Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 42 (1951)

Heft: 11

Artikel: Über das Durchgehen von Wasserturbinen

Autor: Dubs, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1060995

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

42. Jahrgang Nr. 11 Samstag, 2. Juni 1951

BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

Über das Durchgehen von Wasserturbinen

Von *R. Dubs*, Zollikon (ZH)

621.24.0046

Es wird der Vorgang des «Durchgehens» einer Wasserturbine theoretisch untersucht und zu diesem Zweck eine allgemeine Beziehung für die Änderung des Drehmomentes in Funktion der Drehzahl abgeleitet. Die theoretisch gefundenen Ergebnisse werden mit den an Freistrahl-, Francis- und Kaplanturbinen experimentell gefundenen Werten verglichen.

Examen théorique de l'emballement d'une turbine hydraulique. Etablissement d'une formule générale de la variation du couple en fonction de la vitesse de rotation. Comparaison des résultats théoriques avec les valeurs obtenues lors d'expériences faites avec des turbines Pelton, Francis et Kaplan.

Unter dem «Durchgehen» der Wasserturbinen versteht man den Verlauf der Drehzahl n, der sich ergibt, wenn die Turbine bei konstantem Gefälle plötzlich vollständig entlastet wird und der Leitapparat, infolge einer Störung in der automatischen Regulierung, seine Öffnung beibehält. Die Drehzahl steigt dann rasch an und erreicht nach einer gewissen Zeit (t_{max}) ihren optimalen Wert (n_{max}), der als *Durchgangsdrehzahl* für das betreffende Gefälle und die betreffende Leitradöffnung bezeichnet wird. Bei Laufrädern mit festen Laufradschaufeln (Freistrahlturbinen, Francisturbinen, Propellerturbinen usw.) tritt bei konstantem Gefälle die höchste Durchgangsdrehzahl bei voller Öffnung des Leitapparates oder in deren Nähe auf. Mit sehr guter Näherung darf angenommen werden, dass die höchste Durchgangsdrehzahl bei diesen Turbinen bei derjenigen Öffnung erreicht wird, bei welcher die Nennleistung P_n bei der Nenndrehzahl n_n und dem Nenngefälle H_n vorhanden ist.

Anders verhält es sich bei Laufrädern mit drehbaren Laufradschaufeln (Kaplanturbinen), bei welchen bei gelöstem Steuerzusammenhang zwischen Leit- und Laufschaufelsteuerung sich eine höhere Durchgangsdrehzahl ergeben kann als bei voller Leit- und Laufschaufelöffnung.

Im folgenden wird nun der Verlauf der Drehzahl während des Durchgehens, sowie die Durchgangsdrehzahl, theoretisch untersucht, und anschliessend folgt die Mitteilung von Versuchsergebnissen, die mit verschiedenen Turbinentypen im Institut für Hydraulik und Hydraulische Maschinen an der ETH in den Jahren 1948/49 gefunden wurden.

Bedeutet J das Massenträgheitsmoment aller rotierenden Massen, ω die Winkelgeschwindigkeit, t die Zeit und M_a das antreibende Moment sowie M_w das widerstehende Drehmoment, so gilt nach einem bekannten Satz aus der Dynamik:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_a - M_w \qquad \text{(a)}$$

Man kann nun drei Fälle unterscheiden:

a) Wenn $M_a = M_w$

so ist $$\frac{d\omega}{dt} = 0, \text{ d.h. } \omega = \text{konstant}$$

der Zustand ist stationär.

b) Wenn $M_a < M_w$

so ist $$\frac{d\omega}{dt} < 0$$

die Drehzahl fällt mit wachsender Zeit (Belastung).

c) Wenn $M_a > M_w$

so ist $$\frac{d\omega}{dt} > 0$$

und die Drehzahl wächst mit wachsender Zeit (Entlastung).

Bei b) und c) handelt es sich um instationäre Vorgänge. Das Durchgehen der Wasserturbinen betrifft c), was nun genauer untersucht werden soll. Das von der Turbine herrührende treibende Drehmoment M_a ist bei konstanter Öffnung des Leitapparates und konstantem Gefälle eine Funktion der Drehzahl und damit der Winkelgeschwindigkeit. Auf Grund des Momentensatzes von *L. Euler* lässt sich für das vom durchfliessenden Wasser auf den Laufradschaufeln erzeugte Drehmoment M_H bei konstanter Leitapparatöffnung und konstantem Gefälle die Beziehung

$$M_H = K_1 Q^2 - K_2 Q n \qquad (1)$$

ableiten, in welcher Q die Wassermenge (Volumen/Zeit) bedeutet und K_1 sowie K_2 Konstanten sind, welche die Dimensionen der Turbine sowie Funktionen der relativen Schaufelwinkel enthalten. Bei vollbeaufschlagten Gleichdruckturbinen (Girardturbinen) ist die auf die Laufradschaufeln wirkende Wassermenge Q unabhängig von der Drehzahl, also konstant, womit Gleichung (1) übergeht in

$$M_H = K_3 - K_4 n \qquad (2)$$

d. h. das Drehmoment ist eine lineare Funktion der Drehzahl und damit auch der Winkelgeschwindigkeit. Bei nur teilweise beaufschlagten Gleichdruckturbinen (Löffelräder, Freistrahlturbinen) ist die aus dem Leitapparat austretende Wassermenge auch unabhängig von der Drehzahl, aber infolge der Strahldivergenz und wegen der insbesondere bei höheren Drehzahlen immer grösser werdenden Schlüpfung verändert sich die auf den Laufradschaufeln arbeitende Wassermenge Q, indem sie mit steigender Drehzahl abnimmt[1]). Dies hat zur Folge, dass die Momentenlinie zu einer schwach gekrümmten Kurve wird, wie Fig. 1 zeigt. Bei Über-

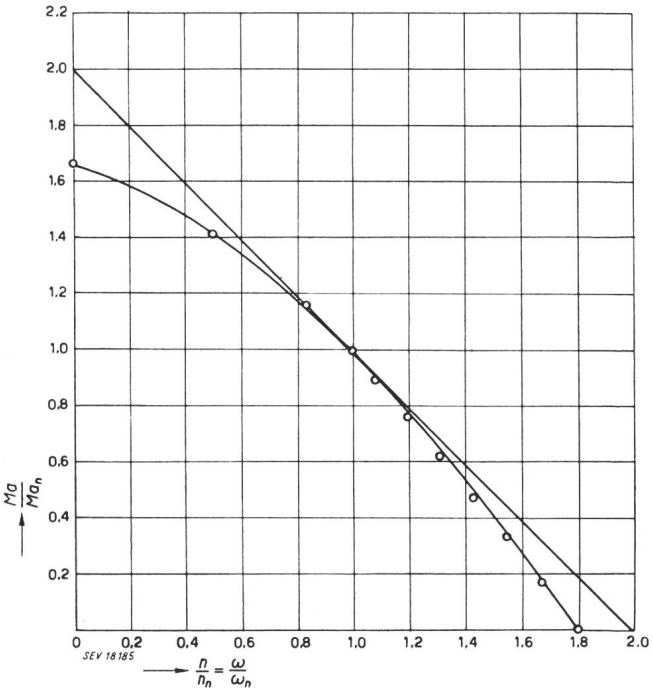

Fig. 1

Verlauf des Momentenverhältnisses $\frac{M_a}{M_{an}}$ in Funktion des Drehzahl-(Winkelgeschwindigkeit-)Verhältnisses $\frac{n}{n_n}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$ einer teilweise beaufschlagten Gleichdruckturbine

druckturbinen (Francisturbinen, Propellerturbinen, Kaplanturbinen) ist, unter den gleichen Bedingungen, die durch das Laufrad fliessende Wassermenge stets eine Funktion der Drehzahl, und es lässt sich auf Grund der Hauptgleichung der Turbinentheorie die Beziehung ableiten

$$A\,Q^2 + B\,n^2 + C\,Q\,n + D\,n + E = 0 \qquad (3)$$

wobei A, B, C, D und E Konstanten bedeuten, welche die Dimensionen der Turbine sowie Funktionen der Schaufelwinkel enthalten. Bei kleinen und mittleren spezifischen Drehzahlen (Francisturbinen) stellt Gleichung (3) eine Ellipse mit schiefliegenden Hauptachsen dar, während bei hohen spezifischen Drehzahlen und insbesondere bei raschlaufenden Axialturbinen (Propellerturbinen und Kaplanturbinen) der Wasserdurchlass sich praktisch linear mit der Drehzahl ändert[2]), so dass man für das in Betracht kommende Arbeitsgebiet mit sehr guter Annäherung schreiben darf:

$$Q = A_1 + B_1\,n \qquad (4)$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (1) ein, so folgt:

$$\underline{M_H = K_5 - K_6\,n - K_7\,n^2} \qquad (5)$$

wobei die Vorzeichen entsprechend der Erfahrung gewählt wurden. Sehr zahlreiche mit Francisturbinen durchgeführte Versuche haben gezeigt, dass auch bei ihnen das Drehmoment mit sehr guter Annäherung nach Gl. (5) verläuft. Damit lässt sich nun allgemein sagen, dass bei allen heute in Frage kommenden Turbinentypen der Verlauf des Drehmomentes M_H nach Gl. (5) angenommen werden darf. Das an der Turbinenwelle (Kupplung) vorhandene Drehmoment M_a ist um die Lagerreibungs- und Ventilationsverluste der Turbine kleiner als M_H. Da diese Verluste jedoch gegenüber M_H sehr klein sind und sich überdies mit der Drehzahl funktionell ähnlich ändern wie M_H, so darf man mit sehr guter Annäherung auch schreiben:

$$\underline{M_a = K_8 - K_9\,\omega - K_{10}\,\omega^2} \qquad (6)$$

Die Konstanten K_8, K_9 und K_{10} werden nun am zweckmässigsten mit Hilfe der Nennwerte und der Randwerte aus den folgenden drei Gleichungen bestimmt. Es sind für die Konstruktion vorgeschrieben P_n und ω_n bei Vollast. Damit berechnet sich

$$M_{an} = \frac{P_n}{\omega_n}$$

und nach Gl. (6)

$$M_{an} = K_8 - K_9\,\omega_n - K_{10}\,\omega_n^2 \qquad (7)$$

Die Durchgangsdrehzahl sei:

$$n_{max} = m\,n_n$$

somit

$$\omega_{max} = m\,\omega_n$$

wobei m natürlich stets wesentlich grösser als 1 sein wird und sich je nach dem Turbinentyp, bei konstantem Gefälle, in den Grenzen 1,8 (Freistrahlturbinen) bis 2,8 (Kaplanturbinen) bewegt. Für die Durchgangsdrehzahl ist $M_a = 0$ und aus Gl. (6) folgt dann:

$$0 = K_8 - K_9\,m\,\omega_n - K_{10}\,m^2\,\omega_n^2 \qquad (8)$$

Beim Stillstand ergibt sich bei den meisten Turbinentypen das grösste antreibende Drehmoment, und wir setzen:

$$M_{a\,max} = k\,M_{an}$$

wo k im allgemeinen grösser als 1 sein wird. Damit ergibt sich nach Gl. (6) für $\omega = 0$

$$M_{a\,max} = K_8 = k\,M_{an} \qquad (9)$$

[1]) siehe auch *Taygun, Fikret:* Untersuchungen über den Einfluss der Schaufelzahl auf die Wirkungsweise eines Freistrahlrades. Promotionsarbeit ETH 1946. Zürich, A.-G. Gebrüder Leemann & Cie.

[2]) siehe auch *Grasern, R:* Über die Wirkungsweise eines Kreiselrades als Turbine und Pumpe. Promotionsarbeit ETH 1937. Reichenberg, Gebrüder Stiepel GmbH.

Aus den Gleichungen (7), (8) und (9) werden nun die Konstanten K_8, K_9 und K_{10} berechnet, und wir finden:

$$K_9 = \frac{k}{m} - \frac{1 - k + \frac{k}{m}}{m - 1} m \cdot \frac{M_{an}}{\omega_n} \qquad (10)$$

und

$$K_{10} = \frac{1 - k + \frac{k}{m}}{m - 1} \cdot \frac{M_{an}}{\omega^2} \qquad (11)$$

Setzt man diese Werte in die Gl. (6) ein, so erhält man für das treibende Drehmoment die Beziehung:

$$M_a = \left[k - \left(\frac{k}{m} - \frac{1 - k + \frac{k}{m}}{m - 1} m \right) \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{1 - k + \frac{k}{m}}{m - 1} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right] M_{an} \qquad (12)$$

Wenn man nun

$$\frac{M_a}{M_{an}} = y \text{ und } \frac{\omega}{\omega_n} = x$$

setzt, so ergibt sich die dimensionslose Gleichung

$$y = k - \left(\frac{k}{m} - \frac{1 - k + \frac{k}{m}}{m - 1} m \right) x - \frac{1 - k + \frac{k}{m}}{m - 1} x^2 \qquad (13)$$

In Fig. 1 ist der Verlauf des Drehmomentes für eine eindüsige Freistrahlturbine mit den Nenndaten

$H_n = 80$ m, $Q_n = 80$ dm³/s, $P_n = 51{,}5$ kW, $n_n = 750$/min

nach der dimensionslosen Gl. (13) dargestellt; zugleich sind die mit dieser Turbine gefundenen Versuchspunkte eingetragen. Es ist bei dieser Turbine $k = 1{,}66$ und $m = 1{,}80$. Damit ergibt sich $K_8 = 1{,}66\ M_{an}$, $K_9 = 0{,}332\ M_{an}/\omega_n$ und $K_{10} = 0{,}328\ M_{an}/\omega_n^2$. Man erhält so

$$y = 1{,}66 - 0{,}332\ x - 0{,}328\ x^2$$

Für $x = 1$, d. h. $\omega = \omega_n$, ergibt sich aus dieser Gleichung $y = 1$, d. h. $M_a = M_{an}$, und für $x = 1{,}8$ erhält man $y = 0$, d. h. $M_a = 0$, in Übereinstimmung mit den Randwerten. Wie aus Fig. 1 ersehen werden kann, stimmt die nach Gl. (13) mit vereinfachenden Annahmen berechnete Kurve befriedigend mit den Versuchswerten überein.

Wie bereits erwähnt, ist bei vollbeaufschlagten (und näherungsweise auch bei teilbeaufschlagten) Gleichdruckturbinen die auf den Laufradschaufeln arbeitende Wassermenge, bei konstanter Leitapparatöffnung und konstantem Gefälle, auch konstant, und die Momentenlinie (M_H) ist dann nach Gl. (2) eine Gerade. In diesem Falle ist die Leistungskurve (P_H in Funktion der Drehzahl) eine quadratische Parabel, und das Maximum der Leistung sowie des Wirkungsgrades η_H tritt, wie leicht nachgewiesen werden kann, bei der halben Durchgangsdrehzahl auf. Wählt man diesen Punkt als Nenndrehzahl n_n, so wird $m = 2$, d. h.

$$n_{max} = 2\ n_n$$

oder

$$\omega_{max} = 2\ \omega_n$$

Das maximale Drehmoment bei Stillstand ist dann doppelt so gross wie dasjenige bei Nenndrehzahl, und wir erhalten

$$k = 2$$

Werden diese Werte in die Gl. (12) eingesetzt, so folgt:

$$M_a = \left(2 - \frac{\omega}{\omega_n} \right) M_{an} \qquad (14)$$

oder

$$y = 2 - x \qquad (15)$$

Diese vereinfachten Beziehungen dürften mit guter Näherung auch für Überdruckturbinen verwendet werden, wenn es sich nur darum handelt, den Verlauf des Drehmomentes von der Nenndrehzahl n_n bis zur Durchgangsdrehzahl $m\ n_n$ darzustellen, denn wie Fig. 1 zeigt, ist in diesem Gebiet die Momentenkurve nach Gl. (12) so schwach gekrümmt, dass sie mit guter Näherung durch eine Gerade ersetzt werden darf. An Stelle von Gl. (14) tritt dann allgemein:

$$M_a = \frac{m\ \omega_n - \omega}{(m - 1)\ \omega_n} M_{an} \qquad (14a)$$

wenn

$$\omega_n < \omega < m\ \omega_n$$

Bei der Ableitung der Gleichungen für M_H ist davon ausgegangen worden, dass das Gefälle beim Durchgehen konstant bleibt. Diese Voraussetzung wäre dann erfüllt, wenn der Wasserkonsum der Turbine bei konstanter Öffnung und veränderlicher Drehzahl sich nicht ändert, da dann der Druckverlust gleich bleibt. Bei Gleichdruckturbinen ist dies der Fall, während bei Überdruckturbinen, wie bereits früher erwähnt [Gl. (3) und insbesondere Gl. (4)], der Wasserkonsum sich mit der Drehzahl ändert. Bei Francisturbinen mit kleiner spezifischer Drehzahl nimmt der Wasserkonsum mit steigender Drehzahl ab, bei Normalläufern bleibt er annähernd konstant und bei Schnelläufern nimmt er zu. In ganz besonderem Masse ist dies bei den schnellaufenden Axialturbinen (Propeller- und Kaplanturbinen) der Fall, bei welchen mit steigender Drehzahl der Wasserkonsum stark zunimmt, was zur Folge hat, dass ausser Vergrösserung des Druckverlustes und damit Verkleinerung des Nettogefälles auch Massenwirkungen auftreten (negative und positive Druckstösse), welche, je nach den Dimensionen und der Art der Zu- und Ableitungen des Betriebswassers, sowie der Grösse des Massen-

trägheitsmomentes J, wesentliche Gefällsschwankungen bewirken können. Da sich diese Einflüsse nicht allgemein formulieren lassen und ihre Grösse ganz von den immer wieder verschiedenen örtlichen Verhältnissen abhängig ist, so soll in den weiteren Ableitungen ein konstantes Gefälle beim «Durchgehen» angenommen werden, d. h. es wird mit den Gl. (12) oder (13) weitergerechnet.

Wenn die Wasserturbine einen Generator antreibt und dieser elektrisch plötzlich vollständig entlastet wird, so reduziert sich das widerstehende Drehmoment M_w auf die Lagerreibung und Ventilation des Generator-Rotors. Man kann setzen:

$$M_w = A\,\omega^{1/2} + B\,\omega^2 \quad \text{[s. a. Taygun[1])]} \tag{16}$$

wobei das erste Glied auf der rechten Seite das Lagerreibungsmoment und das zweite Glied das Ventilationsmoment bedeutet. Die Werte A und B sind Konstanten, wobei A die Lagerbelastung und die Lagerdimensionen sowie den Lagerreibungskoeffizienten enthält und B von der Anordnung der Ventilation (Dimensionen usw.) abhängig ist. Da der Einfluss des Lagerreibungsmomentes, besonders bei höheren Drehzahlen, gegenüber demjenigen des Ventilationsmomentes stark zurücktritt, soll der Einfachheit halber mit dem Ansatz:

$$\underline{M_w = C\,\omega^2} \tag{17}$$

gerechnet werden. Bei der Nenndrehzahl n_n haben wir ω_n und M_{wn}, so dass auch gilt:

$$M_{wn} = C\,\omega_n^2 \tag{18}$$

und nach Division folgt:

$$M_w = \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\,M_{wn} \tag{19}$$

Nun ist im allgemeinen M_{wn} ein kleiner Bruchteil von M_{an}, und wir setzen:

$$\underline{M_{wn} = k_1\,M_{an}} \tag{20}$$

wobei sich k_1 in den Grenzen 0,01...0,02 bewegen dürfte. Wir erhalten dann:

$$\underline{M_w = \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\,k_1\,M_{an}} \tag{21}$$

Setzt man diesen Wert in die Gl. (a) ein und berücksichtigt auch Gl. (12), so erhält man die Differentialgleichung:

$$\frac{J\,\mathrm{d}\omega}{M_{an}\,\mathrm{d}t} = \underline{k - \left(\frac{k}{m} - \frac{1-k+\frac{k}{m}}{m-1}\,m\right)\frac{\omega}{\omega_n}} \underline{- \left(k_1 + \frac{1-k+\frac{k}{m}}{m-1}\right)\frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \tag{22}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich nun auch die Durchgangsdrehzahl berechnen, die bei angekuppeltem Generator auftritt. Sie wird wegen des widerstehenden Momentes des Generators etwas kleiner ausfallen als $m_{\omega n}$. Für das «Durchgehen» gilt nun

$$M_a = M_w$$

oder:

$$\left[k - \left(\frac{k}{m} - \frac{1-k+\frac{k}{m}}{m-1}\,m\right)\frac{\omega_{max}}{\omega_n} - \left(\frac{1-k+\frac{k}{m}}{m-1}\right)\frac{\omega^2_{max}}{\omega_n^2}\right] M_{an} = \frac{\omega^2_{max}}{\omega_n^2}\,k_1\,M_{an}$$

Setzt man der Kürze halber:

$$\frac{\omega_{max}}{\omega_n} = m_1$$

so folgt:

$$k - \left(\frac{k}{m} - \frac{1-k+\frac{k}{m}}{m-1}\,m\right) m_1 - \frac{1-k+\frac{k}{m}}{m-1}\,m_1^2 = k_1\,m_1^2$$

oder:

$$\left(k_1 + \frac{1-k+\frac{k}{m}}{m-1}\right) m_1^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{1-k+\frac{k}{m}}{m-1}\,m\right) m_1 - k = 0$$

Aus dieser quadratischen Gleichung für m_1 lässt sich dessen Wert berechnen.

Setzt man der Kürze halber:

$$k_1 + \frac{1-k+\frac{k}{m}}{m-1} = a$$

und

$$\frac{k}{m} - \frac{1-k+\frac{k}{m}}{m-1}\,m = b$$

so folgt:

$$a\,m_1^2 + b\,m_1 - k = 0$$

somit:

$$m_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4\,a\,k}}{2\,a}$$

Um ein zahlenmässiges Bild zu erhalten, soll der schon früher besprochene Fall: $k = 2$ und $m = 2$ zugrunde gelegt und für k_1 soll der wohl extreme Wert 0,02 angenommen werden. Man erhält dann

$$a = 0{,}02$$
$$b = 1$$

somit

$$\underline{m'_1 = 1{,}925} \text{ und } m''_1 = -52$$

Der negative Wurzelwert hat in unserm Falle keine physikalische Bedeutung. Infolge der Lagerreibung und der Ventilation des Generatorrotors fällt die Durchgangsdrehzahl von $2\,n_n$ auf $1{,}925\,n_n$, also wenig. In dem speziellen Fall der schon früher besprochenen Freistrahlturbine kann mit $k = 1{,}66$ und $m = 1{,}8$ gerechnet werden. Damit wird $a = 0{,}348$ und $b = 0{,}332$ und

$$\underline{m'_1 = 1{,}75}$$

d. h. die Durchgangsdrehzahl fällt von $1{,}8\,n_n$ auf $1{,}75\,n_n$.

Wird eine Kaplanturbine mit $n_s = 600$ angenommen, so ist für eine solche $k = 1{,}75$ und $m = 2{,}2$. Wählt man wieder $k_1 = 0{,}02$, so wird

$$\underline{m'_1 = 2{,}06}$$

d. h. die Durchgangsdrehzahl fällt von $2{,}2\,n_n$ auf $2{,}06\,n_n$.

Um den Verlauf der Drehzahl, d. h. der Winkelgeschwindigkeit während des Durchgehens in Funktion der Zeit, zu bestimmen, muss die Differentialgleichung (22) integriert werden. Mit den eingeführten Abkürzungen lautet die Gleichung:

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \left(k - b\frac{\omega}{\omega_n} - a\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) M_{an}$$

und, nach Einführung der dimensionslosen Grösse,

$$x = \frac{\omega}{\omega_n}, \text{ d. h. } \omega = \omega_n\, x$$

folgt:

$$\frac{J\,\omega_n}{M_{an}}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k - b\,x - a\,x^2$$

oder:

$$\frac{\mathrm{d}x}{k - b\,x - a\,x^2} = \frac{M_{an}}{J\,\omega_n}\,\mathrm{d}t$$

und da

$$M_{an} = \frac{P_n}{\omega_n}$$

so folgt auch:

$$\underline{\frac{\mathrm{d}x}{k - b\,x - a\,x^2} = \frac{P_n}{J\,\omega_n^2}\,\mathrm{d}t}$$

Diese Differentialgleichung kann durch Partialbruchzerlegung integriert werden, und man erhält allgemein:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{k + 2\,b_1\,x + a\,x^2} = \frac{1}{2\sqrt{b_1^2 - a\,k}}\,\cdot$$

$$\cdot \ln\left(\frac{\sqrt{b_1^2 - a\,k} - b_1 - a\,x}{\sqrt{b_1^2 - a\,k} + b_1 + a\,x}\right) + K, \quad \text{wo } b_1 = \frac{b}{2}$$

Diese Lösung ergibt sich, weil in unserem Falle

$b_1^2 - a\,k$ grösser als null ist.

Wir setzen der Kürze halber

$$\sqrt{b_1^2 - a\,k} = c$$

und bestimmen die Integrationskonstante K aus den Grenzbedingungen. Es ist für $t = 0$, $n = n_n$, d. h. $\omega = \omega_n$, $x = 1$, und wir erhalten:

$$\frac{1}{2\,c}\cdot \ln\left(\frac{c - b_1 - a}{c + b_1 + a}\right) + K = 0$$

Daraus ergibt sich der Wert von K, der eingesetzt zur Lösung der Differentialgleichung führt. Wir erhalten:

$$\frac{P_n}{J\,\omega_n^2}\,t = \frac{1}{2\,c}\cdot \ln\left(\frac{c - b_1 - a\,x}{c + b_1 + a\,x}\cdot\frac{c + b_1 + a}{c - b_1 - a}\right)$$

und schliesslich

$$\underline{\frac{c - b_1 - a\,x}{c + b_1 + a\,x}\cdot\frac{c + b_1 + a}{c - b_1 - a} = \mathrm{e}^{2\,c\,\frac{P_n}{J\,\omega_n^2}\,t}} \qquad (23)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich nun x und damit ω/ω_n in Funktion der Zeit t berechnen. Zur Zeit $t = 0$ ist $\omega = \omega_n$, d. h. $x = 1$, welche Bedingung die Gl. (23) auch erfüllt. Es soll nun für das frühere Zahlenbeispiel (Fig. 1) der Freistrahlturbine der Verlauf der Drehzahl in Funktion der Zeit beim Durchgehen berechnet werden.

Es ist $P_n = 70$ PS $= 51{,}4$ kW $= 5250$ kgms^{-1}; $n_n = 750/\text{min} = 12{,}5/\text{s}$; $\omega_n = 78{,}5$ s^{-1}. Das Massenträgheitsmoment aller rotierenden Massen (Turbinenlaufrad, Welle, Bremsscheibe und Generatorrotor) ist $J = 1{,}62$ kgms^2; dies ergibt ein Schwungmoment $GD^2 = 63{,}60$ kgm^2. Bezieht man dieses Schwungmoment auf die Leistung in kgms^{-1}, so erhält man

$$\underline{\varphi = \frac{63{,}60}{5250} = 0{,}0121 \text{ m}\cdot\text{s}}$$

Die Konstanten a und b wurden schon früher berechnet und gefunden:

$-a = 0{,}348$ und $-b = 0{,}332$. Damit wird $b_1 = \frac{b}{2} = -0{,}166$. Die Konstante c berechnet sich aus

$$c = \sqrt{b_1^2 - a\,k} = 0{,}777$$

damit wird der Exponent von e auf der rechten Seite der Gl. (23)

$$2\,c\,\frac{P_n}{J\,\omega_n^2} = \frac{2\cdot 0{,}777\cdot 5250}{1{,}62\cdot 6160} = \underline{0{,}815 \text{ s}^{-1}}$$

Durch Einsetzen der Konstanten geht die Gl. (23) über in:

$$\frac{0{,}777 + 0{,}166 + 0{,}348\,x}{0{,}777 - 0{,}166 - 0{,}348\,x}\,\cdot$$

$$\cdot\,\frac{0{,}777 - 0{,}166 - 0{,}348}{0{,}777 + 0{,}166 + 0{,}348} = \mathrm{e}^{0{,}815\,t}$$

oder:

$$\underline{\frac{0{,}943 + 0{,}348\,x}{0{,}611 - 0{,}348\,x}\cdot 0{,}2035 = \mathrm{e}^{0{,}815\,t}}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich nun der Verlauf von x, d. h. von ω in Funktion der Zeit t berechnen.

Am zweckmässigsten wird ein Wert von x angenommen und dann der zugehörige t-Wert bestimmt. Fig. 2 zeigt den Anstieg der Drehzahl in Funktion der Zeit. In der gleichen Figur ist dann noch der relative Anstieg der Drehzahl

$$\delta = \frac{n - n_n}{n_n} = \frac{\omega - \omega_n}{\omega_n}$$

in Prozenten eingetragen. Wie die Figur zeigt, steigt die Drehzahl in den ersten Sekunden sehr stark an, um nach ca. 7 s die Durchgangsdrehzahl zu erreichen. Theoretisch müsste es unendlich lange dauern, bis sie erreicht würde.

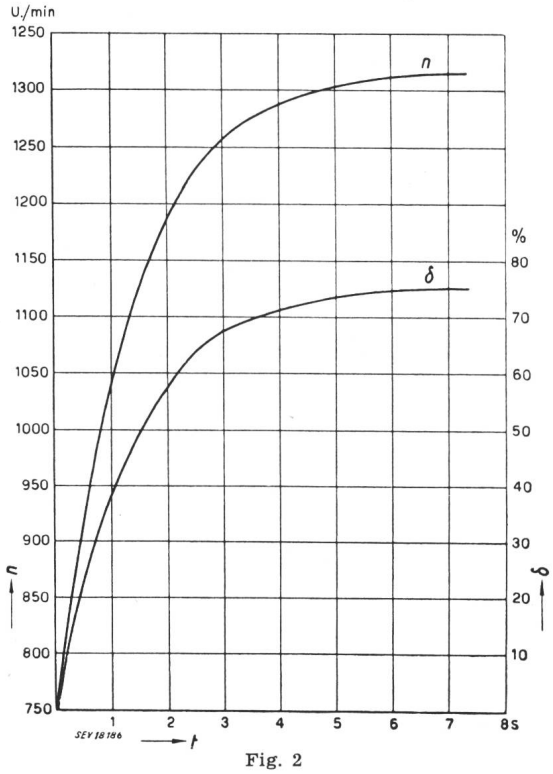

Fig. 2
Drehzahl n und relativer Anstieg δ der Drehzahl in Funktion der Zeit t

$$\delta = \frac{n - n_n}{n_n} = \frac{\omega - \omega_n}{\omega_n}$$

n veränderliche Drehzahl
n_n Nenndrehzahl
ω veränderliche Winkelgeschwindigkeit
ω_n Nennwinkelgeschwindigkeit

Dieser Vorgang spielt sich bei Francisturbinen und bei Kaplanturbinen in qualitativ gleicher Weise ab, wie bei der vorstehend betrachteten Freistrahlturbine.

Es wurden zur Kontrolle der Rechnungsergebnisse im Institut für Hydraulik und hydraulische Maschinen an der ETH zu Anfang des Jahres 1949 Durchgangsversuche mit einer Freistrahlturbine, einer Francisturbine und einer Kaplanturbine durchgeführt. Damit man bei dem sich sehr rasch abspielenden Vorgang sichere Zahlenwerte erhielt, wurde neben das mit der Turbinenwelle fest verbundene Tachometer eine grosse Stoppuhr mit einer Ablesegenauigkeit von $^1/_{10}$ s gelegt und es wurden die beiden Zifferblätter durch ein Kinoaufnahmegerät (eingestellt auf Einzelaufnahmen) mit 64 Bildern pro Sekunde photographiert. Als Lichtquelle dienten zwei Lampen von je 1000 W, die auf eine Distanz von 0,3 m die Zifferblätter beleuchteten. Das Aufnahmegerät war eine Paillard H 16, dessen Objektiv 0,500 m von den Zifferblättern entfernt war. Die Blendenöffnung betrug 22. Als Film wurde ein Kodak Super XX verwendet. Die Versuche wurden vom damaligen Assistenten des Autors, *W. Bodenmann*, durchgeführt, dem ich auch an dieser Stelle für seine sorgfältige Arbeit noch bestens danke. Fig. 3 zeigt eine der photographischen Momentaufnahmen der beiden Zifferblätter, deren Angaben nach dem Versuch in Ruhe ausgewertet werden konnten.

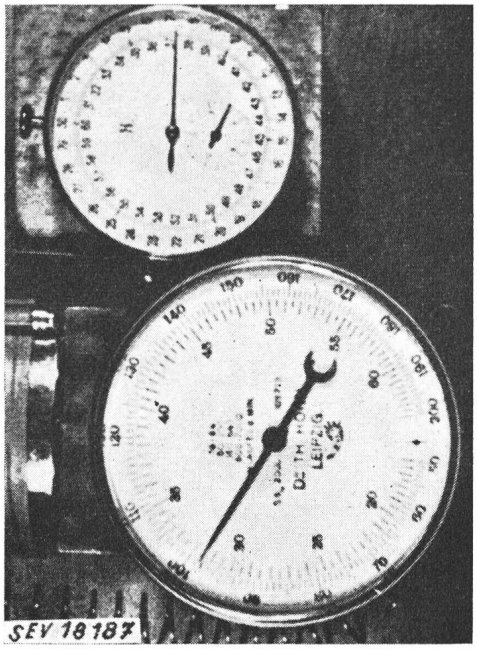

Fig. 3
Kinematographische Aufnahme des Drehzahlmessers und der Stoppuhr

Um eine zu starke Gefährdung der Freistrahl-Turbinengruppe zu vermeiden, wurden die Versuche mit der eindüsigen Freistrahlturbine (auf welche sich die vorstehenden Berechnungen beziehen) nur mit dem halben Nadelhub durchgeführt, wobei sich aus der Momentencharakteristik der Turbine $k = 1{,}6$ und $m = 1{,}76$ ergab. Die Abschaltleistung war $P = 38{,}4$ PS $= 28{,}2$ kW $= 2880$ kgms^{-1}. Die Anfangsdrehzahl $n = 750$/min. Der Wert von m_1 berechnet sich dann zu $m_1 = 1{,}70$, und damit würde die Durchgangsdrehzahl $n_{max} = 1272$/min.

Fig. 4 zeigt die beim Versuch gefundene Kurve, welche durch Extrapolation eine maximale Drehzahl $n_{max} = 1220$/min ergibt, die etwas kleiner ist als die berechnete. Dies ist darauf zurückzuführen, dass ausser dem Generatorrotor auch eine grosse Bremsscheibe mitrotierte, deren Lagerreibung und Ventilation in der Rechnung nicht berücksichtigt sind.

Durch Verminderung des Gefälles von $H_n = 80$ m auf $H = 60$ m war es dann möglich, den Durchgangsversuch auch noch bei vollem Nadelhub durchzuführen, ohne dass dadurch die Gruppe gefährdet wurde. Die Abschaltleistung war $P = 45{,}5$ PS $= 33{,}4$ kW $= 3400$ kgms^{-1} bei einer Drehzahl $n = 650$/min, d. h. $\omega = 68$ s^{-1}. Das Massenträgheitsmoment war wieder $J = 1{,}62$ kgms^2, d. h. $GD^2 = 63{,}60$ kgm^2.

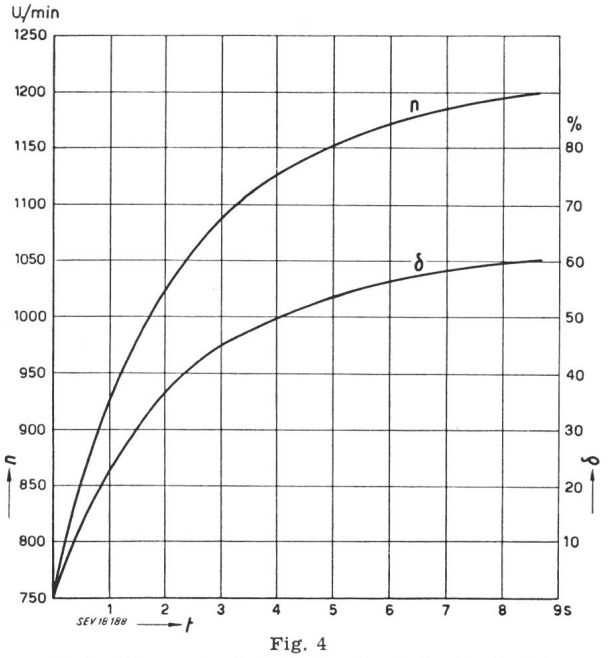

Fig. 4
Drehzahl n und relativer Anstieg δ der Drehzahl in Funktion der Zeit t

$$\delta = \frac{n - n_n}{n_n} = \frac{\omega - \omega_n}{\omega_n}$$

n veränderliche Drehzahl
n_n Nenndrehzahl
ω veränderliche Winkelgeschwindigkeit
ω_n Nennwinkelgeschwindigkeit

Das spezifische Schwungmoment war:

$$\varphi = \frac{63{,}60}{3400} = 0{,}01865 \text{ m} \cdot \text{s}$$

Die Turbinenkonstanten waren wieder $k = 1{,}66$ und $m = 1{,}80$. Mit Rücksicht auf die im Verhältnis zur Generatorgrösse kleine Leistung wurde $k_1 = 0{,}03$ angenommen. Die Berechnung ergibt so $m_1 = 1{,}735$, d. h. $n_{max} = 1128$/min. Die Konstanten werden nun $-a = 0{,}358$ und $-b = 0{,}331$, sowie $c = 0{,}788$ und $b_1 = 0{,}1655$. Damit ergibt sich für die Berechnung der Drehzahlkurve die Beziehung:

$$\frac{0{,}9535 + 0{,}358\,x}{0{,}6225 - 0{,}358\,x} \cdot 0{,}2012 = e^{0{,}716\,t}$$

In Fig. 5 ist die berechnete Durchgangskurve punktiert und die Versuchskurve ausgezogen eingetragen, wobei wieder bemerkt werden muss, dass die Berechnung ohne Berücksichtigung der beim Versuch mitrotierenden grossen Bremsscheibe durchgeführt wurde, was der Grund dafür ist, dass die Versuchskurve unterhalb der berechneten Kurve zu liegen kommt.

Es wurden weiter Versuche mit einer Francis-Spiralturbine mit den Nenndaten $P_n = 43$ PS $= 31{,}6$ kW und $n_n = 1000$/min durchgeführt. Um auch hier die Gruppe durch eine extreme Drehzahl nicht zu gefährden, wurde das Gefälle auf $H = 10{,}5$ m reduziert, was bei voller Leitschaufelöffnung eine Leistung von $P = 16{,}2$ PS $= 11{,}9$ kW $= 1215$ kgms^{-1} bei einer Drehzahl von $n = 720$/min ergab. Das totale Massenträgheitsmoment aller rotierender

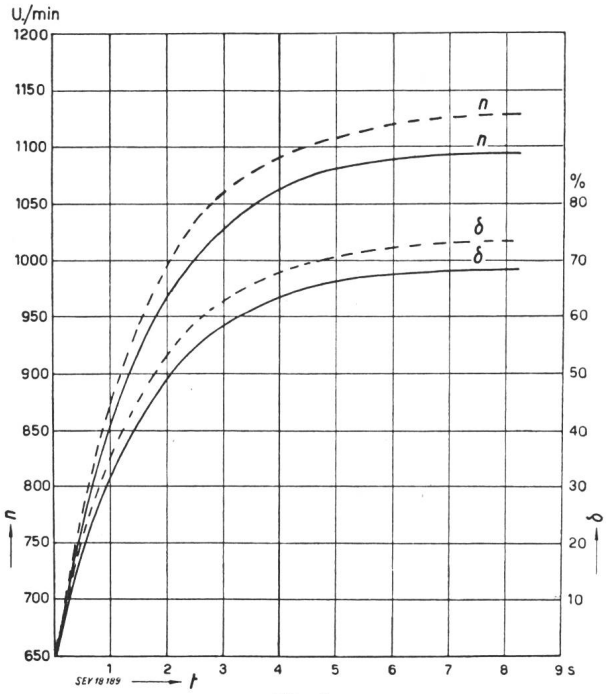

Fig. 5
Drehzahl n und relativer Anstieg δ der Drehzahl in Funktion der Zeit t

$$\delta = \frac{n - n_n}{n_n} = \frac{\omega - \omega_n}{\omega_n}$$

n veränderliche Drehzahl
n_n Nenndrehzahl
ω veränderliche Winkelgeschwindigkeit
ω_n Nennwinkelgeschwindigkeit
------ berechnete Durchgangskurve
——— durch Versuch festgestellte Durchgangskurve

Massen (Turbinenlaufrad, Schwungrad und Generatorrotor samt Welle) war $J = 1{,}06$ kgms^2, was ein Schwungmoment $GD^2 = 41{,}62$ kg m^2 ergibt. Das spezifische Schwungmoment ist somit:

$$\varphi = \frac{41{,}62}{1215} = 0{,}0342 \text{ m} \cdot \text{s}$$

Fig. 6 zeigt den Verlauf der Drehzahl bei plötzlicher voller Entlastung. Sie steigt in rund 28 s auf den maximalen Wert $n_{max} = 1166$/min, was für $m_1 = 1{,}62$ ergibt. Beim Nenngefälle $H_n = 20$ m wäre sie auf $n_{max} = 1620$/min gestiegen. Um günstige Regulierverhältnisse zu erhalten, war auf der Turbinenwelle ein Schwungrad montiert, so dass das totale Massenträgheitsmoment schon bei der Nennleistung von $P_n = 43$ PS reichlich war; da beim Versuch die Abschaltleistung nur rund 37% der Nennleistung betrug, war das spezifische Schwungmoment unverhältnismässig gross, was den relativ langsamen Anstieg der Drehzahl erklärt. Bei dieser

Turbine handelt es sich um einen Francis-Normalläufer mit einer spezifischen Drehzahl $n_s = 155$, bei welchem der Wasserkonsum mit steigender Drehzahl abnimmt. Die Turbine allein, ohne Schwungrad und Generatorrotor, wäre bei $H = 10{,}5$ m auf eine Durchgangsdrehzahl $n_{max} = 1262$/min ge-

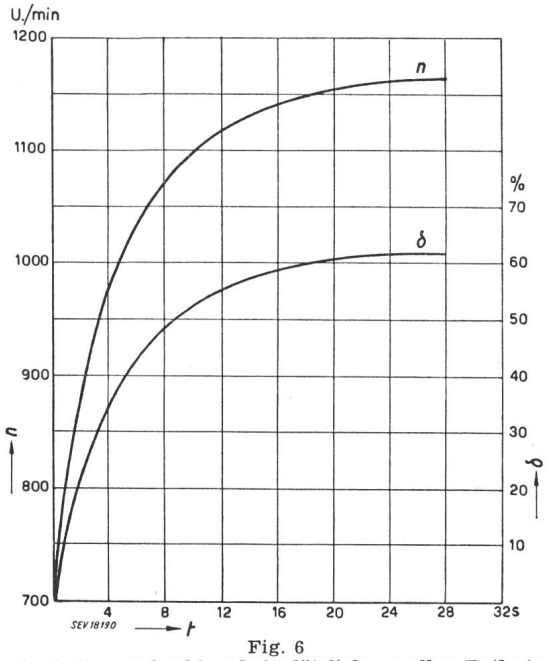

Fig. 6
Verlauf der Drehzahl n bei plötzlicher voller Entlastung in Funktion der Zeit t
(Bezeichnungen siehe Fig. 2)

kommen, was den Wert $m = 1{,}75$ ergibt. Der Wert k wird für diese Turbine gleich 2; damit erhält man nach der Rechnung, ohne Berücksichtigung des Schwungrades, $m_1 = 1{,}69$, d.h. $n_{max} = 1690$/min bei $H_n = 20$ m. Durch die Lagerreibung und die Ventilation des Schwungrades wurde n_{max} auf 1620/min heruntergedrückt.

Um auch das Verhalten einer Kaplanturbine beim Durchgehen festzustellen, wurden zuletzt Versuche mit einem solchen Typ durchgeführt. Fig. 7 zeigt den Verlauf der Drehzahl beim Durchgehen in Funktion der Zeit, wobei bemerkt werden muss, dass, um eine zu hohe Drehzahl zu vermeiden, der Leitapparat nur 60% geöffnet und die Laufradschaufeln auf den besten Wirkungsgrad eingestellt waren. Das Nettogefälle sank vom Beginn des Durchgehens bis zur Erreichung der höchsten Drehzahl um 11%. Der spezifische Wasserkonsum Q_1 stieg in der gleichen Periode um 44%. Wäre das Gefälle konstant geblieben, so würde die Durchgangsdrehzahl um rund 5,5% grösser geworden sein als der Versuch ergab. Die gemessene Durchgangsdrehzahl $n_{max} = 993$/min wäre dann auf $n_{max} =$ 1050/min gestiegen. Da bei diesem Versuch ausser dem Turbinenlaufrad nur noch eine kleine Bremsscheibe mitrotierte, war das Massenträgheitsmoment aller rotierender Massen sehr klein, was den *sehr raschen* Anstieg der Drehzahl erklärt. Es liegt hier das andere Extrem vor als beim Versuch mit der Francisturbine. Die spezifische Drehzahl der untersuchten Kaplanturbine war $n_s = 560$, also relativ klein, so dass die Durchgangsdrehzahl (m) nicht die hohen Werte erreicht, die bei höheren spezifischen Drehzahlen eintreten können. Ausserdem ist die untersuchte Kaplanturbine in einem Blechgehäuse eingebaut, so dass infolge des bereits oben erwähnten Druckverlustes, der mit dem Quadrat der Wassermenge zunimmt, das Nettogefälle beim Durchgehen sinkt, was eine Verminderung der Durchgangsdrehzahl zur Folge hat. Wie dieser Versuch

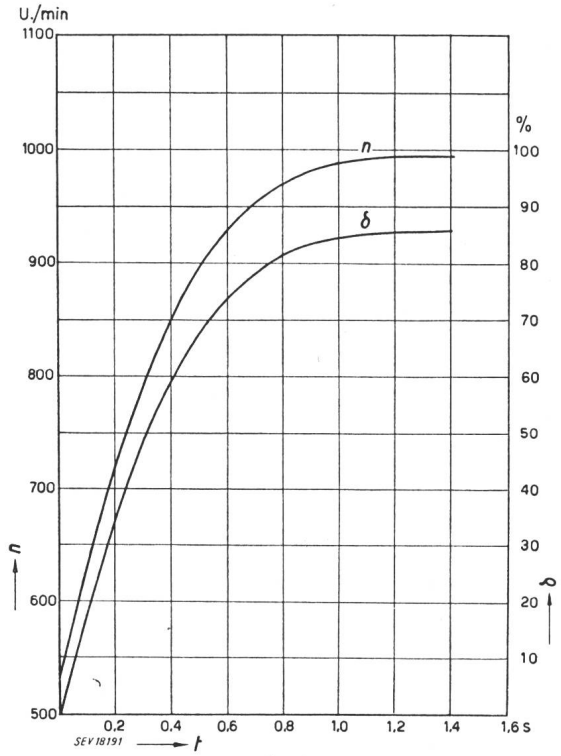

Fig. 7
Verlauf der Drehzahl n beim Durchgehen in Funktion der Zeit t
(Bezeichnungen siehe Fig. 2)

gezeigt hat, ist der Einbau der Kaplanturbine von einer gewissen Bedeutung für die Grösse der Durchgangsdrehzahl. Es wäre deshalb wünschenswert, wenn solche Versuche in grösserem Maßstabe noch weitergeführt würden.

Adresse des Autors:
Prof. *R. Dubs*, Guggerstrasse 33, Zollikon (ZH).