

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 48 (1957)

Heft: 6

Artikel: Universalkurven für elektrische Schwingungskreise in dimensionsloser Darstellung

Autor: Frei, A. / Strutt, M.J.O.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1060594>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

GEMEINSAMES PUBLIKATIONSORGAN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS (SEV) UND
DES VERBANDES SCHWEIZERISCHER ELEKTRIZITÄTSWERKE (VSE)

Universalkurven für elektrische Schwingungskreise in dimensionsloser Darstellung

Von A. Frei und M. J. O. Strutt, Zürich

(Mitteilung aus dem Institut für höhere Elektrotechnik der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich)

538.565

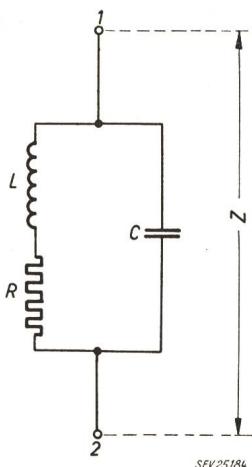
Bei der Behandlung der komplexen Impedanz eines Schwingungskreises nach Fig. 1 werden dimensionslose Veränderliche eingeführt. Der absolute Betrag und der Phasenwinkel der relativen komplexen Impedanz werden als Funktionen der relativen Frequenz und der Dämpfung diskutiert und kurvenmäßig dargestellt. Die praktische Anwendung dieser Kurven wird angegeben.

Des variables sans dimension sont introduites pour la détermination de l'impédance complexe d'un circuit oscillant. La valeur absolue et l'angle de déphasage de l'impédance complexe relative sont discutés et représentés par des courbes en fonction de la fréquence relative et de l'atténuation. Les auteurs indiquent ensuite comment ces courbes peuvent être utilisées en pratique.

I. Formelzusammenstellung

Betrachtet man den in Fig. 1 gezeichneten Schwingungskreis und berechnet die komplexe Impedanz Z zwischen den Punkten 1 und 2 bei der Kreisfrequenz ω , so gilt für die Impedanz:

$$Z = \frac{R + j\omega [L(1 - \omega^2 L C) - R^2 C]}{(\omega R C)^2 + (1 - \omega^2 L C)^2} \quad (1)$$



Die Resonanzkreisfrequenz ω_{0r} soll, unter Berücksichtigung des Verlustwiderstandes, so definiert werden, dass in Gl. (1) für ω_{0r} der Imaginärteil von Z verschwindet:

Fig. 1
Impedanz Z eines aus Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C gebildeten Schwingungskreises

$$L(1 - \omega_{0r}^2 L C) - R^2 C = 0$$

$$\omega_{0r}^2 = \frac{1}{L C} - \frac{R^2}{L^2} \quad (2)$$

Für die Resonanzkreisfrequenz ω_{0r} gilt:

$$Z = \frac{L}{R C} = Z_{0r} \quad (3)$$

Es sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{L C} \\ v &= \frac{\omega}{\omega_0} = \omega \sqrt{LC} \\ u &= R \sqrt{\frac{C}{L}} \\ z &= \frac{Z}{Z_r} = x + jy \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Größen z , x , y , u und v sind dimensionslos. Für die Resonanzkreisfrequenz ω_{0r} ergibt sich:

$$\omega_{0r} = \omega_0 \sqrt{1 - u^2} \quad (5)$$

Die Größe u (Dämpfung) hängt eng mit der Güte Q der Induktionsspule bei der Kreisfrequenz ω_0 zusammen:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0 L}{R}, \\ u &= \frac{1}{Q} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Für die Größe z ergibt sich:

$$z = \frac{u^2 + juv(1 - u^2 - v^2)}{(1 - v^2)^2 + (uv)^2} \quad (7)$$

Diese dimensionslose Größe $z = x + jy$ ist komplex und hängt von zwei reellen dimensionlosen Größen u und v ab. Man bezeichnet z als relative Impedanz des Kreises, v als relative Kreisfrequenz und u als Dämpfung oder reziproke Güte.

II. Absoluter Betrag der relativen Impedanz als Funktion der relativen Kreisfrequenz und der reziproken Güte

Aus Gl. (7) ergibt sich:

$$x = \frac{u^2}{(1-v^2)^2 + (u v)^2}$$

und

$$y = \frac{u v (1-u^2-v^2)}{(1-v^2)^2 + (u v)^2}$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{u^4 + u^2 v^2 (1-u^2-v^2)^2}{[(1-v^2)^2 + (u v)^2]^2} \quad (8)$$

Untersucht man die Kurven in der uv -Ebene, für welche z einen konstanten Wert k annimmt, so sind diese Kurven nach der Gl. (8) durch die Gl. (9) gegeben:

$$u^4 + u^2 v^2 (1-u^2-v^2)^2 = k^2 [(1-v^2)^2 + (u v)^2]^2 \quad (9)$$

Es sollen zunächst einige allgemeine Eigenschaften der durch die Gl. (9) gegebenen Kurvenschar erörtert werden:

Für $u = 0, v = 1$ ist die Gl. (9) eine Identität.

Für $v \ll 1, uv \ll 1, v^4 \ll 4k^2$ gilt angenähert: $u^2 = k$, also $u = +\sqrt{k}$, weil u und k stets positiv sein sollen. Die Kurven $|z|^2 = k^2$ in der uv -Ebene werden also in diesem Fall angenähert durch Gerade parallel zur v -Achse dargestellt.

Für $v \gg 1$ gilt angenähert: $u^2/v^2 = k^2$, oder $u/v = k$, da u und v ebenso wie k positiv sein sollen. Auch in diesem Bereich der uv -Ebene werden somit die Kurven $|z|^2 = k^2$ durch Gerade dargestellt.

Für $v = 1$ ergibt sich: $1 + u^2 = k^2$, oder $u = \sqrt{k^2 - 1}$. Damit u bei realem k^2 reell und positiv wird, muss somit $k^2 > 1$ sein. Das heisst, dass die Gerade $v = 1$ der uv -Ebene nur für $k^2 > 1$ durch Kurven $|z|^2 = k^2$ getroffen wird. Man kann für $k^2 > 1$ den Winkel berechnen, unter welchem die Kurven $|z|^2 = k^2$ die Gerade $v = 1$ schneiden. Hierzu berechnet man dv/du für $v = 1$ und findet:

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{u}$$

In logarithmischem Mass setzt man:

$$U = \log u, V = \log v$$

Dann ergibt sich:

$$\frac{dV}{dU} = 1$$

Das Bild der Kurven $|z|^2 = k^2$ für $k^2 > 1$ auf der Geraden $v = 1$ wird also sehr einfach.

Es sollen nun die Kurven in der uv -Ebene berechnet werden, für welche der Wert $|z|^2$ ein Maximum aufweist. Hierzu berechnet man: $\delta|z|^2/\delta v$ und setzt dann diesen Wert gleich Null. Damit ergibt sich die Kurvengleichung:

$$-u^6 v^2 + u^4 (-1 + 4v^2 - 3v^4) + u^2 (2 - 5v^2 + 6v^4 - 3v^6) + 1 - 2v^2 + 2v^6 - v^8 = 0$$

Diese Gleichung lässt sich in der Umgebung des Punktes $v = 1, u = 0$ vereinfachen. Man setze $v = 1 - \varepsilon$ und $\varepsilon \ll 1$.

Dann ergibt sich:

$$\varepsilon = -\frac{u^4}{4(1+u^2)} \quad (10)$$

Der geometrische Ort der Punkte in der uv -Ebene, für welche der Imaginärteil von z verschwindet, ist bei $y = 0$. Für $u \ll 1$ ergibt sich angenähert, mit $v = 1 - \varepsilon, \varepsilon \ll 1$:

$$\varepsilon = \frac{u^2}{2} \quad (11)$$

In der Umgebung von $v = 1, u = 0$, hat man somit drei geometrische Örter:

1. $v = 1$, eine Gerade für welche $\omega = \omega_0$
2. die Gl. (10). Hier hat $|z|^2$ ein Maximum,
3. die Gl. (11). Hier ist $y = 0$.

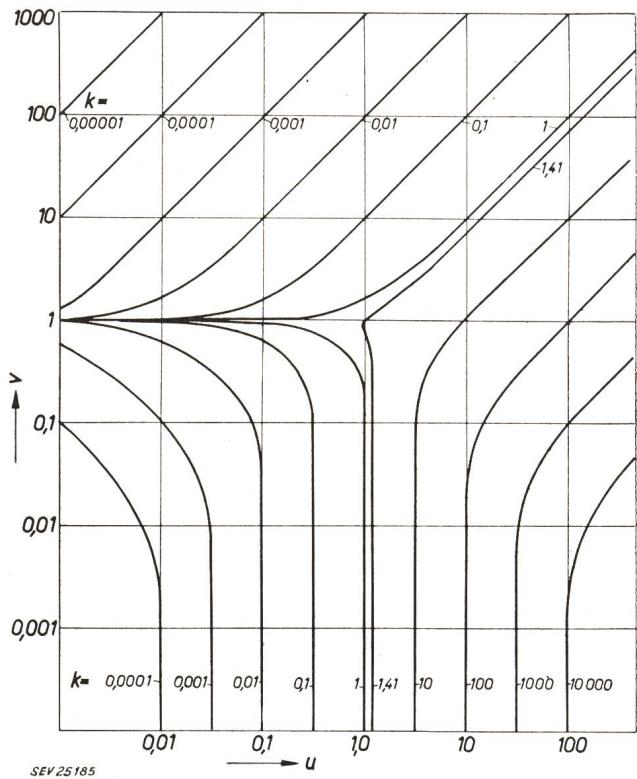


Fig. 2
Absoluter Betrag k der relativen Impedanz als Funktion der relativen Kreisfrequenz v und der reziproken Dämpfung u

Es ist nicht schwer festzustellen, dass hier die v -Werte der Örter 1, 2 und 3 bei konstantem u in der angegebenen Reihenfolge abnehmen.

Schliesslich zeigt die Fig. 2 in der uv -Ebene in logarithmischem Maßstab den Gesamtverlauf der Kurven $|z| = k$ nach Gl. (9).

III. Kurven konstanten Argumentes der relativen Impedanz als Funktion der relativen Frequenz und der reziproken Güte

In der Schreibweise: $z = |z| \exp(j\varphi)$ ist der Phasenwinkel φ durch

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{v(1-u^2-v^2)}{u} \quad (12)$$

gegeben. In dem besprochenen Problem haben nur die positiven u - und v -Werte einen Sinn. Zur Diskussion des Verlaufs der Kurven, die durch die Gl. (12) gegeben sind, ist es aber nützlich, auch negative Werte von u und v zuzulassen. In diesem Fall ist aus Gl. (12) ersichtlich, dass die Kurven um den Punkt $u = 0$, $v = 0$ herum zentrisch symmetrisch verlaufen, denn wenn gleichzeitig u durch $-u$ und v durch $-v$ ersetzt werden, ändert sich $\operatorname{tg}\varphi$ nicht.

Für $u = 0$ und gleichzeitig $v = 0$ wird der Wert von $\operatorname{tg}\varphi$ unbestimmt. In

Fig. 3

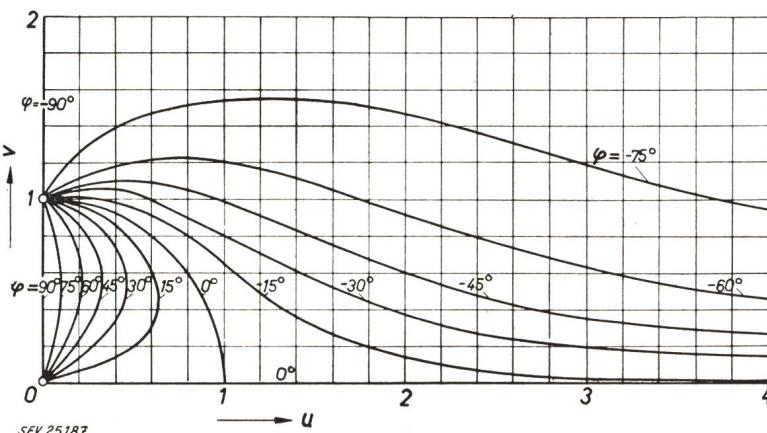
Kurven konstanter Argumentes der relativen Impedanz als Funktion der relativen Frequenz v und der reziproken Dämpfung u

SEV 25186

der unmittelbaren Umgebung dieses Ursprungs der uv -Ebene gilt angenähert nach Gl. (12):

$$\operatorname{tg}\varphi \approx \frac{v}{u}$$

Für $u = 0$, $v = 1$ ergibt sich aus Gl. (12), dass alle Kurven konstanter Argumentes durch diesen Punkt hindurch gehen. In diesem Punkt ergibt sich:



$$\frac{dv}{du} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi$$

Dadurch ist die Richtung der Argumentkurven in diesem Punkt festgelegt.

Durch den Punkt $v = 0$, $u = 1$ geht eine Kurve $\operatorname{tg}\varphi = 0$ hindurch. Untersucht man die Gestalt der Kurven $\operatorname{tg}\varphi = 0$ in der uv -Ebene, so ergibt sich aus Gl. (12) folgendes Gleichungspaar:

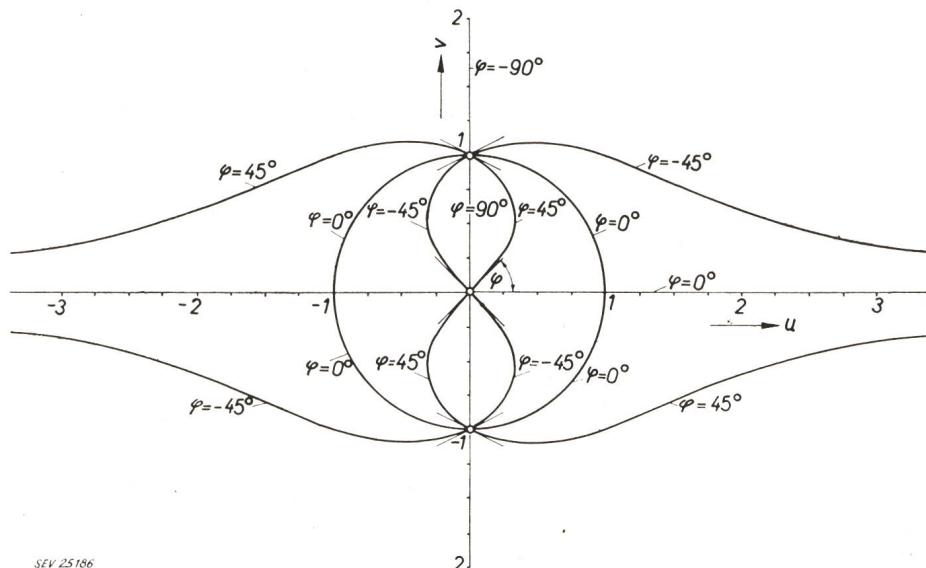
$$1 - u^2 - v^2 = 0; \quad v = 0$$

Das bedeutet, dass die eine Kurve durch den Einheitskreis mit dem Zentrum $u = 0$, $v = 0$ dargestellt wird und die zweite durch die Achse $v = 0$.

Die Darstellung der Kurven konstanter Argumentes in der uv -Ebene führt auf die Fig. 3 und 4.

IV. Praktische Anwendungen der Universalkurven

Bei gegebenen Werten von L , C , R und ω können aus den Gl. (4) die Größen u , v und Z_{0r} berechnet werden. Bei Benutzung der Kurven der Fig. 2, 3



und 4 können dann in einfacher Weise $|z|$ und φ aus u und v ermittelt werden. Aus z ergibt sich die Impedanz Z .

Ist bei einem Schwingungskreis gemäss Fig. 1 bei bestimmter Frequenzabweichung $v \neq 1$ der Abfall der Impedanzbeträge k gegeben, so kann mit Hilfe der Fig. 2 sofort die zugehörige Dämpfung u bestimmt werden.

Wenn für gegebene Werte der Kreisfrequenzen ω und ω_0 sowie für einen gegebenen Phasenwinkel φ der Impedanz die zugehörige Dämpfung u gesucht ist, so kann sie mit Hilfe der Fig. 3 und 4 sofort ermittelt werden.

Bei praktischen HF-Aufgaben ist oft nur die Impedanz in Resonanznähe

Fig. 4
Kurven konstanter Argumentes der relativen Impedanz im Bereich positiver relativer Frequenz v und positiver reziproker Dämpfung u

wichtig. Dieser Bereich bildet einen Ausschnitt der Fig. 2, 3 und 4, der im Bedarfsfall vergrössert dargestellt werden kann.

Durch die obige dimensionslose Behandlung und Darstellung wird ein Überblick über alle Eigenschaften der komplexen Impedanz eines Schwingungskreises nach Fig. 1 ermöglicht.

Literatur

- [1] Kupfmüller, Karl: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 5. Aufl. Berlin: Springer 1955. S. 306.

Adresse der Autoren:

- A. Frei, Institut für höhere Elektrotechnik der ETH, Zürich; Prof. Dr. M. J. O. Strutt, Institut für höhere Elektrotechnik der ETH, Zürich.