.

Durch Zeichnen des Dreieckes P_e, Q_e, S_e (Scheinleistung) in einem bestimmten Maßstab und sinngemässes Einzeichnen von $Q_c/2$ kann $\cos \varphi_k$ auf einfache Weise auch graphisch ermittelt werden.

Zur Bestimmung der Spannungserhöhung am Ende einer leerlaufenden Leitung ist in Gl. (3) und Gl. (4) $Q_c/2$ an Stelle von $P_e/\cos \varphi_e$ zu setzen. Die so erhaltenen Werte für ε_R' und ε_X' werden wieder, wie

Fig. 2
Spannungsdiagramm für kapazitive (a) bzw. für induktive (b) Belastung



schon beschrieben, in Fig. 1 eingezeichnet. Es ist nun darauf zu achten, dass die Linie des ε -Massstabes der Fig. 2 mit der Linie des ε_X' -Massstabes der Fig. 1 zusammenfällt, denn $\cos \varphi$ ist jetzt gleich Null. Auf dem $-\varepsilon$ -Maßstab kann nun die Spannungserhöhung abgelesen werden.

Die Leistungsverluste betragen für Drehstromleitungen

$$P_v = 3 I^2 R = \frac{S^2 R}{U_e^2} = \frac{P_e^2 R}{U_e^2 \cos^2 \varphi_e} \quad (8)$$

Daraus ergibt sich der Leistungsverlust in % der Leistung P_e

$$p_v = \frac{100 P_v}{P_e} = \frac{100 P_e R}{U_e^2 \cos^2 \varphi_e} \quad (9)$$

Da ε_R' und ε schon ermittelt worden sind, ist es vorteilhaft, den prozentualen Leistungsverlust in Abhängigkeit von ε_R' und ε anzugeben.

Wegen $U_e = \frac{\varepsilon_e U_a}{100}$, $\varepsilon_e = 100 - \varepsilon$ und nach Gl. (9) wird

$$p_v = \frac{10^4 \cdot 100 P_e l r}{(100 - \varepsilon)^2 U_a^2 \cos^2 \varphi_e} \quad (10)$$

Somit ist nach Gl. (3) und Gl. (10)

$$p_v = \frac{\varepsilon_R'}{\cos \varphi_e} \left(\frac{100}{100 - \varepsilon} \right)^2 \quad (11)$$

Soll der Leistungsverlust unter Berücksichtigung der Leitungskapazität berechnet werden, betrachtet man vorerst die unbelastete Leitung.

Teilt man die Leitung wieder in n gleiche Teile ein, entstehen n Teilwiderstände von der Grösse R/n .

Im letzten Teilwiderstand entsteht der Leistungsverlust

$$P_1 = \frac{I_c^2}{n^2} \cdot \frac{R}{n}$$

Im zweitletzten Teilwiderstand ist

$$P_2 = \frac{(2 I_c)^2}{n^2} \cdot \frac{R}{n} \text{ usw.}$$

Der Leistungsverlust in einem Leiter beträgt somit:

$$P = \frac{I_c^2 R}{n^3} + \frac{2^2 I_c^2 R}{n^3} + \dots + \frac{n^2 I_c^2 R}{n^3} = \frac{I_c^2 R}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{I_c^2 R}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(n+1)(2n+1) = 2n^3$$

und

$$P = \frac{I_c^2 R}{n^3} \cdot \frac{2n^3}{2 \cdot 3} = \frac{I_c^2 R}{3} \quad (12)$$

Für 3 Leiter ist deshalb

$$P_v = I_c^2 R$$

$$I_c = \frac{Q_c}{\sqrt{3} U_e}$$

und

$$P_v = \frac{Q_c^2 R}{3 U_e^2}$$

Nach Gl. (12) bewirkt der Ladungsstrom, der vom Ende bis zum Anfang der Leitung stetig von Null bis zum Wert I_c zunimmt, den gleichen Leistungsverlust wie ein längs der ganzen Leitung unveränderlicher Strom $I_c/\sqrt{3}$, der durch eine am Ende der Leitung angeschlossene Blindleistung $Q_c/\sqrt{3}$ hervorgerufen würde.

Für die Berechnung des Leistungsverlustes unter Berücksichtigung der kapazitiven Blindleistung Q_c der Leitung ist somit in Gl. (3) und Gl. (11) $\cos \varphi_e$ zu ersetzen durch

$$\cos \varphi_p = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi_e} - 1} - \frac{Q_c}{\sqrt{3} P_e} \right)^2}} \quad (13)$$

$\cos \varphi_p$ kann durch maßstäbliches Einzeichnen von $Q_c/\sqrt{3}$ in das Dreieck P_e, Q_e, S_e auch graphisch ermittelt werden.

Sind U_a, P_a und $\cos \varphi_a$ bekannt, können

$$\varepsilon_R = \frac{100 P_a R}{U_a^2 \cos \varphi_a}$$

und

$$\varepsilon_X = \frac{100 P_a X}{U_a^2 \cos \varphi_a}$$

ermittelt und in Fig. 1 eingezeichnet werden.

Analog verfährt man, wenn U_e, P_e und $\cos \varphi_e$ bekannt sind.

ε wird in beiden Fällen nicht am Maßstab der Fig. 2 abgelesen, sondern die entsprechende Strecke, gemessen in cm, ergibt ε . Ferner ist $p_v = \varepsilon_R / \cos \varphi$.

Es soll noch ein Sonderfall betrachtet werden.

Besteht die Last aus Verbrauchern mit unveränderlichen Impedanzen, so ändert sich P_e proportional dem Quadrat der Spannung U_e , und es sind deshalb die Anfangsspannung U_a , die Nennleistung P_n , die Nennspannung U_n und $\cos \varphi_n$ der Verbraucher bekannt. ε und p_v können somit nur in Abhängigkeit dieser bekannten Größen angegeben werden. Der Strom ist:

$$I = \frac{P_n}{U_n \cos \varphi_n} \cdot \frac{U_e}{U_n}$$

und somit

$$U_R = \frac{P_n U_e R}{U_n^2 \cos \varphi_n}$$

und

$$U_X = \frac{P_n U_e X}{U_n^2 \cos \varphi_n}$$

Daraus wird

$$\begin{aligned} \varepsilon_R &= \frac{100 U_R}{U_a} = \frac{100 P_n U_e R}{U_a U_n^2 \cos \varphi_n} = \frac{\varepsilon_e P_n R}{U_n^2 \cos \varphi_n} = \\ &= \frac{100 P_n R}{U_n^2 \cos \varphi_n} \cdot \frac{100 - \varepsilon}{100} \end{aligned}$$

Setzt man

$$\varepsilon_R' = \frac{100 P_n R}{U_n^2 \cos \varphi_n}$$

und

$$\varepsilon_X' = \frac{100 P_n X}{U_n^2 \cos \varphi_n}$$

so werden

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R' \frac{100 - \varepsilon}{100}$$

$$\varepsilon_X = \varepsilon_X' \frac{100 - \varepsilon}{100}$$

und

$$\varepsilon = \varepsilon' \frac{100 - \varepsilon}{100}$$

Daraus folgt

$$\varepsilon = \varepsilon' \frac{100}{100 + \varepsilon'} \quad (14)$$

Beim Aufeinanderlegen der Fig. 1 und 2 auf die schon beschriebene Weise kann auch in diesem Fall ε nicht am Maßstab der Fig. 2 abgelesen werden, sondern die Strecke \overline{OB} , gemessen in cm, ergibt ε' in Gl. (14).

Die Leistungsverluste betragen:

$$P_v = \frac{P_n^2 R}{U_n^2 \cos^2 \varphi_n} \cdot \frac{U_e^2}{U_n^2}$$

und in % von P_n :

$$p_v = \frac{100 P_n R}{U_n^2 \cos^2 \varphi_n} \cdot \frac{U_e^2}{U_n^2} = \frac{\varepsilon_R'}{\cos \varphi_n} \left(\frac{U_a}{U_n} \cdot \frac{100 - \varepsilon}{100} \right)^2 \quad (15)$$

Für die Anwendung der beschriebenen Methode auf Gleichstromleitungen genügt es, $\cos \varphi = 1$ und $\varepsilon_X = 0$ zu setzen. Als Leitungslänge l ist dann wie für Einphasenleitungen, nicht die einfache Leitungslänge, sondern die Länge der Hin- und Rückleitung einzusetzen.

Diese graphische Methode steht der analytischen Berechnung in Bezug auf Genauigkeit in keiner Weise nach.

Literatur

- [1] Keller, W.: Berechnung des Spannungsverlustes unter Berücksichtigung der Selbstinduktion der Leitung. Bull. SEV Bd. 22(1931), Nr. 14, S. 337...339.
- [2] Keller, W.: Über die Berechnung des Spannungsabfalles auf Wechselstrom-Freileitungen. Bull. SEV Bd. 43(1952), Nr. 23, S. 939...942.

Adresse des Autors:

W. Keller, Höhweg 3, Biel (BE).

Technische Mitteilungen — Communications de nature technique

Leuchtstofflampen mit nicht kreisförmigem Querschnitt

621.327.534.15

[Nach K. Bernhardt: Leuchtstofflampen mit nicht kreisförmigem Querschnitt. Lichttechnik Bd. 10(1958), Nr. 8, S. 416...417]

Die Lichtstromsteigerung von Leuchtstofflampen pro Längeneinheit ist schon seit langer Zeit das Bestreben der Kon-

strukteure. Bei einer Neuentwicklung in den USA konnte bei normaler Stromdichte eine höhere Lichtausbeute oder aber bei grösserer Belastung der Lampe ein grösserer Lichtstrom bei gleich guter Lichtausbeute erzielt werden. Beobachtet man den Lichtstrom von gleichlangen Röhren, aber mit verschiedenen Durchmessern, in Funktion der Leistungsaufnahme, so kann festgestellt werden, dass die Lichtausbeute mit steigender