Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 42 (1951)

Heft: 8

Artikel: Wirkwiderstand und Induktivität von Drehstrom-Dreileiterkabeln mit gemeinsamem Bleimantel

Autor: Jacottet, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1060985

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

42. Jahrgang Nr. 8 Samstag, 21. April 1951

BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

Wirkwiderstand und Induktivität von Drehstrom-Dreileiterkabeln mit gemeinsamem Bleimantel

Von *Paul Jacottet*, Heidelberg

621.315.21.011.3

Unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen wird die Gesetzmässigkeit für das elektromagnetische Wirbelfeld in jeder der drei Adern eines symmetrischen Drehstromkabels mit gemeinsamem Bleimantel abgeleitet. Dabei werden die beiden jeweils benachbarten Adern in ihrer induzierenden Wirkung als gerade ausgestreckte, quasilineare Leiter angenommen. Die Wirbelströmung in den Adern wird aus einem der Wellengleichung genügenden Hilfsvektor hergeleitet, während das ausserhalb der Leiter verlaufende Magnetfeld aus einem Vektorpotential bestimmt wird, das die Laplacesche Potentialgleichung erfüllt. Stromdichte und Magnetfeld im Leiter sind nicht nur vom jeweiligen Abstand von der Leiterachse, sondern auch vom Umfangswinkel abhängig. Anhand von Schaubildern wird der Verlauf der Stromdichte erläutert und der Einfluss der Nähewirkung der benachbarten Adern auf die unsymmetrische Stromverteilung beschrieben. Wirkwiderstand und innere Induktivität der Adern ergeben sich als Real- und Imaginärteil eines Oberflächenintegrals über den komplexen Poyntingschen Vektor. Aus einer früheren Arbeit des Verfassers werden Näherungsformeln zur Berücksichtigung der Verluste und der Induktivität des Bleimantels abgeleitet. In einer Tafel werden die wesentlichsten Betriebskonstanten des symmetrischen Drehstromkabels zusammengestellt, nämlich Wirkwiderstand, Zusatzwiderstand und Betriebsinduktivität. Hierbei sind die einzelnen Teileinflüsse, wie magnetisches Eigenfeld jeder Ader, Nähewirkung der anderen Adern, Schirmwirkung des Mantels, deutlich hervorgehoben. Für 1-kV-Drehstromkabel mit verschiedenen Leiterquerschnitten werden die Betriebskonstanten anhand der gefundenen Formeln berechnet. Dabei ergibt sich, dass die Zusatzverluste erst bei grossen Aderquerschnitten, über 120 mm² Cu, merkbar in Erscheinung treten. Der prozentuale Anteil der einzelnen Zusatzverluste (Eigenfeld, Nähewirkung, Bleimantel) wird ermittelt und die Verminderung der Betriebsinduktivität mit wachsendem Aderquerschnitt berechnet. Schliesslich wird die Abhängigkeit der Stromwärmeverluste und des Wirkwiderstandes von der Temperatur untersucht. Der Arbeit ist ein ausgedehntes Literaturverzeichnis beigefügt.

En introduisant certaines simplifications, l'auteur établit la loi qui régit le champ électromagnétique tourbillonnaire de chacun des trois conducteurs d'un câble triphasé symétrique sous enveloppe commune de plomb. En ce qui concerne l'induction mutuelle entre deux conducteurs voisins, il considère ceux-ci comme étant rectilignes et quasilinéaires. Le courant tourbillonnaire dans les conducteurs est obtenu par un vecteur auxiliaire répondant à l'équation d'onde, tandis que le champ magnétique à l'extérieur des conducteurs est déterminé par un potentiel vectoriel, qui satisfait à l'équation de Laplace. La densité de courant et le champ magnétique dans les conducteurs ne dépendent pas seulement de leur distance par rapport à l'axe du conducteur, mais aussi de l'angle périphérique. L'auteur montre la variation de la densité de courant à l'aide de diagrammes et décrit l'influence des conducteurs voisins sur la distribution asymétrique du courant. La résistance effective et l'inductance interne des conducteurs constituent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'une intégrale de surface par le vecteur radiant de Poynting. D'un travail antérieur, l'auteur déduit des formules approchées, qui permettent de tenir compte des pertes et de l'inductance de l'enveloppe de plomb. Les principales constantes d'exploitation du câble triphasé symétrique sont groupées dans un tableau, notamment la résistance effective, la résistance additionnelle et l'inductance de régime. Les influences partielles sont mises en évidence, en particulier celles du champ magnétique propre de chaque conducteur, l'influence mutuelle entre conducteurs voisins, l'effet d'écran exercé par l'enveloppe de plomb. Ces constantes sont calculées par l'auteur dans le cas d'un câble triphasé à 1 kV, au moyen de ces formules. On constate que les pertes supplémentaires n'ont une certaine influence qu'à partir de sections de cuivre dépassant 120 mm². L'auteur détermine la part des différentes pertes supplémentaires (champ propre, influence mutuelle, enveloppe de plomb) et calcule la diminution de l'inductance de régime en fonction de l'augmentation de la section des conducteurs. Pour terminer, il examine l'influence de la température sur les pertes par courants de Foucault et sur la résistance effective. Cet exposé est suivi d'une bibliographie détaillée.

1. Einleitung, frühere Veröffentlichungen und Zweck der Untersuchung

Über die elektromagnetischen Leitungskonstanten von Wechselstromkabeln der Starkstrom- und Fernmeldetechnik, insbesondere über die zusätzlichen Stromwärmeverluste in den Adern und im leitenden Mantel, besteht ein ausgedehntes Schrifttum. Grundlegende theoretische und messtechnische Untersuchungen sind in den verschiedensten Ländern durchgeführt worden. Hierüber gibt das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit Aufschluss, ohne jedoch Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Bei Kabeln mit dicht nebeneinander liegenden Adern kann bei hohen Frequenzen, für grosse Leiterquerschnitte jedoch auch im niedrigsten Frequenzbereich, der Einfluss des magnetischen Wechselfeldes der benachbarten Adern (Nähewirkung, Proximity Effect) nicht mehr vernachlässigt werden. Diese Nähewirkung ist für zwei parallele Drähte (Lecherleitung) in aller Strenge über den gesamten Frequenzbereich erstmalig in der klassischen Arbeit von *G. Mie* [1] [1]) behandelt worden. Besonders erwähnenswert ist ferner eine Abhand-

[1]) Die Hinweise in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss.

lung von *J. R. Carson* [4] über den Nachbarschaftseinfluss bei der Wellenausbreitung längs paralleler Leitungen. Unter gewissen vereinfachenden Annahmen haben dann *H. L. Curtis* [2] und *Ch. Manneback* [6] das Gesetz für die Stromdichteverteilung über den Leiterquerschnitt von Kabeln mittels einer *Fredholmschen* Integralgleichung abgeleitet, in der die Nähewirkung berücksichtigt ist. Hieraus hat *H. L. Curtis* [5] Näherungsformeln für den Wirkwiderstand und die Induktivität paralleler Leiter, auch für die Adern symmetrisch angeordneter Drehstromkabel entwickelt. In einer aufschlussreichen, durch Messergebnisse bestätigten theoretischen Abhandlung untersucht *H. Kaden* [25] die Leitungskonstanten symmetrischer Fernmeldekabel unter Berücksichtigung des Nachbarschaftseinflusses und der leitenden Hülle. Neuerdings gibt *A. Sommerfeld* [36, Seite 198] eine vereinfachte und vervollständigte Darstellung des Problems der Doppelleitung.

Wie das Literaturverzeichnis zeigt, sind auch die Verluste in den Bleimänteln und Eisenbewehrungen von Kabeln Gegenstand eingehender theoretischer und messtechnischer Arbeiten geworden. Hier sei besonders auf die Untersuchungen von *A. H. M. Arnold*[2]) verwiesen.

Trotz der schon vorhandenen Arbeiten fehlt es an einer zusammenfassenden Darstellung, in der

1. die physikalischen Zusammenhänge für die Stromdichteverteilung in den einzelnen Adern unter dem Einfluss der Nähewirkung anschaulich herausgestellt sind,

2. die Aufteilung der durch die Wirbelströmung bedingten zusätzlichen Stromwärmeverluste auf die Adern und auf den Bleimantel hinreichend herausgearbeitet ist,

3. eine für den projektierenden Ingenieur brauchbare, durch Beispiele erläuterte Zusammenstellung der wichtigsten Betriebskonstanten gegeben wird.

Diese Lücke soll zunächst für das symmetrische Drehstrom-Dreileiterkabel mit gemeinsamem Bleimantel (ohne Bewehrung) durch die folgende Arbeit geschlossen werden.

2. Theoretischer Teil

2.1 Vereinfachende Voraussetzungen für die Rechnung

Die strenge Behandlung des vorliegenden Problems in voller Allgemeinheit stösst auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Wir begnügen uns daher mit folgenden aus physikalischen Gründen einigermassen zu rechtfertigenden Näherungsannahmen:

Der Einfluss der Verdrillung der Leiterdrähte und der Verseilung der drei Adern bleibt unberücksichtigt. Die Adern werden als langgestreckte, massive Runddrähte aufgefasst.

Die dielektrischen Verschiebungsströme zwischen den einzelnen Adern und zwischen den Adern und dem Bleimantel werden bei den niedrigen Frequenzen gegenüber den Leiterströmen vernachlässigt.

[2]) siehe die im Literaturverzeichnis genannten Arbeiten.

Es wird der quasistationäre Fall einer im Vergleich zur Wellenlänge kurzen Kabellänge zugrunde gelegt. Unter dieser für Niederfrequenz zulässigen Annahme wird also von einer Abhängigkeit der einzelnen Feldgrössen von der axialen Koordinate abgesehen.

Der auf der Nähewirkung der beiden benachbarten Adern beruhende Anteil der Wirbelströmung in jeder Ader wird dem Einfluss der magnetischen Wechselfelder zweier Linienquellen zugeschrieben. Hierfür wird also der Querschnitt der beiden induzierenden, stromführenden Nachbaradern vernachlässigt.

Ebenso wird die Wirbelströmung im Bleimantel aus der induzierenden Wirkung eines magnetischen Drehfeldes dreier Linienquellen hergeleitet; dabei bleiben wiederum die drei Aderquerschnitte unberücksichtigt.

Die Wirbelströmung im Bleimantel ist wegen seiner mässigen Dicke und schlechten Leitfähigkeit geringfügig im Vergleich zum Betriebsstrom in den Adern. Daher kann das magnetische Rückwirkungsfeld des Mantels für die Ermittlung der Wirbelströmung in den Adern ausser Betracht gelassen werden.

2.2 Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen

$2\,\varrho$	Durchmesser einer Ader in cm
a	Achsenabstand zweier benachbarter Adern in cm
$c = a/\sqrt{3}$	Abstand der Aderachsen von der Kabelachse in cm
$2\,r_i$, $2\,r_e$	Innen- und Aussendurchmesser des Bleimantels in cm
s	Dicke des Bleimantels in cm
r, φ, z	Zylinderkoordinaten eines Aufpunktes P im Raum
$i = \hat{i} \cdot \exp(j\omega t)$	Momentanwert des Wechselstromes in einer Ader mit dem Scheitelwert $\hat{i}$ in A und dem Zeitgesetz $e^{j\omega t} = \exp(j\omega t)$
$\omega = 2\,\pi f$	Kreisfrequenz in s^{-1}
$\vec{V}$	Vektorpotential in A im Aufpunkt P, herrührend von dem als linienförmig angenommenen Drehstromerregersystem
$\vec{H}_r$, $\vec{H}_\varphi$	Normal- und Tangentialkomponente des dem Drehstromerregersystem zuzuschreibenden Magnetfeldes im Aufpunkt P in Acm^{-1}
$\vec{V}_w$	Hilfsvektor für die elektromagnetische Wirbelströmung in den Kabeladern in A
$\mu_0 = 0{,}4\,\pi \cdot 10^{-8}$	Permeabilität des Vakuums in Hcm^{-1}
γ_a	Elektrische Leitfähigkeit der Kabeladern in $(\Omega cm)^{-1}$
γ_m	Elektrische Leitfähigkeit des Kabelmantels in $(\Omega cm)^{-1}$

$\bar{k} = |\bar{k}| \cdot \exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right)$ Komplexe Wellenzahl für die Wirbelströmung in den Kabeladern mit $|\bar{k}| = (\omega \mu_0 \gamma_a)^{1/2}$ in cm^{-1}

$\vec{V}_r$ Rückwirkungspotential im Aufpunkt P, herrührend von der Wirbelströmung in den Kabeladern in A

$\vec{H}_{rr}, \vec{H}_{r\varphi}$ Normal- und Tangentialkomponente des aus dem Rückwirkungspotential $\vec{V}_r$ abgeleiteten Magnetfeldes im Aufpunkt P in Acm^{-1}

$\vec{H}_{wr}, \vec{H}_{w\varphi}$ Aus dem Hilfsvektor $\vec{V}_w$ abgeleitete Normal- und Tangentialkomponente des magnetischen Wirbelfeldes in den Kabeladern in Acm^{-1}

$\vec{S}_w$ Axiale Wirbelstromdichte in den Kabeladern in Acm^{-2}

$\vec{H}_g = \frac{i}{2\pi\varrho}$ Magnetische Randfeldstärke an der Leiteroberfläche bei gleichmässiger Stromverteilung in Acm^{-1}

$\vec{S}_g = \frac{i}{\pi\varrho^2}$ Stromdichte in den Kabeladern bei gleichmässiger Stromverteilung in Acm^{-2}

$\bar{P}_s$ Komplexe Scheinleistung pro Längeneinheit, bezogen auf den Querschnitt einer Kabelader in Wcm^{-1}

$\bar{Z}_i = R_i + \mathrm{j}\omega L_i$ Innerer Scheinwiderstand einer Kabelader pro Längeneinheit in $\Omega\mathrm{cm}^{-1}$

$P_{vg} = \frac{1}{2}|i|^2 R_g$ Wärmeverlustleistung einer Ader pro Längeneinheit bei gleichmässiger Stromverteilung in Wcm^{-1}

R_g Gleichstromwiderstand einer Ader pro Längeneinheit in $\Omega\mathrm{cm}^{-1}$

Re, Im, | | Realteil, Imaginärteil und Betrag einer komplexen Grösse

$-*$ Kennzeichen für eine konjugiert komplexe Grösse

$\mathrm{J}_n(\bar{z})$ Besselsche Zylinderfunktion vom komplexen Argument $\bar{z}$ und von der Ordnungszahl n

$L_g = \mu_0/8\pi =$ $0{,}05\ \mathrm{mH\,km}^{-1}$ auf die Längeneinheit bezogene innere Gleichstrominduktivität eines Runddrahtes.

Wegen der Kennzeichnung der übrigen Betriebskonstanten sei auf die Tabelle II verwiesen.

2.3 Vektorpotential und Magnetfeld des erregenden symmetrischen Drehstromsystems

Voraussetzungsgemäss werden die drei Adern des Drehstromkabels zunächst als symmetrisch angeordnete Linienquellen angenommen. Die nach Fig. 1 mit 1, 2 und 3 bezeichneten linienförmigen Leiter seien der Reihe nach von den gegeneinander jeweils um $2\pi/3$ in der Phase zeitlich verschobenen Strömen:

$$i_1 = i = \hat{i} \cdot \exp(\mathrm{j}\omega t)$$

$$i_2 = \hat{i} \cdot \exp[\mathrm{j}(\omega t + 2\pi/3)] = i \cdot \exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)$$

$$i_3 = \hat{i} \cdot \exp[\mathrm{j}(\omega t - 2\pi/3)] = i \cdot \exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)$$

durchflossen. Das von diesem erregenden Drehstromsystem in einem Aufpunkt P mit den Zylinderkoordinaten r, φ und z hervorgerufene Magnetfeld wird zweckmässig aus einem der Potentialgleichung genügenden Vektorpotential $\vec{V}$ hergeleitet.

Zugrunde gelegt werde ein Zylinderkoordinatensystem, dessen z-Achse mit der Achse des Leiters 1 zusammenfällt und dessen Ausgangsrichtung ($\varphi = 0$) in den Symmetriepunkt des Drehstromsystems weist. Fig. 1 zeigt die Projektion der Anordnung

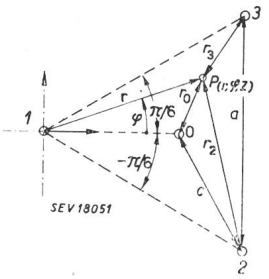


Fig. 1
Einlagerung der Drehstromlinienquellen in das Koordinatensystem r, φ, z

auf die Zeichenebene ($z = 0$). In dieser Projektion seien die Abstände des Aufpunktes von den Leitern 1, 2 und 3 der Reihe nach mit r, r_2 und r_3 und von einem gedachten Nulleiter 0 mit r_0 bezeichnet. Eine einfache Überlegung zeigt, dass die Projektion der Aufpunktabstände auf die Zeichenebene r_0, r_2 und r_3 als Funktion der Koordinaten r und φ mit den gegenseitigen Leiterabständen a bzw. c als Parameter dargestellt werden können:

$$r_0/c = [1 + (r/c)^2 - 2(r/c)\cos\varphi]^{1/2} \quad (1a)$$

$$r_2/a = [1 + (r/a)^2 - 2(r/a)\cos(\varphi + \pi/6)]^{1/2} \quad (1b)$$

$$r_3/a = [1 + (r/a)^2 - 2(r/a)\cos(\varphi - \pi/6)]^{1/2} \quad (1c)$$

Das gesamte Vektorpotential $\vec{V}$ im Punkt P ergibt sich durch Überlagerung dreier Teilpotentiale. Diese rühren von drei stromdurchflossenen Leiterschleifen her, die aus den jeweiligen Aussenleitern 1, 2 und 3 als Hinleitung und dem gedachten Nullleiter 0 als Rückleitung bestehen.

Das Vektorpotential lautet dann:

$$\vec{V} = -\frac{i}{2\pi}[\ln r/r_0 + \exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)\ln r_2/r_0 + \exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)\ln r_3/r_0] \quad (2a)$$

wofür wegen der Identität

$$1 + \exp(\mathrm{j}\,2\pi/3) + \exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3) = 0$$

auch geschrieben werden kann:

$$\vec{V} = -\frac{i}{2\pi}[\ln r/a + \exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)\ln r_2/a + \exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)\ln r_3/a] \quad (2b)$$

Setzt man in (2b) für r_2/a und r_3/a die Beziehungen nach (1b) und (1c) ein und entwickelt den Logarithmus in eine nach r/a fortschreitende Potenzreihe bzw. in eine nach Vielfachen von $(\varphi \pm \pi/6)$ fortschreitende Fourier-Reihe, so erhält man für $r/a \leqq 1$:

$$\vec{V} = \frac{i}{2\pi}\left[-\ln r/a + \exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(r/a)^n \cos n(\varphi + \pi/6) + \exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(r/a)^n \cos n(\varphi - \pi/6)\right] \quad (2c)$$

Die von den einzelnen Leiterströmen herrührenden Teilpotentiale mit ihrer gegenseitigen zeitlichen Phasenverschiebung um $\pm 2\pi/3$ sind aus Gl. (2c) leicht erkennbar.

Da das Vektorpotential $\vec{V}$ in Übereinstimmung mit der Stromflussrichtung nur eine z-Komponente besitzt, leiten sich die Komponenten des Magnetfeldes $\vec{H}$ im Aufpunkt P in einfacher Weise her, aus:

$$\vec{H}_r = \mathrm{rot}_r\,\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{V}}{\partial \varphi} \quad (3a)$$

$$\vec{H}_\varphi = \mathrm{rot}_\varphi\,\vec{V} = -\frac{\partial \vec{V}}{\partial r} \quad (3b)$$

$$\vec{H}_z = \mathrm{rot}_z\,\vec{V} = 0 \quad (3c)$$

Wenn man gemäss Gl. (3a) und (3b) die Differentiationen nach r und φ in Gl. (2c) ausführt, erhält man:

$$\vec{H}_r = -\frac{i}{2\pi r}\left[\exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}(r/a)^n \sin n(\varphi + \pi/6) + \exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}(r/a)^n \sin n(\varphi - \pi/6)\right] \quad (4a)$$

$$\vec{H}_\varphi = \frac{i}{2\pi r}\left[1 - \exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}(r/a)^n \cos n(\varphi + \pi/6) + \exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}(r/a)^n \cos n(\varphi - \pi/6)\right] \quad (4b)$$

Gl. (4a) und (4b) lassen erkennen, dass nur die in der z-Achse liegende Linienquelle 1 den bekannten rotationssymmetrischen Anteil $i/2\pi r$ zur φ-Komponente des Magnetfeldes im Punkte P beisteuert. Die übrigen Anteile der φ-Komponente sowie auch die r-Komponente, die keine Rotationssymmetrie zur z-Achse aufweisen, rühren von den Linienquellen 2 und 3 her.

2.4 Das elektromagnetische Wirbelfeld in den massiven Adern des symmetrischen Drehstromkabels

In den Adern 1, 2 und 3, deren Querschnitt jetzt nicht mehr vernachlässigt wird, sollen wiederum der Reihe nach die Ströme i, $i \cdot \exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)$, $i \cdot \exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)$ fliessen. Nach Fig. 2 sei für jede Ader ein im Sinne der Rechtsschraube orientiertes Koordinatensystem (r, φ, z) eingeführt, dessen z-Achse in der jeweiligen Leiterachse liegt und bei dem die Ausgangsrichtung $(\varphi = 0)$ senkrecht auf die Kabelachse weist.

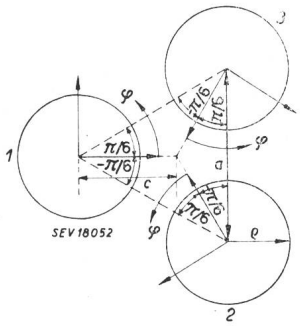


Fig. 2
Symmetrisches Drehstromkabel mit drei Koordinatensystemen r, φ, z

Das elektromagnetische Wirbelfeld in den einzelnen Adern kann auch hier aus einem in z-Richtung liegenden Hilfsvektor $\vec{V}_w$ abgeleitet werden. Der Unterschied gegenüber dem im vorigen Abschnitt behandelten Vektorpotential $\vec{V}$ liegt darin, dass dieses der Laplaceschen Potentialgleichung $\Delta\vec{V} = 0$ genügte, während der Hilfsvektor $\vec{V}_w$ die Wellengleichung $\Delta\vec{V}_w + k^2\vec{V}_w = 0$ befriedigen muss. Diese lautet als Operator im Zylinderkoordinatensystem geschrieben, wenn voraussetzungsgemäss keine Abhängigkeit von der z-Koordinate angenommen wird:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \bar{k}^2\right)\vec{V}_w = 0 \quad (5)$$

Als Partikularlösungen, die sich in der Leiterachse $(r = 0)$ regulär verhalten, kommen nur solche von der Form $\mathrm{J}_n(\bar{k}r)\exp(\mathrm{j}n\varphi)$ in Betracht. Die geometrische Anordnung des Systems nach Fig. 2 und der Vergleich mit der Beziehung für das Vektorpotential $\vec{V}$ nach Gl. (2c) führen zu folgendem Ansatz für die vollständige Lösung von $\vec{V}_w$, bezogen auf den Leiter 1:

$$\vec{V}_w = \frac{i}{2\pi}\left[A_0 \cdot \mathrm{J}_0(\bar{k}r) + \exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}A_n \mathrm{J}_n(\bar{k}r)\cos n(\varphi + \pi/6) + \exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}A_n \mathrm{J}_n(\bar{k}r)\cos n(\varphi - \pi/6)\right] \quad (6)$$

Zur Bestimmung der noch willkürlichen Konstanten A_0 und A_n müssen die Stetigkeitsbedingungen für die magnetische Randfeldstärke und Randinduktion an der Leiteroberfläche $(r = \varrho)$ herangezogen werden. Dabei ist noch zu beachten, dass die von den Linienquellen 2 und 3 im Leiter 1 hervorgerufene Wirbelströmung, die in den beiden Summengliedern von Gl. (6) zum Ausdruck kommt, ein magnetisches Rückwirkungsfeld ausserhalb der Leiter erzeugt. Dieses kann aus einem Rückwirkungspotential $\vec{V}_r$ abgeleitet werden, für das in Analogie mit dem erregenden Vektorpotential $\vec{V}$

nach Gl. (2c) folgender Ansatz physikalisch gerechtfertigt erscheint:

$$\vec{V}_r = \frac{i}{2\pi}\left[\exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n}(\varrho/r)^n\cos n(\varphi+\pi/6)\right.$$

$$\left.+\exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n}(\varrho/r)^n\cos n(\varphi-\pi/6)\right] \quad (7)$$

Dieser Ansatz berücksichtigt noch die erforderliche Abnahme des Rückwirkungspotentials mit wachsendem r und enthält im übrigen die zunächst willkürlichen Konstanten B_n.

Die beiden erwähnten Stetigkeitsbedingungen für die magnetische Randfeldstärke und Randinduktion erfordern unter Voraussetzung unmagnetischen Leiterwerkstoffes mit einer relativen Permeabilität $\mu_r = 1$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \vec{V}_w}{\partial\varphi} &= \frac{\partial(\vec{V}+\vec{V}_r)}{\partial\varphi} \quad (8a)\\ \frac{\partial \vec{V}_w}{\partial r} &= \frac{\partial(\vec{V}+\vec{V}_r)}{\partial r} \quad (8b)\end{aligned}\right\} \text{ für } r=\varrho$$

Führt man nach dieser Anweisung die Differentiationen an den Beziehungen nach Gl. (2c), (6) und (7) durch und beachtet, dass die Stetigkeitsbedingungen (8a) und (8b) von jeder einzelnen Harmonischen n erfüllt sein müssen, so ergibt der Koeffizientenvergleich:

$$A_0 = \frac{1}{\bar{k}\varrho\,\mathrm{J}_1(\bar{k}\varrho)} \quad (9a)$$

$$A_n = \frac{2(\varrho/a)^n}{\bar{k}\varrho\,\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho)} \quad (9b)$$

$$B_n = (\varrho/a)^n\frac{\mathrm{J}_{n-1}(k\varrho)}{\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho)} \quad (9c)$$

Setzt man die so ermittelten Konstanten A_0 und A_n nach Gl. (9a) und (9b) in Gl. (6) ein, so erhält man als vollständige Lösung für den die Wirbelströmung im Leiter 1 kennzeichnenden Hilfsvektor $\vec{V}_w$:

$$\vec{V}_w = i/\pi\bar{k}\varrho\left[\tfrac{1}{2}\cdot\mathrm{J}_0(\bar{k}r)/\mathrm{J}_1(\bar{k}\varrho)\right.$$

$$+\exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}(\varrho/a)^n\frac{\mathrm{J}_n(\bar{k}r)}{\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho)}\cos n(\varphi+\pi/6)$$

$$\left.+\exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}(\varrho/a)^n\frac{\mathrm{J}_n(\bar{k}r)}{\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho)}\cos n(\varphi-\pi/6)\right] \quad (10)$$

Aus dem Hilfsvektor $\vec{V}_w$, der nur eine z-Komponente besitzt und ausserdem von z unabhängig ist, können das magnetische Wirbelfeld $\vec{H}_w$ und die Wirbelstromdichte $\vec{S}_w$ im Leiter 1 in einfacher Weise ermittelt werden, nämlich

$$\vec{H}_{wr} = \mathrm{rot}_r\,\vec{V}_w = \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{V}_w}{\partial\varphi} \quad (11a)$$

$$\vec{H}_{w\varphi} = \mathrm{rot}_\varphi\,\vec{V}_w = -\frac{\partial\vec{V}_w}{\partial r} \quad (11b)$$

$$\vec{S}_w = \mathrm{rot}_z\cdot\mathrm{rot}\,\vec{V}_w = \bar{k}^2\,\vec{V}_w \quad (11c)$$

Wir bezeichnen noch mit $\vec{H}_g = \dfrac{i}{2\pi\varrho}$ die rotationssymmetrische Randfeldstärke und mit $\vec{S}_g = \dfrac{i}{\pi\varrho^2}$ die Stromdichte, die bei gleichmässiger Stromverteilung über den Leiterquerschnitt auftreten würden. Nach Ausführung der in Gl. (11a), (11b), (11c) angedeuteten Differentialoperationen an $\vec{V}_w$ nach Gl. (10) erhalten wir schliesslich die vollständige Lösung für das magnetische Feld und die Stromdichte in der Kabelader 1:

$$-\vec{H}_{wr}/\vec{H}_g = \exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}(\varrho/a)^n\frac{\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}r)+\mathrm{J}_{n+1}(\bar{k}r)}{\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho)}\sin n(\varphi+\pi/6)$$

$$+\exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}(\varrho/a)^n\frac{\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}r)+\mathrm{J}_{n+1}(kr)}{\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho)}\sin n(\varphi-\pi/6) \quad (12a)$$

$$\vec{H}_{w\varphi}/\vec{H}_g = \mathrm{J}_1(\bar{k}r)/\mathrm{J}_1(k\varrho) - \exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}(\varrho/a)^n\frac{\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}r)-\mathrm{J}_{n+1}(\bar{k}r)}{\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho)}\cos n(\varphi+\pi/6)$$

$$-\exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)\sum_{n=1}^{\infty}(\varrho/a)^n\frac{\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}r)-\mathrm{J}_{n+1}(\bar{k}r)}{\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho)}\cos n(\varphi-\pi/6) \quad (12b)$$

$$\vec{S}_w/\vec{S}_g = \frac{\bar{k}\varrho}{2}\cdot\mathrm{J}_0(\bar{k}r)/\mathrm{J}_1(\bar{k}\varrho) + \exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)\,k\varrho\sum_{n=1}^{\infty}(\varrho/a)^n\frac{\mathrm{J}_n(\bar{k}r)}{\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho)}\cos n(\varphi+\pi/6)$$

$$+\exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)\,\bar{k}\varrho\sum_{n=1}^{\infty}(\varrho/a)^n\frac{\mathrm{J}_n(kr)}{\mathrm{J}_{n-1}(k\varrho)}\cos n(\varphi-\pi/6) \quad (13)$$

Für die Verteilung des magnetischen und elektrischen Wirbelfeldes in den Kabeladern 2 und 3 gelten, wenn die Orientierung der Koordinaten r und φ nach Fig. 2 vorgenommen wird, die gleichen Beziehungen (12a), (12b) und (13) mit folgender Einschränkung. Die Vektoren $\vec{H}_{wr}$, $\vec{H}_{w\varphi}$ und $\vec{S}_w$ sind für Leiter 2 mit $\exp(\mathrm{j}\,2\pi/3)$ bzw. für Leiter 3 mit $\exp(-\mathrm{j}\,2\pi/3)$ zu multiplizieren, d. h. um $+120°$ bzw. $-120°$ gegenüber den Vektoren des Leiters 1 zu verdrehen.

Gl. (12b) und (13) lassen erkennen, dass je der erste Summand auf der rechten Seite zur z-Achse rotationssymmetrisch ist und nur vom Eigenfeld des Leiters 1 herrührt. Diese Summanden sind die bekannten Beziehungen für das magnetische und elektrische Wirbelfeld eines von Wechselstrom durchflossenen Runddrahtes. Die von φ abhängigen, nicht mehr rotationssymmetrischen Summenglieder in Gl. (12) und (13) berücksichtigen die Nähewirkung der induzierenden Leiter 2 und 3 auf den Leiter 1, die auch zu einer Radialkomponente des Magnetfeldes [Gl. (12a)] Veranlassung gibt.

Um den Verlauf der Stromdichte in einem Leiter eines dreiadrigen, symmetrisch belasteten Drehstromkabels anschaulich übersehen zu können, wurden die Verhältnisse anhand Gl. (13) für einen extremen Fall durchgerechnet. Zugrunde gelegt wurde $|\bar{k}|\varrho = 2$, was bei einer Frequenz von 50 Hz und einer Kupferleitfähigkeit von $56 \cdot 10^4$ $(\Omega\mathrm{cm})^{-1}$ einem Leiterquerschnitt von 570 mm² entspricht. Für das Verhältnis «Leiterhalbmesser zu gegenseitigem Achsenabstand» wurde $\varrho/a = 0{,}4$ angenommen. Die Reihenentwicklungen für die Zylinder- und Kreisfunktionen im zweiten und dritten Summanden von Gl. (13) wurden wegen der guten Konvergenz nach der zweiten Harmonischen ($n=2$) abgebrochen. Die Auswertung der Besselschen

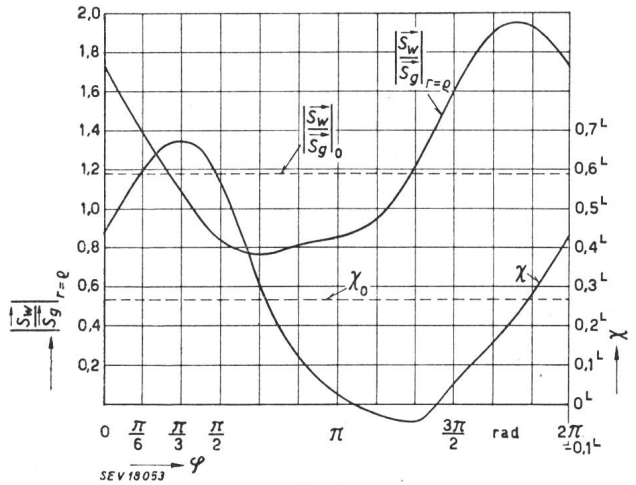


Fig. 3
Betrag und Phasenwinkel der Randstromdichte über dem abgewickelten Leiterumfang
—— mit Nähewirkung
- - - - ohne Nähewirkung

Funktionen komplexen Argumentes erfolgte nach den Tafeln von *Jahnke* und *Emde* [35] und für $n = 2$ nach denen von *Tölke* [32].

In Fig. 3 wurde für das genannte Beispiel das Verhältnis der Randstromdichte $\vec{S}_{w(r=\varrho)}$ zur Stromdichte $\vec{S}_g$, die bei gleichmässiger Stromverteilung auftreten würde, über den auf eine Gerade abgewickelten Umfang des Leiterquerschnittes aufgetragen, und zwar nach Betrag und Phasenwinkel. Man sieht, dass diese Werte nach einer Art harmonischer Verteilung um die rotationssymmetrischen Werte (in Fig. 3 gestrichelt) herum verlaufen, die sich nur unter der Wirkung des Eigenfeldes im Leiter ohne Berücksichtigung der Nähewirkung der Nachbarleiter einstellen würde. Der Betrag der Randstromdichte hat seinen Höchstwert nahe jener Stelle am Umfang des Leiters 1, die dem Leiter 2 am meisten zugewendet ist ($\varphi \approx -\pi/6$), ihren Tiefstwert etwa an der dem Leiter 2 zumeist abgewendeten Stelle. Der Verlauf der Randstromdichte über den Umfang der Leiter 2 und 3 gehorcht dem gleichen Gesetz, wobei die Zählrichtung des Winkels φ nach Fig. 2 zu wählen ist und die Phasenlage χ bei Leiter 2 und 3 gegenüber jener bei Leiter 1 um $\pm\, 2\pi/3$ rad zu verschieben ist.

Fig. 4 zeigt den Verlauf der Stromdichte (nach Betrag und Phase) über den Querschnitt des Leiters 1, und zwar für einen Durchmesser, der in der Verbindungslinie der Mittelpunkte von Leiter 1 und 2 liegt. In dieser Verbindungslinie tritt, wie wir vor-

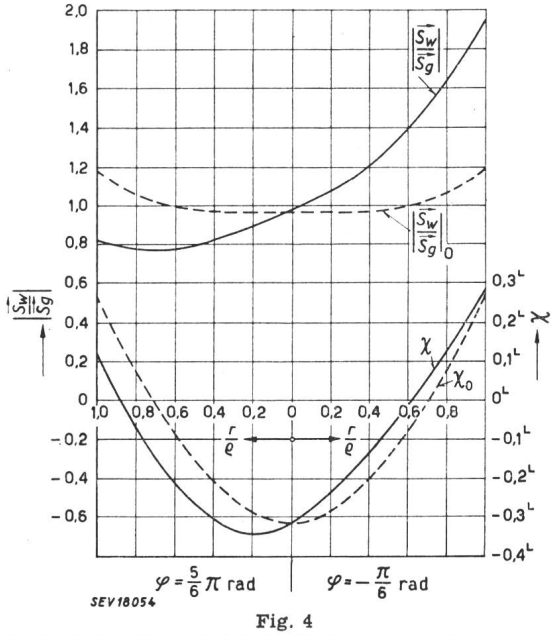


Fig. 4
Verlauf der Stromdichte im Leiter 1 nach Betrag und Phasenwinkel für einen bestimmten Durchmesser
—— mit Nähewirkung
- - - - ohne Nähewirkung

hin sahen, die Nähewirkung stark in Erscheinung. Die Stromfäden drängen sich an die Oberfläche nach der dem Leiter 2 am nächsten liegenden Stelle zusammen, während diametral dazu eine Entlastung des Querschnittes eintritt. Zum Vergleich ist auch in Fig. 4 der Verlauf der Stromdichte ohne Berücksichtigung der Nähewirkung mit eingezeichnet.

In Fig. 5 wurden die Augenblickswerte der Stromdichte über dem Querschnitt der Adern 1 und 2 dargestellt, und zwar wieder für die beiden durch die Mittelpunkte von Leiter 1 und 2 gehenden Durchmesser. Gewählt wurde ein Zeitpunkt, in dem

der Nachbarschaftseinfluss in Leiter 1 besonders stark ausgeprägt ist, d. h. die Stromdichte, bezogen auf den Halbmesser $\varphi = -\pi/6$, ihren zeitlichen Höchstwert besitzt. In diesem Augenblick fliesst, wie Fig. 5 zeigt, der Strom im Leiter 2 an den dem Leiter 1 zugekehrten Stellen in entgegengesetzter, an den dem Leiter 1 abgewendeten Stellen in gleicher Richtung wie im Leiter 1. Die Erhöhung der Querschnittsbelastung an den benachbarten und die Querschnittsentlastung an den voneinander abgewendeten Stellen beider Adern geht aus Fig. 5 deutlich hervor. Weiter ist die durch die geometrische Anordnung und den gewählten Zeitpunkt bedingte Unsymmetrie der Stromdichteverteilung über dem betreffenden Durchmesser der Leiter 1 und 2 zu beachten.

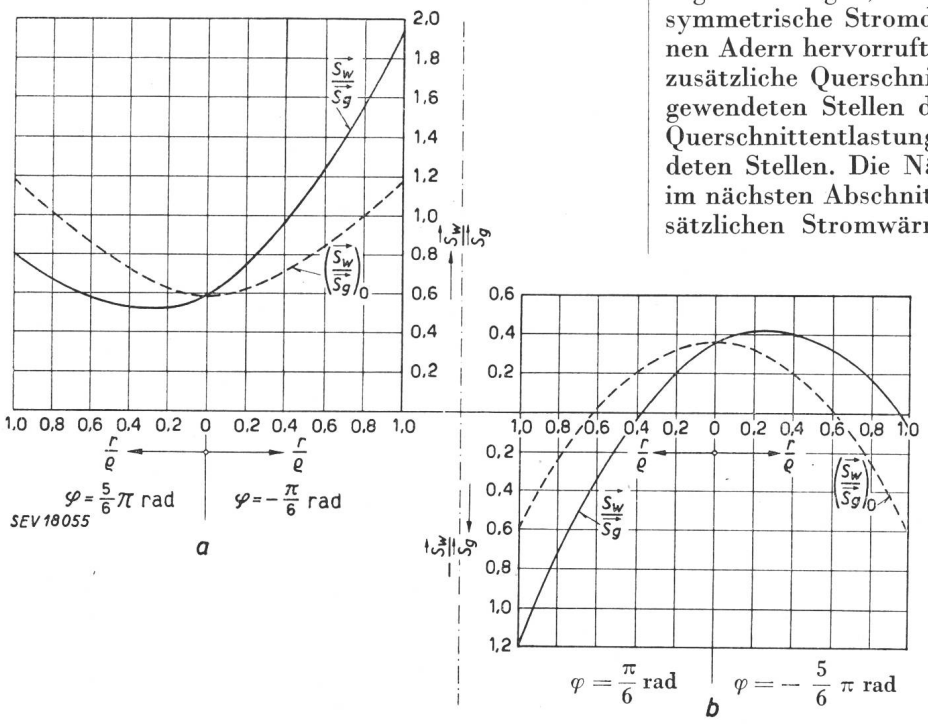


Fig. 5
Augenblickswerte der Stromdichte in den Leitern 1 und 2 für einen bestimmten Durchmesser und Zeitpunkt
a Leiter 1; *b* Leiter 2
——— mit Nähewirkung
- - - - ohne Nähewirkung

Schliesslich zeigt Fig. 6 für den gleichen Zeitpunkt wie Fig. 5 den Verlauf der Stromdichte über den Querschnitt der drei Adern des Drehstromkabels. Bei dieser Darstellungsweise wurden wiederum die Durchmesser gewählt, die in der Zeichenebene durch die Mittelpunkte zweier jeweils benachbarter Leiter gehen. Über die Grösse und Richtung des Stromes an den einzelnen Leiterstellen zu dem gewählten Zeitpunkt gibt Fig. 6 anschaulich Aufschluss.

Auf eine Erörterung über den Verlauf des magnetischen Wirbelfeldes in den drei Adern des Drehstromkabels anhand der Gl. (12a) und (12b) wurde verzichtet. Die Nähewirkung tritt auch hier durch unsymmetrische Feldverteilung, ferner durch Feldverstärkung und Feldschwächung an den einzelnen Leiterstellen in Erscheinung.

Bemerkenswert für die hier behandelte Nähewirkung ist die Abhängigkeit der Stromdichte und des Magnetfeldes in den einzelnen Leitern nicht nur vom jeweils betrachteten Radius, sondern auch vom Winkel φ, den dieser mit der Ausgangsrichtung ($\varphi = 0$) bildet. Beim Drehstromkabel ist ausserdem der Einfluss der zeitlichen Phasenverschiebung der 3 Leiterströme um je $2\pi/3$ gegeneinander zu beachten. Das durchgerechnete Beispiel und die Fig. 3...6 zeigen, dass die Nähewirkung eine unsymmetrische Stromdichteverteilung in den einzelnen Adern hervorruft. Im zeitlichen Mittel wird die zusätzliche Querschnittbelastung der einander zugewendeten Stellen der Leiter grösser sein als die Querschnittentlastung an den einander abgewendeten Stellen. Die Nähewirkung gibt also, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, Anlass zu zusätzlichen Stromwärmeverlusten, obwohl sich bei der Integration der Stromdichte nach Gl. (13) über den Leiterquerschnitt die unsymmetrischen und ungleichmässig verteilten Ausgleichströme aufheben.

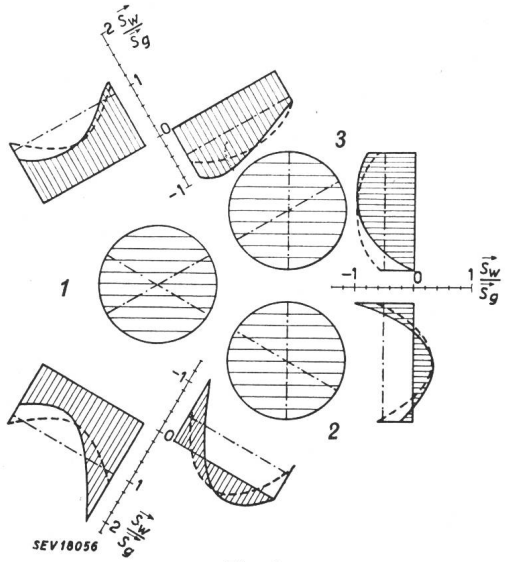


Fig. 6
Momentanwerte der Stromdichte über den Leiterquerschnitten eines dreiadrigen Drehstromkabels für einen bestimmten Durchmesser und Zeitpunkt
- - - - - mit Stromverdrängung ohne Nähewirkung
——— mit Stromverdrängung mit Nähewirkung
—·—·— ohne Stromverdrängung

2.5 Der innere Scheinwiderstand der Kabeladern

Während der gesamte Spannungsabfall und damit der Scheinwiderstand einer aus Hin- und Rück-

leitung bestehenden Leiterschleife vielfach aus der im Zwischenraum zwischen den Leitern induzierten Spannung und aus der elektrischen Randfeldstärke an den Konturen der Leiteroberfläche abgeleitet wird, soll hier ein anderer Weg beschritten werden. Der Wirkwiderstand wird aus der mittleren Wärmeverlustleistung und die *innere* Induktivität aus der mittleren magnetischen Energie im Leiter berechnet. Die dem elektromagnetischen Wirbelfeld im Leiterinnern einer Ader zuzuschreibende mittlere Scheinleistung $\bar{P}_s$ lässt sich bekanntlich aus der Beziehung:

$$\bar{P}_s = \frac{1}{2}\bar{Z}_i |i|^2 = \frac{1}{2}\oint (\vec{S}_w/\gamma_a \times \vec{H}^*_w)_{r=\varrho}\, \mathrm{d}\vec{A} \quad (14)$$

bestimmen. Hierbei ist $\bar{Z}_i = R_i + \mathrm{j}\omega L_i$ der innere Scheinwiderstand pro Längeneinheit mit R_i als innerem Wirkwiderstand und L_i als innerer Induktivität. Das Hüllenintegral in Gl. (14) ist so über die Leiteroberfläche zu erstrecken, dass der Flächenvektor $\mathrm{d}\vec{A} = -\varrho\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}z$ in das Leiterinnere weist. Die weiter in das Hüllenintegral eingehende Dichte der Energiestrahlung (komplexer Poyntingscher Vektor) ist nur mit der senkrecht zur Leiteroberfläche gerichteten Komponente $-\left(\frac{\vec{S}_w}{\gamma_a} \cdot \vec{H}^*_{w\varphi}\right)_{r=\varrho}$ wirksam.

Da die Stromdichte $\vec{S}_w$ und das Magnetfeld $\vec{H}_w$ voraussetzungsgemäss von z unabhängig sind, liefert im Oberflächenintegral (14) die Integration über $\mathrm{d}z$ die betrachtete Länge l des Kabels. Führt man noch

$$P_{vg} = \frac{1}{2}|i|^2 R_g \quad (15)$$

als Verlustleistung ein, die bei gleichmässiger Stromverteilung mit

$$R_g = 1/\pi\varrho^2\gamma_a \quad (16)$$

als Gleichstromwiderstand pro Längeneinheit auftreten würde, berücksichtigt man ferner die Beziehungen für $\vec{S}_g$ und $\vec{H}_g$ im vorigen Abschnitt, so erhält man:

$$\bar{P}_s/P_{vg} = \bar{Z}_i/R_g = \frac{1}{2}\pi \int_0^{2\pi} (\vec{S}_w/\vec{S}_g \cdot \vec{H}^*_{w\varphi}/\vec{H}^*_g)\, \mathrm{d}\varphi \quad (17)$$

Für $\vec{S}_w/\vec{S}_g$ ist die Funktion nach Gl. (13), für $\vec{H}^*_{w\varphi}/\vec{H}^*_g$ die konjugiert komplexe Funktion aus Gl. (12b), und zwar an der Leiteroberfläche $r = \varrho$, einzusetzen. Beachtet man noch bei der Integration über $\mathrm{d}\varphi$ die Orthogonalitätsbedingungen für die Kreisfunktionen:

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi\, \mathrm{d}\varphi = \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix} \Bigg\} \begin{matrix} \text{für } m \neq n \\ \text{für } m = n \neq 0 \end{matrix}$$

so ergibt sich nach einfachen Zwischenrechnungen

$$\bar{P}_s/P_{vg} = \bar{Z}_i/R_g = \frac{1}{2}\bar{k}\varrho\, \mathrm{J}_0(\bar{k}\varrho)/\mathrm{J}_1(\bar{k}\varrho)$$

$$+ \frac{1}{2}(\bar{k}\varrho)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\varrho/a)^{2n}\, [\mathrm{J}_{n+1}(\bar{k}\varrho)/\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho) + 1]$$

$$\cdot [\bar{\mathrm{J}}^*_{n+1}(\bar{k}\varrho)/\bar{\mathrm{J}}^*_{n-1}(\bar{k}\varrho) - 1]\left(1 - \frac{1}{2}\cos n\frac{\pi}{3}\right) \quad (18)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite von Gl. (18) ist das Verhältnis des inneren Scheinwiderstandes zum Gleichstromwiderstand eines nur im eigenen Wechselfeld liegenden Runddrahtes. Die zusätzlichen Summenglieder berücksichtigen die Nähewirkung der beiden benachbarten Leiter im Drehstromkabel.

Trennt man in Gl. (18) nach Realteil und Imaginärteil, so erhält man für das Verhältnis des inneren Wirkwiderstandes zum Gleichstromwiderstand:

$$R_i/R_g = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\bar{k}\varrho \cdot \mathrm{J}_0(\bar{k}\varrho)/\mathrm{J}_1(\bar{k}\varrho)\right]$$

$$- |\bar{k}\varrho|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\varrho/a)^{2n}$$

$$\cdot \mathrm{Im}\,[\mathrm{J}_{n+1}(\bar{k}\varrho)/\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho)]\left(1 - \frac{1}{2}\cos n\frac{\pi}{3}\right) \quad (19)$$

und für das Verhältnis des inneren Blindwiderstandes zum Gleichstromwiderstand:

$$\omega L_i/R_g = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\bar{k}\varrho \cdot \mathrm{J}_0(\bar{k}\varrho)/\mathrm{J}_1(\bar{k}\varrho)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}|\bar{k}\varrho|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\varrho/a)^{2n}\, [1 - |\mathrm{J}_{n+1}(\bar{k}\varrho)/\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho)|^2]$$

$$\cdot \left(1 - \frac{1}{2}\cos n\frac{\pi}{3}\right) \quad (20)$$

Der durch die Wirbelströmung einschliesslich Nachbarschaftseinfluss in jeder Ader bedingte Zusatzwiderstand $R_i - R_g$ im Verhältnis zum Gleichstromwiderstand R_g lässt sich gemäss Gl. (19) ausdrücken durch:

$$(R_i - R_g)/R_g = \mathrm{f}(\bar{k}\varrho)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (\varrho/a)^{2n}\left(1 - \frac{1}{2}\cos n\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{g}_n(\bar{k}\varrho) \quad (21)$$

worin

$$\mathrm{f}(k\varrho) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}k\varrho \cdot \mathrm{J}_0(\bar{k}\varrho)/\mathrm{J}_1(k\varrho)\right] - 1 \quad (22a)$$

$$\mathrm{g}_n(\bar{k}\varrho) = \frac{|\bar{k}\varrho|^2}{n|\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho)|^2} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{Im}\,\mathrm{J}_{n-1}(\bar{k}\varrho) & \mathrm{Re}\,\mathrm{J}_{n-1}(k\varrho) \\ \mathrm{Im}\,\mathrm{J}_{n+1}(\bar{k}\varrho) & \mathrm{Re}\,\mathrm{J}_{n+1}(k\varrho) \end{vmatrix} \quad (22b)$$

In Fig. 7 sind die Funktionen $\mathrm{f}(\bar{k}\varrho)$ und $\mathrm{g}_n(\bar{k}\varrho)$ für $n = 1$ und 2 über $|\bar{k}|\varrho$ bis zu etwa $|\bar{k}|\varrho = 10$ in doppeltlogarithmischem Maßstab aufgetragen. Dabei wurden die Werte der Besselschen Funktionen für die Ordnungszahlen 0 und 1 den Tafeln von

Jahnke und *Emde* [35] und für die Ordnungszahlen 2 und 3 den Tafeln von *Tölke* [32] entnommen. Wegen der guten Konvergenz der Summenglieder in Gl. (19) und (21) können diese nach dem

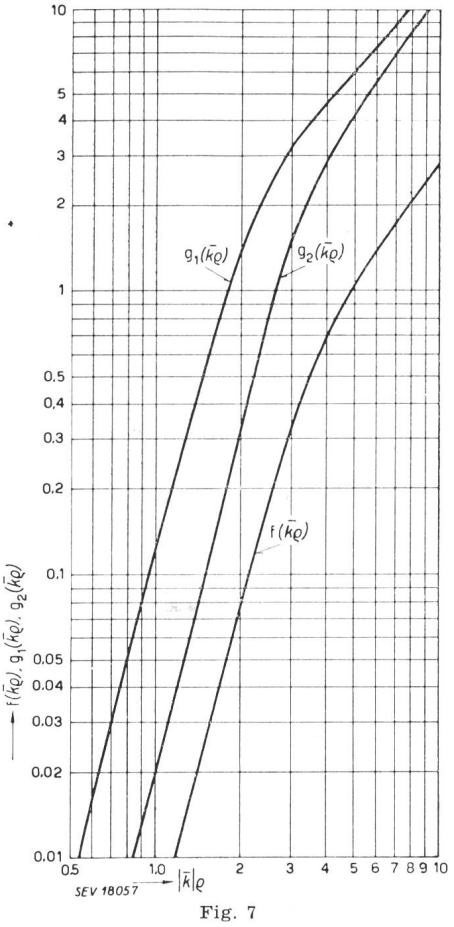


Fig. 7

Die Funktionen $f(\bar{k}\rho)$, $g_1(k\rho)$ und $g_2(\bar{k}\rho)$ über $|\bar{k}|\rho$

Gliede $n = 2$ abgebrochen werden. Demnach kann $(R_i - R_g)/R_g$ bei bekanntem ϱ/a abhängig von $|\bar{k}|\varrho$ aus:

$$(R_i - R_g)/R_g = f(\bar{k}\varrho) + 3/4\,(\varrho/a)^2\, g_1(\bar{k}\varrho) + 5/4\,(\varrho/a)^4\, g_2(\bar{k}\varrho) + \ldots \quad (23)$$

mit Hilfe von Fig. 7 bestimmt werden.

Für die meisten in der Praxis auftretenden Fälle lassen sich die im unteren Argumentbereich, etwa $0 \leq |\bar{k}|\varrho \leq 1{,}7$, konvergenten Reihenentwicklungen der Besselschen Funktionen verwenden. Indem man die Reihen für J_{n+1} und für J_{n-1} durcheinander dividiert, erhält man die neue Reihe:

$$J_{n+1}(\bar{k}\varrho)/J_{n-1}(k\varrho) = \frac{(\bar{k}\varrho)^2}{4\,n\,(n+1)}\,[1+(\bar{k}\varrho)^2/2\,n\,(n+2) + (5n+6)(k\varrho)^4/2^4 n^2 (n+1)(n+2)(n+3) + \ldots] \quad (24)$$

Führt man die Reihenentwicklungen (bis einschliesslich zum dritten Glied) in Gl. (18) ein und trennt nach Real- und Imaginärteil, so ergibt sich nach Zwischenrechnungen für den *inneren Zusatzwiderstand* einer Ader:

$$(R_i - R_g)/R_g \approx \frac{1}{192}\,|\bar{k}\varrho|^4 \left(1 - \frac{1}{240}\,|\bar{k}\varrho|^4\right) + \frac{3}{32}\,|\bar{k}\varrho|^4 \left(1 - \frac{11}{384}\,|\bar{k}\varrho|^4\right)(\varrho/a)^2 + \frac{5}{192}\,|\bar{k}\varrho|^4 \left(1 - \frac{1}{240}\,|\bar{k}\varrho|^4\right)(\varrho/a)^4 + \frac{1}{96}\,|k\varrho|^4 \left(1 - \frac{1}{5760}\,|\bar{k}\varrho|^4\right)(\varrho/a)^6 + \ldots \quad (25)$$

Für die *innere Induktivität* einer Ader erhält man:

$$L_i/L_g = \left(1 - \frac{1}{384}\,|\bar{k}\varrho|^4\right) + 3\left(1 - \frac{1}{64}\,|\bar{k}\varrho|^4\right)(\varrho/a)^2 + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{576}\,|\bar{k}\varrho|^4\right)(\varrho/a)^4 + 2\left(1 - \frac{1}{2304}\,|\bar{k}\varrho|^4\right)(\varrho/a)^6 + \ldots \quad (26)$$

Hierbei bedeutet $L_g = \mu_0/8\,\pi$ die innere Induktivität pro Längeneinheit eines nur im eigenen Felde liegenden Rundleiters bei Gleichstrom. In den etwa für $|\bar{k}|\varrho \leq 1{,}7$ gültigen Reihenentwicklungen (25) und (26) berücksichtigt das jeweils erste Glied den Einfluss des Eigenfeldes, während die nach Potenzen von $(\varrho/a)^2$ fortschreitenden Glieder die Nähewirkung der benachbarten Adern zum Ausdruck bringen.

Formel (25) und (26) zeigen, dass der innere Zusatzwiderstand und die innere Induktivität bei konstantem $|\bar{k}|\varrho$ mit stärkerer Näherung der Adern, d. h. mit wachsendem ϱ/a zunehmen, dass ferner bei konstantem ϱ/a mit wachsendem Leiterquerschnitt und wachsender Frequenz der innere Zusatzwiderstand rasch zunimmt, während sich die innere Induktivität vermindert.

2.6 Die äussere Betriebsinduktivität der Kabeladern

Die auf einen Leiter bezogene äussere Betriebsinduktivität wird ermittelt, indem man den magnetischen Induktionsfluss berechnet, der nach Fig. 2 eine in der Ebene $\varphi = 0$ liegende, von den Linien $r = \varrho$ und $r = c = a/\sqrt{3}$ berandete Fläche pro axiale Längeneinheit durchsetzt. Nach dem Stokesschen Satz ergibt sich dieser Induktionsfluss als Linienintegral des Vektorpotentials längs der Randlinien dieser Fläche. Die äussere Betriebsinduktivität pro Längeneinheit L_a ist dann:

$$L_a = \frac{\mu_0}{i\,l} \oint \vec{V}\,\mathrm{d}s \quad (27)$$

Da im vorliegenden Fall zum Linienintegral lediglich die in z-Richtung verlaufenden Berandungslinien $r = \varrho$ und $r = c$ einen Beitrag liefern und das Vektorpotential von z unabhängig ist, ergibt sich einfach:

$$L_a = \frac{\mu_0}{i}\,[(\vec{V} + \vec{V}_r)_{\varphi=0,\, r=\varrho} - (\vec{V} + \vec{V}_r)_{\varphi=0,\, r=c}] \quad (28)$$

Hierin sind die Beziehungen für das Erregerpotential $\vec{V}$ nach Gl. (2c) und für das Rückwirkungspotential $\vec{V}_r$ nach Gl. (7) für $\varphi = 0$ und $r = \varrho$ bzw. $r = c$ einzusetzen. Man überzeugt sich indessen, dass unter Berücksichtigung der Reihenentwicklung (24) bei einer Betriebsfrequenz von 50 Hz und sogar bei den grössten vorkommenden Aderquerschnitten der Beitrag des Rückwirkungspotentials zum Induktionsfluss gegenüber dem des Erregerpotentials vernachlässigt werden kann. Wir erhalten schliesslich mit Gl. (2c) und (28) nach Zwischenrechnungen für das Verhältnis der äusseren Betriebsinduktivität zu der inneren Gleichstrominduktivität:

$$L_a/L_g = 4 \ln \left[\frac{a}{\varrho} \left(1 - \frac{\varrho}{a} \right) \sqrt{3} + \left[\frac{\varrho}{a} \right]^2 \right)^{1/2} \Bigg] \quad (29)$$

Wenn ϱ/a sehr klein wird, nähert sich L_a/L_g dem Wert $4 \ln a/\varrho$. Das ist bekanntlich die auf L_g bezogene äussere Betriebsinduktivität einer symmetrischen Drehstromfreileitung.

2.7 Der Scheinwiderstand des gemeinsamen Bleimantels

Um die Stromwärmeverluste und die Induktivität des Bleimantels zu ermitteln, hat man zunächst die Beziehungen für das elektromagnetische Wirbelfeld aufzustellen, das unter der Einwirkung des erregenden Drehstromsystems im Kabelmantel zustande kommt. Man kann dabei von ähnlichen vereinfachenden Voraussetzungen wie in Abschnitt 2.1 ausgehen und insbesondere die drei Kabeladern als symmetrische Drehstrom-Linienquellen ansehen. Bei Wahl eines Zylinderkoordinatensystems, dessen z-Achse in der Kabelachse liegt, kann die Wirbelströmung im Mantel wiederum aus der Wellengleichung bestimmt werden. Der Scheinwiderstand des Mantels ergibt sich auch hier aus einem Oberflächenintegral über den komplexen Poyntingschen Strahlungsvektor. Diese Rechnungen wurden in einer früheren Arbeit des Verfassers [30] durchgeführt. Danach erhält man für den Scheinwiderstand Z_m des Bleimantels, bezogen auf den Gleichstromwiderstand *einer* Ader, wobei also der Scheinwiderstand mit einem Drittel seines Gesamtwertes angesetzt wird, einen Ausdruck, der im wesentlichen folgendermassen lautet:

$$\underline{Z}_m/R_g = 3/8\,(\underline{k}\varrho)^2 \sum_{n=1,2,4\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \Big\{ (c/r_i)^{2n} [\underline{P}_{n-1,n-1}/\underline{P}_{n-1,n+1} + 1] \cdot [\underline{P}^*_{n-1,n-1}/\underline{P}^*_{n-1,n+1} - 1] + (c/r_e)^{2n} \Big\} \quad (30)$$

Wegen der benutzten Formelzeichen sei auf die Zusammenstellung in Abschnitt 2.2 verwiesen. Der Ausdruck (30) ist ähnlich aufgebaut wie die Summenglieder in Gl. (18) für den Scheinwiderstand der Kabeladern, nur fallen hier wegen der symmetrischen Anordnung der Erregung und des Koordinatensystems die durch 3 teilbaren Harmonischen in der Summenbildung heraus. Die aus Kombinationen von Hankelschen Funktionen bestehenden Funktionen $\underline{P}_{n-1,n-1}(\underline{k}_m r_e, \underline{k}_m r_i)$ und $\underline{P}_{n-1,n+1}(\underline{k}_m r_e, \underline{k}_m r_i)$ sind komplizierter als die in Gl. (18) auftretenden Besselschen Funktionen. Die erstgenannten lassen sich jedoch in Anbetracht der geringen Leitfähigkeit und Dicke des Bleimantels und für die niedrige Betriebsfrequenz von 50 Hz durch Näherungsentwicklungen wesentlich vereinfachen. Hier soll jedoch ohne Angabe der Zwischenrechnungen nur das Ergebnis mitgeteilt werden. Nach Trennung von Realteil und Imaginärteil erhält man für den anteilmässig auf den Gleichstromwiderstand R_g einer Ader bezogenen *Wirkwiderstand* des Bleimantels:

$$R_m/R_g = \frac{3}{16} |k\varrho|^4 \frac{\gamma_m}{\gamma_a} (r_e/\varrho)^2 [(r_e/r_i)^2 - 1] \cdot \sum_{n=1,2,4\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (c/r_e)^{2n} \, {}_2F_1 [2-n, 1; 2; 1-(r_e/r_i)^2] \quad (31a)$$

Wenn man sich wegen der guten Konvergenz der Reihe auf die ersten beiden Glieder $n = 1$ und $n = 2$ beschränkt und beachtet, dass sich hierfür die in Gl. (31a) auftretende *Gaußsche* hypergeometrische Reihe ${}_2F_1$ durch elementare Funktionen ausdrücken lässt, erhält man nach Zwischenrechnungen:

$$\underline{Z}_m/R_g = \frac{3}{16} |\underline{k}\varrho|^4 \frac{\gamma_m}{\gamma_a} (r_e/\varrho)^2 [(r_e/r_i)^2 - 1] \cdot \left\{ (c/r_e)^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left((r_e/r_i)^2 - 1 \right) \right] + \frac{1}{4} (c/r_e)^4 \right\} \quad (31b)$$

In ähnlicher Weise ergibt sich für die auf die innere Gleichstrominduktivität einer Ader bezogene *Induktivität des Bleimantels:*

$$L_m/L_g = 3 \sum_{n=1,2,4\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} (c/r_i)^{2n} \Big[1 - (r_i/r_e)^{2n} - |k_m r_e|^4 \frac{1}{16 n^2} (r_i/r_e)^{4n} \left((r_e/r_i)^2 - 1 \right)^2 {}_2F_1^2 \left(2 - n, 1; 2; 1 - (r_e/r_i)^2 \right) \Big] \quad (32a)$$

Die Untersuchung an durchgerechneten Beispielen zeigt, dass das letzte von der Wirbelströmung herrührende Glied in Gl. (32a) vernachlässigt werden kann, so dass diese übergeht in

$$L_m/L_g = 3 \sum_{n=1,2,4\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} [(c/r_i)^{2n} - (c/r_e)^{2n}] \quad (32b)$$

wofür unter Beschränkung auf die ersten beiden Glieder gesetzt werden kann:

$$L_m/L_g = 3\,(c/r_e)^2 \left((r_e/r_i)^2 - 1 \right) + \frac{3}{2} (c/r_e)^4 \left((r_e/r_i)^4 - 1 \right) \quad (32c)$$

3. Praktischer Teil

3.1 Die Betriebskonstanten des Drehstrom-Dreileiterkabels mit gemeinsamem Bleimantel

Als Betriebskonstanten des symmetrischen Drehstromkabels seien der gesamte Wirkwiderstand R_w, die Betriebsinduktivität L_b und die Betriebskapazität C_b, bezogen auf *einen* Leiter pro km Kabellänge, bezeichnet. Die Betriebskonstanten werden also wie in einem Einphasenstromkreis wirkend angenommen, dessen treibende Spannung gleich der Sternspannung des symmetrischen Drehstromsystems ist, und dessen Betriebsstrom durch einen Leiter fliesst.

3.11 Materialkonstanten

Tabelle I gibt eine Übersicht über die hier benötigten Materialkonstanten.

Materialkonstanten Tabelle I

	Leitertemperatur °C	Cu	Al	Pb
Elektrische Leitfähigkeit	20°	$56 \cdot 10^4$	$34 \cdot 10^4$	$4{,}8 \cdot 10^4$
γ in $(\Omega\text{cm})^{-1}$	55°	$49{,}3 \cdot 10^4$	$30 \cdot 10^4$	$4{,}2 \cdot 10^4$
Wellenzahl $\lvert k \rvert$ in cm^{-1}	20°	1,49	1,16	0,436
bei $f = 50$ Hz	55°	1,40	1,09	0,409
Permeabilität des Vakuums	$\mu_0 = 0{,}4\,\pi \cdot 10^{-8}$ Hcm^{-1}			
Dielektrizitätskonstante des Vakuums	$\varepsilon_0 = \frac{1}{36}\,\pi \cdot 10^{-11}$ Fcm^{-1}			
Relative Dielektrizitätskonstante von getränktem Papier	$\varepsilon_r \approx 3{,}5$			

3.12 Wirkwiderstand und Stromwärmeverluste

Es bedeute:

- I Effektivwert des sinusförmigen Betriebswechselstromes in A
- R_w Wirkwiderstand jeder Ader in Ω/km
- R_g Gleichstromwiderstand jeder Ader in Ω/km
- R_z Zusatzwiderstand jeder Ader in Ω/km
- P_j Stromwärmeverluste jeder Ader in W/km
- P_{jg} Stromwärmeverluste jeder Ader bei Gleichstrom in W/km
- P_{jz} Zusätzliche Stromwärmeverluste jeder Ader in W/km.

Dann gilt für jede Ader:

$$R_w = R_g\,(1 + R_z/R_g)$$

$$P_j = I^2\,R_w = P_{jg}\,(1 + P_{jz}/P_{jg})$$

Hierbei ist:

$R_g = 10^7/A\gamma_a$ mit A Leiterquerschnitt in mm²
γ_a Leitfähigkeit in $(\Omega\text{cm})^{-1}$

Ferner setzen sich die Zusatzwiderstände und Zusatzverluste zusammen aus:

$$R_z/R_g = R_e/R_g + R_n/R_g + R_m/R_g;$$

$$P_{jz}/P_{jg} = P_{je}/P_{jg} + P_{jn}/P_{jg} + P_{jm}/P_{jg}$$

Die einzelnen durch e, n, m gekennzeichneten relativen Anteile sind der elektromagnetischen Wirbelströmung zuzuschreiben, wobei

- e auf den Einfluss des *eigenen* Leiterfeldes,
- n auf die induzierende Wirkung der *Nachbaradern* (Nähewirkung),
- m auf die Wirbelströmung im Bleimantel hinweist.

Die *totalen Stromwärmeverluste* des *Drehstromkabels* sind:

$$P_{jt} = 3\,I^2\,R_w \text{ W/km}$$

3.13 Betriebsinduktivität

Es bedeute:

- L_g die innere Selbstinduktivität eines Rundleiters bei Gleichstrom in mH/km
- L_e die innere Selbstinduktivität, herrührend vom Eigenfeld des Leiters, in mH/km
- L_n die innere Gegeninduktivität, herrührend vom Feld der Nachbarleiter (Nähewirkung), in mH/km
- L_a die äussere Betriebsinduktivität, herrührend vom gesamten Feld zwischen Leiter und Kabelachse, in mH/km
- L_m die Gegeninduktivität des Bleimantels, anteilmässig auf eine Ader bezogen, in mH/km.

Dann ist mit:

$L_g = \mu_0/8\pi$ in Hcm^{-1} oder $L_g = 0{,}05$ in mH/km

die *Betriebsinduktivität* je Ader:

$$L_b = 0{,}05\,(L_e/L_g + L_n/L_g + L_a/L_g + L_m/L_g)$$

in mH/km.

3.14 Betriebskapazität

Die Teilkapazitäten zwischen den einzelnen Adern und zwischen Ader und geerdetem Bleimantel können angenähert berechnet werden, indem man die als Linienquellen angenommenen 3 Leiter nach dem Gesetz der reziproken Radien am Mantel spiegelt und den Spiegelbildern der Linienquellen jeweils die entgegengesetzten Ladungen zuordnet. Aus den so ermittelten Teilkapazitäten erhält man in bekannter Weise die Betriebskapazität des Drehstromkabels zu:

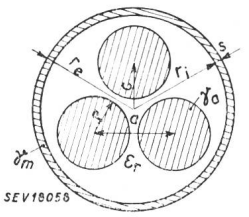
$$C_b = \frac{4\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{\ln\left[3\,(c/\varrho)^2\,(1-(c/r_i)^2)^3/(1-(c/r_i)^6)\right]}\ \text{in Fcm}^{-1}$$

Die Werte von ε_0 und ε_r sind aus Tabelle I, die der geometrischen Abmessungen aus Tabelle II zu entnehmen. Tabelle II enthält die Formel für die Betriebskapazität in der praktischen Einheit μF/km.

werden die Betriebskonstanten nach Tabelle II für Kupferleiterquerschnitte von 120, 240 und 400 mm² bei einer Leitertemperatur von 55 °C errechnet und in Tabelle III zusammengestellt.

Für die drei Beispiele eines 1-kV-Drehstromkabels mit den Abmessungen nach Tabelle III wur-

Betriebskonstanten des Drehstrom-Dreileiterkabels mit gemeinsamem (unbewehrtem) Bleimantel Tabelle II

1	Geometrische Bezeichnungen				
2	Gleichstromwiderstand			R_g	$\frac{10^7}{A\gamma_a}$ in Ω/km; A in mm²; γ_a in (Ωcm)$^{-1}$
	Relative anteilmässige Zusatzwiderstände	Eigenfeld		R_e/R_g	[1] $\frac{x^4}{192}\left(1-\frac{x^4}{240}\right)+\ldots$
		Nähewirkung		R_n/R_g	[1] $\frac{3}{32}x^4\left(1-\frac{11}{384}x^4\right)\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2+\frac{5}{192}x^4\left(1-\frac{x^4}{240}\right)\left(\frac{\varrho}{a}\right)^4+\frac{x^4}{96}\left(1-\frac{x^4}{5760}\right)\left(\frac{\varrho}{a}\right)^6+\ldots$
		Mantel		R_m/R_g	$\frac{3}{16}x^4\frac{\gamma_m}{\gamma_a}\left(\frac{r_e}{\varrho}\right)^2\left[\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^2-1\right]\left\{\left(\frac{c}{r_e}\right)^2\left\{1-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^2-1\right]\right\}+\frac{1}{4}\left(\frac{c}{r_e}\right)^4\right\}$
	Gesamter relativer Zusatzwiderstand			R_z/R_g	$\frac{R_e}{R_g}+\frac{R_n}{R_g}+\frac{R_m}{R_g}$
	Wirkwiderstand			R_c	$R_g\left(1+\frac{R_z}{R_g}\right)$ in Ω/km
3	Relative anteilmässige Induktivitäten	Innere	Eigenfeld	L_e/L_g	[1] $\left(1-\frac{x^4}{384}\right)+\ldots$
			Nähewirkung	L_n/L_g	[1] $3\left(1-\frac{x^4}{64}\right)\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2+\frac{5}{2}\left(1-\frac{x^4}{576}\right)\left(\frac{\varrho}{a}\right)^4+2\left(1-\frac{x^4}{2304}\right)\left(\frac{\varrho}{a}\right)^6+\ldots$
		Äussere	Aussenfeld	L_a/L_g	$4\ln\frac{a}{\varrho}\left[1-\frac{\varrho}{a}\sqrt{3}+\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\right]^{1/2}$
			Mantel	L_m/L_g	$3\left(\frac{c}{r_e}\right)^2\left[\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^2-1\right]+\frac{3}{2}\left(\frac{c}{r_e}\right)^4\left[\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^4-1\right]$
	Betriebsinduktivität			L_b	$0{,}05\left(\frac{L_e}{L_g}+\frac{L_n}{L_g}+\frac{L_a}{L_g}+\frac{L_m}{L_g}\right)$ in mH/km
4	Betriebskapazität			C_b	$\frac{\varepsilon_r}{9\ln\left\{3\left(\frac{c}{\varrho}\right)^2\frac{[1-(c/r_i)^2]^3}{1-(c/r_i)^6}\right\}}$ in μF/km

[1] Näherungsformeln gültig für Aderquerschnitte bis höchstens 400 mm² Cu bzw. 625 mm² Al.
Für x ist einzusetzen $x = |\bar{k}|\varrho$; ϱ in cm; $|\bar{k}|$ in (cm)$^{-1}$ (vgl. Tabelle I).

3.15 Zusammenstellung sämtlicher Betriebskonstanten

In Tabelle II sind die auf Grund dieser Arbeit ermittelten sämtlichen Betriebskonstanten des symmetrischen Drehstrom-Dreileiterkabels mit gemeinsamem (unbewehrtem) Bleimantel übersichtlich zusammengestellt.

3.2 Durchrechnung einiger Beispiele

Für ein 1-kV-Drehstromkabel mit gemeinsamem Bleimantel und Abmessungen nach Tabelle III

den für den betriebswarmen Zustand von 55 °C in Tabelle IV aufgetragen:

Die anteilmässigen Zusatzverluste in % der gesamten Zusatzverluste

Die nach den genauen Formeln der Tabelle II berechnete Betriebsinduktivität in % der Induktivität nach der Näherungsformel L_b

$$L = 0{,}05\,[1 + 4\ln(a/\varrho)]$$

welche den Einfluss des endlichen Leiterquerschnittes, der Nähewirkung und des Bleimantels unberücksichtigt lässt.

Betriebskonstanten für 1-kV-Drehstromkabel Tabelle III

Aderquerschnitt		A	mm²	120	240	400
Abmessungen gemäss Bild in Tafel II		ϱ	mm	6,18	8,75	11,3
		a	mm	14,2	19,9	25,0
		c	mm	8,2	11,5	14,42
		s	mm	1,2	1,4	1,5
		r_i	mm	15,9	22,3	27,8
		r_e	mm	17,1	23,7	29,3
Wirbelstromkenngrösse		$x_{Cu,55} = \lvert\underline{k}\rvert_{Cu,55} \cdot \varrho$	—	0,865	1,225	1,58
Widerstand	Gleichstrom-	R_g	Ω/km	0,169	0,0845	0,0506
	Zusatz-	R_e/R_g	—	0,00291	0,0116	0,0316
		R_n/R_g	—	0,01033	0,0410	0,1054
		R_m/R_g	—	0,00246	0,0080	0,0182
		R_z/R_g	—	0,01570	0,0606	0,1552
	Wirk-	R_w	Ω/km	0,172	0,0896	0,0584
Induktivität	Innere	L_e/L_g	—	0,9985	0,9942	0,9838
		L_n/L_g	—	0,6651	0,6681	0,6790
	Äussere	L_a/L_g	—	2,188	2,123	1,920
	Mantel	L_m/L_g	—	0,1351	0,1145	0,1026
	Betriebs-	L_b	mH/km	0,1995	0,195	0,1842
Indukt. Blindwiderstand		ωL_b	Ω/km	0,0627	0,0613	0,0580
Betriebskapazität		C_b	μF/km	0,516	0,532	0,582

Anteilmässige Zusatzverluste und Betriebsinduktivität für 1-kV-Drehstromkabel nach Tabelle III Tabelle IV

Aderquerschnitt			mm²	120	240	400
Prozentuale Zusatzverluste	Ader	Eigenfeld	R_e/R_z	18,6 %	19,2 %	20,4 %
		Nähewirkung	R_n/R_z	65,6 %	67,6 %	67,9 %
	Mantel		R_m/R_z	15,8 %	13,2 %	11,7 %
Prozentuale Betriebsinduktivität			L_b/L	92,5 %	91,1 %	88,2 %

Zusammenfassend lassen sich aus den durchgerechneten Zahlenbeispielen folgende Schlüsse ziehen:

Beim symmetrischen Drehstromkabel mit gemeinsamem (unbewehrtem) Bleimantel tritt die Erhöhung des Wirkwiderstandes gegenüber dem Gleichstromwiderstand erst bei sehr grossen Aderquerschnitten, über 120 mm², merkbar in Erscheinung. Im betriebswarmen Zustand beträgt sie 6% bei 240 mm², bzw. 16% bei 400 mm² Kupferquerschnitt einer Ader. Die Zusatzverluste verteilen sich bei den angenommenen Bleimanteldicken zu etwa 87% auf die Adern selbst; davon sind rund ein Viertel dem Einfluss des eigenen Leiterfeldes, drei Viertel der Nähewirkung der beiden benachbarten Adern zuzuschreiben. Die restlichen Zusatzverluste, etwa 13%, rühren von der Wirbelströmung im Bleimantel her.

Mit wachsendem Leiterquerschnitt und zunehmender Nähewirkung vermindert sich die gesamte Betriebsinduktivität. Der magnetische Induktionsfluss ausserhalb der Leiter nimmt stärker ab, als der Fluss im Leiterinnern wegen der Feldverdrängung zunehmen kann. Die anteilige Induktivität des Bleimantels ist geringfügig. Für Aderquerschnitte von 240 mm² bzw. 400 mm² ist die Betriebsinduktivität um 9% bzw. 12% kleiner als die nach der üblichen groben Näherungsformel berechnete Induktivität.

3.3 Abhängigkeit der Stromwärmeverluste von der Temperatur

Es bezeichne:

R_w	den Wirkwiderstand in Ω/km pro Ader
R_g	den Gleichstromwiderstand in Ω/km pro Ader
$R_z/R_g = f(x)$	den gesamten relativen Zusatzwiderstand nach Tabelle II
ϑ bzw. ϑ_1	als Index die Bezugnahme der Verluste auf die Temperatur ϑ bzw. ϑ_1
α	den auf 0 °C bezogenen Temperaturkoeffizienten in °C^{-1}.

Dann gilt:

$$R_{w\vartheta} / R_{w\vartheta_1} = [R_{g\vartheta} / R_{g\vartheta_1}] [1 + f_\vartheta (x)] / [1 + f_{\vartheta_1} (x)]$$

Die auf verschiedene Temperaturen bezogenen Gleichstromwiderstände verhalten sich wie die jeweiligen spezifischen Widerstände. Dagegen verhalten sich die relativen Zusatzwiderstände bzw. Zusatzverluste nach Tabelle II bei verschiedenen Temperaturen im wesentlichen wie die vierten Potenzen der jeweiligen Wellenzahlen, d. h. umgekehrt proportional dem Quadrat der jeweiligen spezifischen Widerstände. Drückt man noch den Widerstandszuwachs durch die Temperatur und den Temperaturkoeffizient aus, so erhält man angenähert:

$$R_{w\vartheta} / R_{w\vartheta_1} = [(1 + \alpha\,\vartheta)/(1 + \alpha\,\vartheta_1)]$$
$$\cdot [1 + f_{\vartheta_1} (x)\,(1 + \alpha\,\vartheta_1)^2 / (1 + \alpha\,\vartheta)^2] / (1 + f_{\vartheta_1} (x))$$

Beispiel:

$$\alpha_{Cu} = 1/235\ °C^{-1};\ \vartheta_1 = 20°;\ \vartheta = 55°;\ f_{20}(x) = 0{,}15$$

$$\frac{R_g\,\vartheta}{R_g\,\vartheta_1} = \frac{1 + \alpha\,\vartheta}{1 + \alpha\,\vartheta_1} = \frac{1 + 55/235}{1 + 20/235} = 1{,}137$$

$$\frac{f_{55}(x)}{f_{20}(x)} \approx \left(\frac{1 + \alpha\,\vartheta_1}{1 + \alpha\,\vartheta}\right)^2 = \frac{1}{(1{,}137)^2} = 0{,}775$$

$$\frac{R_{w,\,55}}{R_{w,\,20}} = 1{,}137\,(1 + 0{,}775 \cdot 0{,}15)/(1 + 0{,}15) = 1{,}105$$

Bei Steigerung der Temperatur von 20° auf 55 °C nehmen also die Gleichstromverluste um etwa 14% zu, die Zusatzverluste dagegen um ungefähr 23% ab, was im gewählten Beispiel einem Zuwachs der Gesamtverluste um etwa 11% entspricht.

Literatur

Zeitschriftenaufsätze

[1] *Mie, G.:* Elektrische Wellen an zwei parallelen Drähten. Ann. Phys. Bd. 4(1900), S. 201.

[2] *Curtis, H. L.:* An Integration Method of Deriving Alternating Current Resistance and Inductance of Conductors. Scientific Paper of the Bureau of Standards, Nr. 374, Washington 1920 und Phys. Rev. Bd. 15(1920), S. 528.

[3] *Capdeville, P.:* Câbles unipolaires sous enveloppe de plomb. Rev. gén. Electr. Bd. 6(1920), S. 177.

[4] *Carson, J. R.:* Wave Propagation over parallel Wires, the Proximity Effect. Philosophical Magazine Bd. 41(1921), VI.

[5] *Curtis, H. L.:* The Resistance and Inductance of a Three-Phase Cable. Phys. Rev. Bd. 18(1921), S. 156.

[6] *Manneback, Ch.:* An Integral Equation for Skin Effect in Parallel Conductors. J. Math. Phys. Bd. 1(1922), S. 123.

[7] *Dwight, H. B.:* Proximity Effect in Wires and Thin Tubes. J. Amer. Inst. Electr. Engr". Bd. 42(1923), S. 961.

[8] *Dwight, H. B.:* Losses in Grounded Sheaths of Single-Conductor Cables. Electr. J. Bd. –(1924), S. 62.

[9] *Carter, F. W.:* Eddy Currents in Thin Circular Cylinders of Uniform Conductivity, due to periodically changing Magnetic Fields, in two dimensions. Proc. Camb. phil. Soc. Bd. 23(1927), S. 901.

[10] *Vogel, W.:* Magnetische Messungen an Einleiter-Hochspannungskabeln. Elektrotechn. Z. Bd. 48(1927), S. 1361.

[11] *Carson, J. R.:* The vigorous and approximate Theories of electrical Transmission along Wires. Bell Syst. tech. J. Bd. 7(1928).

[12] *Carter, F. W.:* Note on Losses in Cable Sheaths. Proc. Camb. phil. Soc. Bd. 24(1928), S. 65.

[13] *Riley, T. N.:* Mantelverluste in Einleiterkabeln bei Drehstromübertragung. Electr. Commun. Bd. 7(1928), S. 220.

[14] *Arnold, A. H. M.:* The Theory of Sheath Losses in Single-Conductor Lead-covered Cables. J. Instn. Electr. Engr". Bd. 67(1929), S. 69.

[15] *Arnold, A. H. M.:* The Impedances of a Three-Phase-Line of Single-Conductor Lead-covered-Cables arranged in a plane, with the Middle Cable equidistant from the Two Outer Cables. J. Instn. Electr. Engr". Bd. 67(1929), S. 90.

[16] *Cramp, W., und G. M. Harvey:* Note on Sheat Losses in Single-Core, Single-Phase Cables. J. Instn. Electr. Engr". Bd. 67(1929), S. 335.

[17] *Brockbank, R. A., und J. K. Webb:* Sheat and Armour Losses in Single-Core Cables for Single-Phase and Three-Phase Transmission. J. Instn. Electr. Engr". Bd. 67(1929) S. 337.

[18] *Wedmore, E. B., P. D. Morgan, und S. Whitehead:* A Critical Study of Three-Phase System of Unarmoured Single-Conductor Cables, from the Standpoint of the Power Losses, Line Constants and Interference with Communication Circuits. J. Instn. Electr. Engr". Bd. 67(1929), S. 359.

[19] *Bosone, L.:* Contributo allo studio delle perdite e dell'autoinduzione dei cavi unipolari armati con fili di ferro. Elettrotecnica Bd. 19(1931), S. 2.

[20] *Bosone, L.:* Contribution à l'étude des pertes et de la self-inductance des câbles unipolaires armés avec fil de fer. Rev. gén. Electr. Bd. 30(1931), S. 133.

[21] *Dwight, H. B.:* Proximity Effect in Cable Sheats. Trans". Amer. Inst. Electr. Engr". Bd. 50(1931), S. 993.

[22] *Arnold, A. H. M.:* The Alternating-Current Resistance of Parallel Conductors of Circular Cross-Section. J. Instn. Electr. Engr". Bd. 77(1935), S. 49.

[23] *Arnold, A. H. M.:* The Alternating-Current Resistance of Tubular Conductors. J. Instn. Electr. Engr". Bd. 78(1936), S. 580; Bd. 79(1937), S. 595.

[24] *Tschiassny, L.:* Les problèmes magnétiques des conducteurs parallèles, spécialement des câbles à courant fort. CIGRE 1937, Bericht 217.

[25] *Kaden, H.:* Die Leitungskonstanten symmetrischer Fernmeldekabel. Europ. Fernsprechdienst Bd. 52(1939), S. 174.

[26] *Arnold, A. H. M.:* Eddy current Losses in multicore paper insulated, lead-covered cables, armoured and unarmoured carrying balanced Three-Phase Currents. J. Instn. Electr. Engr". Bd. 88(1941), S. 52.

[27] *Buchholz, H.:* Elektrische Strömungsfelder mit Schraubenstruktur. Elektr. Nachr.-Technik Bd. 14(1937), S. 264.

[28] *Buchholz, H.:* Die hochfrequente Wirbelströmung im kreiszylindrischen Schirmleiter verdrillter Leiterpaare. Arch. Elektrotechn. 31(1937), S. 507.

[29] *Jacottet, P.:* Elektromagnetische Wirbelfelder mit Schraubengestalt. Arch. Elektrotechn. 39(1948), S. 8.

[30] *Jacottet, P.:* Die Wirbelströmung in leitenden Kabelmänteln. Arch. elektr. Übertr. 2(1948), S. 218.

Lehrbücher und Tafelwerke

[31] *Watson, G. N.:* A Treatise on the Theory of Bessel Function. Cambridge: University-Press 1922.

[32] *Tölke, F.:* Besselsche und Hankelsche Zylinderfunktionen nullter bis dritter Ordnung vom Argument $r\sqrt{j}$ Stuttgart: K. Wittwer 1936.

[33] *Küpfmüller, K.:* Einführung in die theoretische Elektrotechnik. Berlin: Springer 1941.

[34] *Stratton, J. A.:* Electromagnetic Theory. New York und London: McGraw-Hill 1941.

[35] *Jahnke-Emde:* Tafeln höherer Funktionen. Leipzig: Teubner 1948.

[36] *Sommerfeld, Arnold:* Elektrodynamik. Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 3. Wiesbaden: Dieterichsche Verlagsbuchhandlung 1948.

[37] *Kaden, H.:* Die elektromagnetische Schirmung in der Fernmelde- und Hochfrequenztechnik. Berlin, Göttingen und Heidelberg: Springer 1950. München: J. F. Bergmann 1950.

Adresse des Autors:

Dr.-Ing. *P. Jacottet*, Schlosserstrasse 3, Heidelberg, Deutschland.