

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 49 (1958)  
**Heft:** 20

**Artikel:** Die Berechnung der Kurzschlusskräfte  
**Autor:** Kulda, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1059744>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

GEMEINSAMES PUBLIKATIONSORGAN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS (SEV) UND  
DES VERBANDES SCHWEIZERISCHER ELEKTRIZITÄTWERKE (VSE)

## Die Berechnung der Kurzschlusskräfte

Von J. Kulda, Praha

621.314.21.045 : 621.3.014.32

In der Arbeit wird nachgewiesen, dass die Berechnung der Kräfte, welche auf einen Leiter im magnetischen Feld wirken, auf Grund des Biot-Savartschen Gesetzes sowie auf Grund der Energie des magnetischen Feldes zu den gleichen Ergebnissen führt. Beide Berechnungsarten ermöglichen auch die Bestimmung der Verteilung der Kräfte längs der Wicklungen. Im weiteren wird auf den Fehler hingewiesen, welcher bei Berechnung der axialen Kraft aus der magnetischen Feldenergie bei nicht ganz korrekter Durchführung der virtuellen Verschiebung der betreffenden Wicklung entstehen kann. Zum Schluss werden die Berechnungsergebnisse auf Grund beider Methoden miteinander verglichen. Es wird gezeigt, dass die Berechnung auf Grund des Biot-Savartschen Gesetzes einfacher, schneller und anschaulicher ist als die Berechnung auf Grund der magnetischen Feldenergie, welche besonders bei weniger einfachen Wicklungsanordnungen recht schwierig und langwierig ist.

L'auteur démontre que le calcul des forces agissant sur un conducteur se trouvant dans un champ magnétique conduit aux mêmes résultats en appliquant la loi de Biot-Savart, qu'en se basant sur l'énergie du champ magnétique. Ces deux modes de calcul permettent également de déterminer la répartition des forces le long des enroulements. Il attire ensuite l'attention sur l'erreur que l'on peut commettre, lors du calcul de la force axiale due à l'énergie du champ magnétique, si l'on ne procède pas tout à fait correctement au décalage virtuel de l'enroulement considéré. Pour terminer, il compare les résultats des calculs selon les deux méthodes et montre que le calcul basé sur la loi de Biot-Savart est plus simple, plus rapide et plus clair que si l'on considère l'énergie du champ magnétique, méthode passablement compliquée et longue, surtout quand la disposition des enroulements n'est pas très simple.

### 1. Berechnung der Kurzschlusskräfte

Die Kurzschlusskräfte, welche auf die Transformatorwicklungen wirken, können, wie bekannt [1]<sup>1)</sup>:

1. aus dem Gesetz für die Kraftwirkung oder
2. aus der Energie des Magnetfeldes ermittelt werden.

In der Literatur [2] wird oft behauptet, dass einerseits in einigen Fällen beide Berechnungsarten nicht zu übereinstimmenden Ergebnissen führen, und dass andererseits die Kräfteverteilung längs der Wicklungen (die für die richtige Bestimmung der Gesamtaxialkraft und für die Beurteilung der mechanischen Beanspruchung von einzelnen Windungen wichtig ist), nur aus dem Gesetz für die Kraftwirkung (Stromkraftgesetz) bestimmt werden kann.

In der vorliegenden Arbeit werden beide Ermittlungsarten benützt, um die Kräfte zu bestimmen, die im Magnetfeld auf den stromdurchflossenen Leiter wirken. Es wird gezeigt, dass die Verteilung der Kräfte längs der Wicklungen auch aus der Verteilung der magnetischen Energie oder aus der Energie der Wechselwirkung bestimmt werden kann.

An einigen Beispielen wird auch bewiesen, dass die verschiedenen Berechnungsgänge immer zu gleichen Ergebnissen führen. Zum Schluss wird auch der Ursprung des Fehlers bei der Berechnung der Axialkraft aus der magnetischen Energie erläutert.

### a) Berechnung aus dem Gesetz für die Kraftwirkung

Wenn man einen Leiter mit der Stromdichte  $\vec{\sigma}$  [A/m<sup>2</sup>] in ein Magnetfeld von der Induktion  $\vec{B}$  bringt, wirkt auf ihn die Kraft

$$\vec{F} = \iiint_T [\vec{\sigma}' \vec{B}] dT \quad \left[ \text{N}; \frac{\text{A}}{\text{m}^2}, \text{T}, \text{m}^3 \right] \quad (1)$$

$T$  bezeichnet den Raum des Leiters.

Auf die Volumeneinheit des Leiters wirkt dann die Kraft

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dT} = [\vec{\sigma}' \vec{B}] \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^3}; \frac{\text{A}}{\text{m}^2}, \text{T} \right] \quad (2)$$

Bei der Berechnung von Kurzschlusskräften in Transformatoren mit Zylinderwicklungen wird gewöhnlich deren Dicke vernachlässigt und die Wicklungen werden durch unendlich dünne Stromschichten ersetzt, die sich aus Stromfäden zusammensetzen. Für einen solchen vom Strom  $I$  durchflossenen Faden geht die Gl. (1) in die Gleichung

$$\vec{F} = I \oint_i [d\vec{l} \vec{B}] = I \oint_i [\vec{l}_0 \vec{B}] dl \quad [\text{N}; \text{A}, \text{m}, \text{T}] \quad (3)$$

und Gl. (2) in die Gleichung

$$\vec{f} = I [\vec{l}_0 \vec{B}] \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}}; \text{A}, \text{m}, \text{T} \right] \quad (4)$$

über.  $\vec{l}_0$  ist der Einheitsvektor.

Auf Grund von Gl. (4) soll nun die Verteilung der Axial- und Radialkräfte längs der Wicklungen

<sup>1)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

untersucht und so die Lokalkräfte bestimmt werden. Aus Gl. (3) kann man dann diejenige Kraft ermitteln, die auf den gegebenen Abschnitt oder auf die ganze Wicklung einwirkt, wobei man  $I = \sigma dh$  setzt und Gl. (3) im gegebenen Gebiet integriert.  $\sigma$  [A/m] ist der Strombelag und  $h$  die Wicklungshöhe.

Da die Stromverteilung in der Wicklung bekannt ist, muss nur die magnetische Induktion  $\vec{B}$  längs der Wicklung bestimmt werden; dies kann entweder aus dem Biot-Savartschen Gesetz, aus dem Vektorpotential oder durch Einführung der mittleren Streulinienlänge geschehen.

b) Berechnung der Kraft aus der Energie des Magnetfeldes

Lege man eine dünne Windung mit dem Strom  $I_2$  in das Magnetfeld, das z. B. von einer Spule mit dem Strom  $I_1$  erregt und in einem beliebigen Punkte durch das Vektorpotential  $\vec{A}_1$

$$\vec{B}_1 = \text{rot } \vec{A}_1 \quad (5)$$

definiert ist. Für die Energie der Wechselwirkung erhält man

$$W_{1,2} = I_2 \oint_i \vec{A}_1 d\vec{l} = I_2 \iint_s \vec{B}_1 d\vec{S} = I_2 \Phi_{1,2} = I_1 I_2 M_{1,2} \quad [J; A, H] \quad (6)$$

$\Phi_{1,2}$  ist der Kraftfluss der Windungsfläche und  $M_{1,2}$  der Wechselinduktionskoeffizient.

Bezeichnet man die auf die Längeneinheit wirkende Kraft mit  $\vec{f}_{1,2}$ , so wird bei der Deformation um  $du$  die mechanische Arbeit

$$dW_m = \oint_i \vec{f}_{1,2} du dl \quad (7)$$

geleistet. Gleichzeitig ändert sich die Energie der Wechselwirkung um den Betrag

$$dW_{1,2} = I_2 \oint_i B_1 [du d\vec{l}] = I_2 \oint_i du [\vec{l}_0 \vec{B}_1] dl \quad (8)$$

Aus dem Vergleich der Gl. (7) und (8) erhält man für die gesuchte Kraft  $\vec{f}_{1,2}$  die Beziehung:

$$\vec{f}_{1,2} = I_2 [\vec{l}_0 \vec{B}_1] \quad (9)$$

die mit Gl. (4) identisch ist.

Aus Gl. (9) kann man weiter die Kraft auf die Volumeneinheit des Leiters mit der Stromdichte  $\vec{\sigma}'_2 = \frac{dI_2}{dS} \vec{l}_0$  ableiten:

$$\vec{f}_{1,2} = [\vec{\sigma}'_2 \vec{B}_1] \quad (10)$$

Aus Gl. (9) und (10) ist es wiederum möglich, die Teil- bzw. Gesamtkraft der Wicklung zu bestimmen.

Die Gleichung für die Kraft kann noch in anderer Form angegeben werden. Nach Durchführung der virtuellen Verschiebung der Windung in Richtung  $du$  erhält man für die Kraft in dieser Richtung

$$F_{1,2} = \frac{\partial W_{1,2}}{\partial u} = I_1 I_2 \frac{\partial M_{1,2}}{\partial u} \quad (11)$$

Die Kraft kann aber auch aus der Gesamtenergie des magnetischen Feldes ermittelt werden, die durch den Ausdruck

$$W = \frac{1}{2} \iiint_T \vec{B} \vec{H} dT = \frac{\mu_0}{2} \iiint_T \vec{H}^2 dT \left[ J; \frac{Aw}{m}, T, m^3 \right] \quad (12a)$$

gegeben ist; dieser kann mit Hilfe von Gl. (5) und unter Benützung des Satzes von Gauss übergeführt werden in:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_T \vec{A} \vec{\sigma} dT \quad (12b)$$

Diese Gleichung ist nur dort im Transformatorfenster zu integrieren, wo sich stromführende Leiter befinden.

In den Gl. (12a) und (12b) bedeuten  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  und  $\vec{A}$  Gesamtwerte, d. h. die Summen der den einzelnen Windungen zugehörigen Werte, unter Voraussetzung von  $\mu = \text{konst.}$

Die magnetische Gesamtenergie kann auch aus bekannten Eigen- und Wechselinduktionskoeffizienten berechnet werden. Für den Zweiwicklungs-Transformator gilt für die Energie

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{1,2} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \quad (13)$$

( $L_1, L_2$  Selbstinduktionskoeffizienten der primären und der sekundären Wicklung;  $M_{12}$  Gegeninduktivität beider Wicklungen)

Mittels der virtuellen Verschiebung der untersuchten Wicklung bekommt man für die gesuchte Kraft

$$F = \frac{\partial W}{\partial u} \quad (14)$$

wo  $W$  durch die Gl. (12) und (13) gegeben ist.

Bei der Durchführung der virtuellen Verschiebung der untersuchten Wicklung ist darauf zu achten, dass alle andere Wicklungen in Ruhe bleiben.

Gl. (12) benützt man bei der Berechnung, wenn das Magnetfeld bekannt ist, was z. B. bei Einführung der mittleren Streulinienlänge der Fall ist, oder wenn das Vektorpotential aus vorhergehenden Berechnungen des Magnetfeldes bereits ermittelt wurde. Gl. (13) wird benützt, wenn für die gegebene Wicklungsanordnung der Ausdruck für die Streuinduktivität bekannt ist.

Aus der Verteilung der magnetischen Energie im Transformatorfenster kann auch die Lokalkraft ermittelt werden. Nach dem von Maxwell abgeleiteten Satz ist die auf einen beliebig begrenzten Raum angreifende Kraft gleich den zugehörigen Flächenkräften [1].

$$\iiint_T \vec{f} dT = \iint_S \left| \frac{\mu_0}{2} \vec{H}^2 \right| dS \quad (15)$$

Im weiteren sollen die erwähnten Gleichungen zur Berechnung von Kräften einiger Wicklungsanordnungen zur Anwendung gebracht werden.

**2. Berechnung von Kräften einiger Wicklungsanordnungen**

**a) Zwei koaxiale Zylinderspulen (Fig. 1)**

Bei der Berechnung der Gesamtaxialkraft bei solcher Wicklungsanordnung ist es vorteilhaft von der Energie auszugehen.

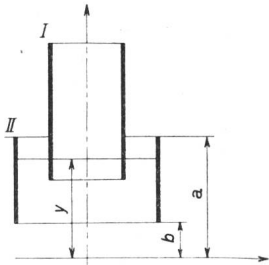


Fig. 1  
Schema der koaxialen Zylinderspulen für die Berechnung der Kraft auf die Spule II  
a, b Ordinaten der Endpunkte der Wicklung II  
y Ordinate der Winding mit dem Fluss  $\Phi_{1,2}(y)$

SEV 27009

Die Wechselenergie beider Spulen wird

$$W_{1,2} = \int_b^a \sigma_2 \Phi_{1,2}(y) dy$$

so dass auf die Wicklung II die Axialkraft

$$F_y = \frac{\partial W_{1,2}}{\partial a} = \sigma_2 [\Phi_{1,2}(a) - \Phi_{1,2}(b)] = I_1 \sigma_2 [M_{1,2}(a) - M_{1,2}(b)] \quad (16)$$

wirkt.  $\Phi_{1,2}(a)$ ,  $\Phi_{1,2}(b)$  sind die Flüsse in den Endwindungen a, b;  $M_{1,2}(a)$ ,  $M_{1,2}(b)$  sind Wechselinduktivitäten der Wicklung I und einer Winding in den Endpunkten a, b der Wicklung II.

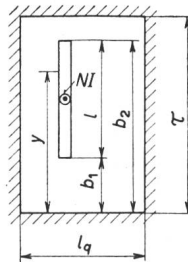
Wenn man für die Bestimmung der totalen Axialkraft Gl. (13) und (14) benützt, kommt nur das zweite Glied von Gl. (13) zur Geltung, da sich die Eigeninduktivität mit der Verschiebung der Spule nicht ändert. Das gilt natürlich nur für Spulen in Luft oder auf einem unendlich langen Kern.

Um die Berechnung des Magnetfeldes im Transformatorfenster zu vereinfachen, wird die mittlere Streulinienlänge eingeführt, deren Wert aus verschiedenen durch Messungen bestätigten Formeln ermittelt werden kann. Bei der Berechnung des Feldes wird dann vorausgesetzt, dass alle Kraftlinien dieselbe Länge haben, d. h. parallel sind. Die Feststellung des Magnetfeldes aus der Verteilung der Durchflutung ist dann sehr einfach und anschaulich und wird deshalb oft benützt, obwohl sie für die Kräftebestimmung nicht immer ganz genau ist. In weiteren Beispielen wird diese mittlere Streulinienlänge  $l_q$  angewendet.

**b) Eine einzige Wicklung im Transformatorfenster (Fig. 2)**

Durch passende Umformung ist es möglich, eine solche Wicklungsanordnung auf zwei Wicklungen überzuführen, von denen die erste I' (Fig. 3) die Höhe des Fensters hat und nur das magnetische Axialfeld bildet, während die zweite I'' die erste so ergänzt, dass die resultierende Verteilung der Durchflutung der Fig. 2 entspricht. Die Wicklung I''

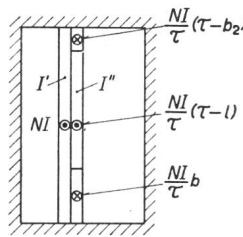
erzeugt nur das Radialfeld (Querfeld). Aus Fig. 3 ist ersichtlich, dass die resultierende Durchflutung der Wicklung I'' gleich Null ist. Sollen die Kraftlinien



SEV 27010

Fig. 2  
Anordnung der Wicklung im Transformatorfenster  
NI Durchflutung;  $b_1, b_2$  Ordinaten der Wicklungsendpunkte; l Windinghöhe; τ Fensterhöhe;  $l_q$  wirksame Streulinienlänge (Fensterbreite)  
y Ordinate der Winding mit der Induktion  $B_x$

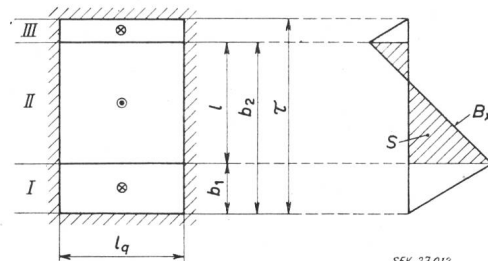
dieser Wicklung nur in der Querrichtung verlaufen, müsse, physikalisch gesehen, die Wicklung I'' das ganze Fenster ausfüllen. Der Einfluss der unendlich grossen Permeabilität des magnetischen Kreises



SEV 27011

Fig. 3  
Zerlegung der Wicklung mit der Durchflutung NI in zwei fiktive Wicklungen  
I' axialfelderregende Wicklung von der Höhe τ; I'' querfelderregende Wicklung mit kompensierter Durchflutung

wird durch Spiegelung ersetzt, so dass man eigentlich das Feld unendlich ausgedehnter Platten untersucht, die in der Axialrichtung periodisch wechseln (Fig 4).



SEV 27012

Fig. 4  
Anordnung von Wicklung II' für die Magnetfeldberechnung aus den Maxwellgleichungen und Verlauf des magnetischen Querfeldes

S Fläche, die für die totale Axialkraft massgebend und ihr proportional ist  
Weitere Bezeichnungen siehe Fig. 2

Die Verteilung der Stromdichte in der Richtung der Achse y kann in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$\sigma' = \sigma_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n' \cdot \cos n y \quad (17)$$

dabei bedeuten

$$\sigma_0' = \frac{N I}{\tau l_q}$$

$$\sigma_n' = \frac{2}{n \pi} \cdot \frac{N I}{l l_q} [\sin n \beta_2 - \sin n \beta_1]$$

$$\left[ \eta = \frac{\pi}{\tau} y, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{\tau} b_1, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{\tau} b_2 \right]$$

Der Stromdichte  $\sigma_0'$  entspricht das Axialfeld  $B_y = -\mu_0\sigma_0'$  im Inneren der Spule. Das Feld des zweiten Gliedes der Gl. (17) bestimmt man mit Hilfe des Vektorpotentials, für welches

$$\Delta A = -\mu_0\sigma_0'$$

gilt. Nach kurzer Umrechnung erhält man für den Raum I ( $0 \leq y \leq b_1$ ):

$$A = \mu_0 \frac{N I}{l_q} \left[ \frac{b_2^2 + b_1 b_2 + b_1^2 + 3 y^2}{6 \tau} - \frac{b_1 + b_2}{2} + \frac{\tau}{3} \right] \quad (18a)$$

für den Raum II ( $b_1 \leq y \leq b_2$ ):

$$A = \mu_0 \frac{N I}{l_q} \left[ \frac{b_2^2 + b_1 b_2 + b_1^2 + 3 y^2}{6 \tau} - \frac{b_2^2 + y^2 - 2 b_1 y}{2 (b_2 - b_1)} + \frac{\tau}{3} \right] \quad (18b)$$

für den Raum III ( $b_2 \leq y \leq \tau$ ):

$$A = \mu_0 \frac{N I}{l_q} \left[ \frac{b_2^2 + b_1 b_2 + b_1^2 + 3 y^2}{6 \tau} - y + \frac{\tau}{3} \right] \quad (18c)$$

Aus Gl. (5) bestimmt man die magnetische Induktion, deren Verlauf in Fig. 4 angegeben ist:

Raum I:

$$B_x = \mu_0 \frac{N I}{l_q} \cdot \frac{y}{\tau} \quad (19a)$$

Raum II:

$$B_x = \mu_0 \frac{N I}{l_q} \left[ \frac{y}{\tau} - \frac{y - b_1}{b_2 - b_1} \right] \quad (19b)$$

Raum III:

$$B_x = \mu_0 \frac{N I}{l_q} \cdot \frac{y - \tau}{\tau} \quad (19c)$$

Die gesamte Axialkraft ermittelt man zuerst aus Gl. (1)

$$F_y = \int_{b_1}^{b_2} \sigma' B_x U l_q dy = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(N I)^2}{l_q} \cdot U \frac{b_1 + b_2 - \tau}{\tau} \left[ \text{N}; \frac{\text{H}}{\text{m}}, \text{A}, \text{m} \right] \quad (20)$$

( $U$  mittlerer Umfang beider Wicklungen)

Zur Feststellung der Axialkraft kann auch die Wechselenergie benützt werden. Ordnet man der Wicklung  $I$  eine übereinstimmende fiktive Wicklung  $I_f$  bei, so herrscht zwischen ihnen die Energie

$$W_{1,2} = \int_{b_1}^{b_2} A \sigma' U l_q dy$$

wo  $b_1'$  und  $b_2'$  Koordinaten der Endpunkte der Wicklung  $I_f$  bedeuten.

Die auf die Wicklung  $I_f$  wirkende Kraft ist:

$$F_y = \frac{\partial W_{1,2}}{\partial b_1'} = \sigma' U l_q [A(b_2') - A(b_1')] = \sigma' U l_q [A(b_2) - A(b_1)]$$

Dasselbe Resultat erreicht man bei der Annahme, dass der Windung in der Höhe  $y$  die Wechselenergie

$$dW_{1,2} = A \sigma' U l_q dy$$

gehört. Die Axialkraft ist dann:

$$F_y = \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial A}{\partial y} \sigma' U l_q dy = \sigma' U l_q [A(b_2) - A(b_1)]$$

Endlich kann die Gesamtenergie  $W$  der Wicklung  $I$  zur Berechnung herangezogen werden:

$$W = \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} A \sigma' U l_q dy$$

Für die Axialkraft gilt dann:

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{\partial W}{\partial b_1} = \frac{1}{2} \sigma' U l_q \left[ \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial A}{\partial y} dy + A(b_2) - A(b_1) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sigma' U l_q \left[ \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial A}{\partial b_1} \cdot \frac{\partial b_1}{\partial y} dy + A(b_2) - A(b_1) \right] = \\ &= \sigma' U l_q [A(b_2) - A(b_1)] \quad (21) \end{aligned}$$

Für den vorliegenden Fall erhält man mit Benützung von Gl. (18)

$$F_y = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(N I)^2}{l_q} U \frac{b_1 + b_2 - \tau}{\tau}$$

Gl. (21) kann nach bekannten Beziehungen wie folgt umgeformt werden:

$$F_y = \sigma' l_q [\Phi(b_2) - \Phi(b_1)] = \frac{N I}{l} \Phi'$$

wo  $\Phi(b_2)$  und  $\Phi(b_1)$  die Flüsse in den Endquerschnitten der Spule darstellen. Der Fluss  $\Phi'$  ist der Fläche  $S$  in Fig. 4 proportional.

Zur Berechnung dieser Kraft kann auch die durch Gl. (12) oder (13) gegebene Gesamtenergie  $W$  herangezogen werden.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{b_1}^{\tau} B H U l_q dy = \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} \sigma' A U l_q dy = \\ &= \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(N I)^2}{l_q} U \left[ \frac{b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2}{3 \tau} - \frac{2 b_2 + b_1}{3} + \frac{\tau}{3} \right] \end{aligned}$$

Die Axialkraft strebt die Wicklung im Fenster zu verschieben und so die Koordinaten  $b_1$  oder  $b_2$  zu ändern. Aus der virtuellen Verschiebung folgt:

$$F_y = \frac{\partial W}{\partial b_1} = \frac{\partial W}{\partial b_2} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(N I)^2}{l_q} U \frac{b_1 + b_2 - \tau}{\tau}$$

c) Zwei Wicklungen mit sich kompensierenden Ampèrewindungen

Für die allgemeine Anordnung (Fig. 5) zweier Wicklungen mit  $N_1 I_1 = -N_2 I_2$  bestimmt man

das resultierende Vektorpotential bzw. die Induktion als Summe der Werte der einzelnen Windungen:

$$A = A_I + A_{II} \quad (22)$$

$$B = B_I + B_{II} \quad (23)$$

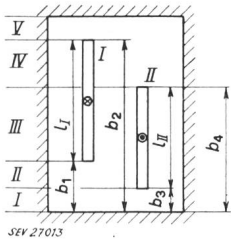


Fig. 5  
Anordnung von zwei Wicklungen im Transformatorfenster  
 $b_1, b_2$  Ordinaten der Endpunkte der Wicklung I;  $b_3, b_4$  Ordinaten der Endpunkte der Wicklung II  
Weitere Bezeichnungen siehe im Text

Für die magnetische Induktion gilt im Raum I:

$$B_x = 0$$

im Raum II:

$$B_x = \mu_0 \frac{N I}{l_q} \cdot \frac{y - b_3}{b_4 - b_3} \quad (23a)$$

im Raum III:

$$B_x = \mu_0 \frac{N I}{l_q} \left[ \frac{y - b_3}{b_4 - b_3} - \frac{y - b_1}{b_2 - b_1} \right] \quad (23b)$$

im Raum IV:

$$B_x = \mu_0 \frac{N I}{l_q} \cdot \frac{b_2 - y}{b_2 - b_1} \quad (23c)$$

im Raum V:

$$B_x = 0$$

Gemäss Gl. (1) wird auf die Wicklung I folgende Kraft wirken:

$$F_{yI} = \int_{b_1}^{b_2} \sigma_1' B_x U l_q dy = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(N I)^2}{l_q} \cdot U \left[ 1 - \frac{(b_4 - b_1)^2}{l_I l_{II}} \right] \quad (24)$$

Auf die Wicklung II die Kraft:

$$F_{yII} = \int_{b_3}^{b_4} \sigma_2' B_x U l_q dy = - \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(N I)^2}{l_q} \cdot U \left[ 1 - \frac{(b_4 - b_1)^2}{l_I l_{II}} \right]$$

Aus der Energie der Wechselwirkung [Gl. (7), Gl. (21)] ergibt sich die Kraft auf die Wicklung I:

$$F_{yI} = \frac{\partial W_{1,2}}{\partial b_1} = \sigma_1' U l_q [A(b_2) - A(b_1)] = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(N I)^2}{l_q} U \left[ 1 - \frac{(b_4 - b_1)^2}{l_I l_{II}} \right]$$

Die Gesamtenergie der beiden Wicklungen wird:

$$W = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(N I)^2}{l_q} \cdot U \left[ \frac{2b_1 + b_2}{3} - \frac{2b_4 + b_3}{3} - \frac{(b_4 - b_1)^3}{3(b_2 - b_1)(b_4 - b_3)} \right]$$

und die Axialkraft ergibt sich zu:

$$F_{yI} = \frac{\partial W}{\partial b_1} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(N I)^2}{l_q} U \left[ 1 - \frac{(b_4 - b_1)^2}{l_I l_{II}} \right]$$

Zur Ermittlung der Axialkraftverteilung aus der magnetischen Energie benützt man Gl. (15). Für das Wicklungselement der Höhe  $dy$  gilt (Fig. 6):

$$f U l_q dy = \frac{\mu_0}{2} (H'^2 - H^2) U l_q$$

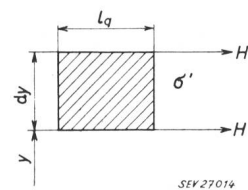


Fig. 6  
Wicklungselement für die Berechnung der Kraftverteilung aus Gl. (15)  
 $H, H'$  Intensität des magnetischen Radialfeldes;  $y$  Ordinate des Wicklungselementes  $dy$ ;  $\sigma'$  Stromdichte;  $l_q$  mittlere Streulinienlänge (Fensterbreite)

Setzt man

$$H' = H + \frac{\partial H}{\partial y} dy$$

so erhält man für die Kraft auf das Volumenelement des Leiters

$$f = \mu_0 H \frac{\partial H}{\partial y} \quad (25)$$

$\partial H / \partial y$  ergibt sich aus den Gl. (23a, b, c). Nach Durchführung dieser Operation wird:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \sigma_2' \quad \text{im Raum I}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \sigma_2' - \sigma_1' \quad \text{im Raum II}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\sigma_1' \quad \text{im Raum III}$$

Bei der Berechnung wurde vorausgesetzt, dass beide Wicklungen (I und II) das ganze Fenster ausfüllen und sich demnach in der Zone II überlagern. Bei Trennung der Stromdichten kann man die Ortskräfte für jede Wicklung gesondert bestimmen. Gl. (25) hat dann die gleiche Form wie Gl. (2).

d) Zwei ungleich hohe Wicklungen mit einseitiger Unsymmetrie (Fig. 7)

Aus der im vorhergehenden Kapitel abgeleiteten Gleichung kann die Axialkraft der Wicklung I ermittelt werden, wenn man  $b_1 = b_3$  setzt. Man erhält dann

$$F_{yI} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(N I)^2}{l_q} U \cdot \frac{b_2 - b_4}{b_2 - b_1} \quad (26)$$

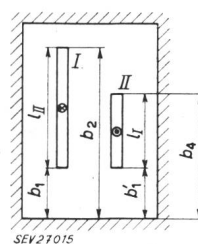


Fig. 7  
Wicklungsanordnung mit einseitiger Unsymmetrie  
 $b_1, b_2$  Ordinaten der Endpunkte der Wicklung I;  $b_1, b_4$  Ordinaten der Endpunkte der Wicklung II  
Weitere Bezeichnungen siehe im Text

Bei der Berechnung dieser Kraft aus der Energie des Magnetfeldes ist darauf zu achten, dass bei der virtuellen Verschiebung der untersuchten Wicklung, die zweite Wicklung in ihrer ursprünglichen Lage, also in Ruhe, bleibt. Aus diesem Grunde müssen in der Gleichung für die magnetische Induktion die Koordinaten der beiden in gleicher Höhe liegenden Punkte voneinander unterschieden werden. Für die Bezeichnung in Fig. 7 wird in der Zone I:

$$B_x = \mu_0 \frac{NI}{l_q} \left[ \frac{y - b_1'}{b_4 - b_1'} - \frac{y - b_1}{b_2 - b_1} \right] \quad (27a)$$

und in der Zone II:

$$B_x = \mu_0 \frac{NI}{l_2} \cdot \frac{b_2 - y}{b_2 - b_1} \quad (27b)$$

Die magnetische Energie im Transformatorenfenster wird dann

$$W = \frac{1}{2} \iiint_T B H \, dT = \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{l_q} \left\{ \frac{(b_4 - b_1)^3 + (b_2 - b_4)^3}{3(b_2 - b_1)^2} - \frac{1}{(b_2 - b_1)(b_4 - b_1')} \left[ \frac{2}{3}(b_4^3 - b_1^3) - (b_1 + b_1')(b_4^2 - b_1^2) + 2b_1 b_1'(b_4 - b_1) \right] + \frac{(b_4 - b_1')^3 - (b_1 - b_1')^3}{3(b_4 - b_1')^2} \right\} U$$

Aus dieser Gleichung bestimmt man die gesuchte Axialkraft. Nach kleineren Umformungen ergibt sich dann:

$$F_{yI} = \frac{\partial W}{\partial b_1} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(NI)^2}{l_q} \cdot \frac{b_2 - b_4}{b_2 - b_1} U$$

Dasselbe Resultat ergibt sich aus Gl. (21).

Wenn man bei der Berechnung der magnetischen Energie die beiden gemeinsamen Koordinaten nicht unterscheiden würde, käme man zu ganz falschen Ergebnissen, da sich bei der virtuellen Verschiebung z. B. von Wicklung I gleichzeitig die Länge der Wicklung II ändern würde, weil der Endpunkt  $b_4$  fest und  $b_3$  mit der Bewegung der Wicklung I durch die Bedingung  $b_3 = b_1$  verknüpft wäre.

In diesem Falle würde man für die Induktion erhalten:

im Gebiete I:

$$B_x = \mu_0 \frac{NI}{l_q} \cdot \frac{b_2 - b_4}{b_2 - b_1} \cdot \frac{y - b_1}{b_4 - b_1} \quad (28a)$$

im Gebiete II:

$$B_x = \mu_0 \frac{NI}{l_q} \cdot \frac{b_2 - y}{b_2 - b_1} \quad (28b)$$

Die magnetische Energie im Fenster wäre dann:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_T B H \, dT = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{NI}{l_q} U \frac{(b_2 - b_4)^2}{3(b_2 - b_1)}$$

so dass man für die gesuchte Kraft den folgenden Ausdruck erhalten würde:

$$F_{yI} = \frac{\partial W}{\partial b_1} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(NI)^2}{l_q} U \frac{2}{3} \cdot \frac{b_2 - b_4}{b_2 - b_1}$$

Dieser ist ganz anders als die früher abgeleitete Gleichung. Zu den gleichen falschen Ergebnis führt auch die Benützung der Gleichung für die Quer-

streinduktivität zur Ermittlung der magnetischen Energie. Das richtige Resultat wird sicher aus dem Stromkraftnetz erreicht, in welches die vereinfachten Gleichungen (28a, b) für die magnetische Induktion eingesetzt werden.

Vergleicht man die aus der Literatur bekannten Formeln für die Axialkräfte, die einerseits aus der magnetischen Energie, andererseits aus dem Kraftgesetz [3] abgeleitet wurden, so stellt man fest, dass sie immer bei denjenigen Wicklungsanordnungen nicht übereinstimmen, bei welchen die Wicklungsendpunkte die gleichen Koordinaten besitzen. Für alle diese Fälle gilt, was in diesem Abschnitte über die Berechnung der Axialkraft gesagt wurde.

### Zusammenfassung

In der Arbeit wird gezeigt, dass alle Gleichungen, die für die Kräfteermittlung in magnetischen Fel-

dern herangezogen werden, bei richtiger Durchführung der mathematischen und physikalischen Operationen zu übereinstimmenden Resultaten führen.

Nach der Bewertung bekannter Berechnungsmethoden ergibt sich am vorteilhaftesten das Kraftgesetz [Gl. (1) und (2)], welches die Bestimmung nicht nur der Lokalkräfte, sondern auch der Gesamtkräfte ermöglicht. Der grösste Vorzug liegt in der einfachen und schnellen Ausrechnung.

Die Berechnung der Kräfte aus der magnetischen Energie ist wesentlich verwickelter und länger. Auch für die einfachsten Wicklungsanordnungen ist die Bestimmung des Integrals

$$\iiint_T H^2 \, dT$$

mühevoll und das Resultat muss auch noch differenziert werden. Auch führt diese Methode bei unaufmerksamer mechanischer Benützung zu einem falschen Ergebnis. Gl. (14) bzw. (21) werden in Sonderfällen in Anspruch genommen. Gl. (16) kann zur Berechnung der Lokalkraft nur für die einfachen Fälle verwendet werden, da sonst das Integral auf der rechten Seite sehr unübersichtlich werden kann. Freilich zeigt gerade diese Gleichung die Möglichkeit, aus der Energieverteilung die Lokalkraft zu ermitteln.

### Literatur

- [1] Becker, R.: Theorie der Elektrizität. Bd. 1. Leipzig: Teubner 1951.
- [2] Knaack, W.: Efforts mécaniques exercés sur les enroulements des transformateurs en régime de court-circuit. Conférence Internationale des Grands Réseaux Electriques (CIGRE), Paris 1956, Bd. 2, Rapp. 135, 54 S.
- [3] Waters, M.: The Measurement and Calculation of Axial Electromagnetic Forces in Concentric Transformer Windings. Proc. IEE Bd. 101(1954), Part 2, Nr. 79, S. 35...46.

### Adresse des Autors:

J. Kulda, dipl. Ingenieur, Československá akademie věd, Ústav pro elektrotechniku, Václavské nám. 55, Praha II.