Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 41 (1950)

Heft: 17

Artikel: Probleme und Methoden der nichtlinearen Mechanik

Autor: Schaffner, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1061269

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$\frac{\mathfrak{J}[U(\mathfrak{S},\mathrm{CGSs})]}{\mathfrak{J}[U(\mathfrak{S},\mathrm{CGSm})]} = \frac{1}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}}$$

und

$$\frac{\mathfrak{J}[H'(\mathfrak{S})]}{\mathfrak{J}[H(\mathfrak{S})]} = 4\,\pi$$

Also nicht nur dimensionell, sondern auch quantitativ sind die Lichtgeschwindigkeit und die Einheitskugel als Ganzheiten (Naturkonstante, Gestaltfaktor) im $\mathfrak{J}$-Faktor konserviert, aber in einer Form, die nur bei System*wechsel* quantitativen Ausdruck findet.

Diese Bemerkungen haben ihren Zweck erfüllt, wenn sie im einen oder anderen die Überzeugung wecken, dass ein Formalismus, der sich auf eine synthetische und eine praktische Abart des zunächst nicht scharf umrissenen Grössenbegriffes stützt, in mancherlei Hinsicht klärend und ordnend wirken kann.

Literatur

[1] *König, H., M. Krondl* und *M. Landolt:* Zur Einführung des Giorgi-Systems. Bull. SEV Bd. 40 (1949), Nr. 15, S. 462...474.

[2] *Landolt, M.:* Zur Theorie der Dimensionen der physikalischen Grössen. Bull. SEV Bd. 41 (1950), Nr. 12, S. 473...479.

[3] Zum Thema *Rationalisierung:*

Stille, U.: Rationale und nichtrationale Behandlung des elektromagnetischen Feldes. Abhandl. der Braunschweigischen Wissenschaftl. Gesellschaft I, 1949, Nr. 1, S. 38...55.

Stille, U.: Drei-, Vier- und Fünf-Grundgrössen-Gleichungen in der Elektrodynamik. Abhandl. der Braunschweigischen Wissenschaftl. Gesellschaft I, 1949, Nr. 1, S. 56...75.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. *H. König,* Vizedirektor des Eidg. Amtes für Mass und Gewicht, Gossetstrasse 22, Wabern (BE).

Probleme und Methoden der nichtlinearen Mechanik

Von *Hans Schaffner,* Urbana, Ill., USA

534.01 : 538.56

Manche Probleme der Schwingungserzeugung können mit den gewöhnlichen linearen Methoden der Elektrotechnik nicht gelöst werden. Mathematisch führen diese Probleme auf nichtlineare Differentialgleichungen. Die Methoden zu ihrer Bearbeitung sind in der «nichtlinearen Mechanik» zusammengefasst. Im folgenden wird eine dieser Methoden, die sich besonders gut für den Elektroingenieur eignet, an einem einfachen Beispiel erläutert.

Maints problèmes relatifs aux oscillations ne peuvent pas être résolus par les méthodes linéaires utilisées d'ordinaire en électrotechnique, car ils conduisent à des équations différentielles non linéaires. Considérant un cas simple, à titre d'exemple, l'auteur expose l'une des méthodes de mécanique ondulatoire, qui convient particulièrement aux ingénieurs électriciens.

1. Allgemeines

Die nichtlineare Mechanik und insbesondere ihre Anwendung auf die Elektrotechnik ist noch sehr jung. Besonders in den letzten 15 Jahren wurden aber eine grosse Anzahl Arbeiten veröffentlicht, die Probleme der Schwingungserzeugung auf nichtlinearer Grundlage behandeln. Leider ist der Grossteil dieser Arbeiten sehr mathematisch und abstrakt gehalten, oder dann beschränken sich diese auf rein qualitative Beschreibungen. Manche bedeutende Arbeiten sind zudem in russischen Zeitschriften veröffentlicht worden und sind darum nur schwer zugänglich.

Erst vor kurzem ist es gelungen, die nichtlineare Mechanik von einem komplizierten mathematischen Apparat zu befreien und so zu vereinfachen, dass ein durchschnittlicher Ingenieur sie verstehen und anwenden kann. Besonders erwähnenswert sind in dieser Hinsicht die Arbeiten der beiden russischen Physiker *Kryloff* und *Bogoliuboff* und ihre Theorie der «gleichwertigen Linearisierung» (equivalent linearisation) [2][1]). Für den Elektroingenieur ist diese Theorie besonders wertvoll, da sie sehr anschaulich ist und die nichtlinearen Probleme auf einfache Weise auf bereits bekannte lineare zurückführt.

Im folgenden sollen zur Einführung drei Probleme der nichtlinearen Mechanik erwähnt werden. Diese können mit den klassischen linearen Methoden nicht quantitativ gelöst werden.

a) Der Dynatron-Oszillator

Fig. 1 zeigt das bekannte Schema eines Dynatron-Oszillators. Infolge der Sekundäremission weist die statische Anodenstrom-Anodenspannungs-Charakteristik des Dynatrons bei konstanter Schirmgitterspannung die in Fig. 2 gezeigte Form auf. Wenn die Anode gegenüber dem Schirmgitter negativ ist und jedes auf die Anode auftreffende Elektron mehrere Sekundärelektronen auslöst, kann sich die Richtung des Anodenstroms umkehren. Der fallende Teil der Kennlinie kann nun zur Erzeugung von Schwingungen benutzt werden. Es erhebt sich nun die Frage nach den Amplituden der möglichen Schwingungen des Dynatron-Oszillators. Eine Lösung auf linearer Grundlage ist nicht möglich. Die erste analytische Methode zur Lösung wurde 1921 von *B. Van der Pol* veröffentlicht [4]. Neben den analytischen Methoden existieren aber auch graphische.

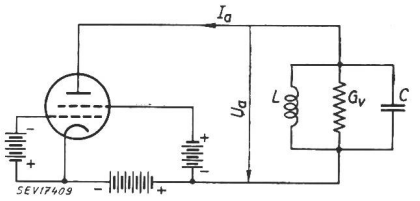

Fig. 1
Schema des Dynatron-Oszillators

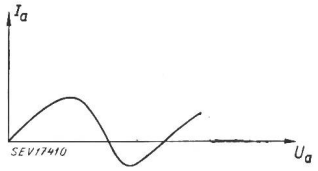

Fig. 2
Die Anodenstrom-Anodenspannungs-Charakteristik des Dynatrons

[1]) siehe Literaturverzeichnis am Schluss.

Im folgenden wird für den «nichtlinearen Widerstand», das heisst für alle links vom Schwingkreis liegenden Teile des Oszillators der Fig. 1, das Symbol —NL— eingeführt. Die Fig. 4 zeigt die

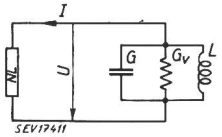

Fig. 3
Vereinfachter Dynatron-Oszillator
—NL— nichtlineares Element

Kennlinie eines solchen nichtlinearen Widerstandes. Fig. 3 zeigt den Dynatron-Oszillator unter Verwendung dieses Symbols. Die Kennlinie der Fig. 4 lässt sich z. B. in eine Potenzreihe entwickeln:

$$I = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda U^\lambda \tag{1}$$

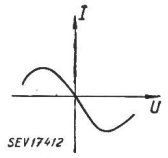

Fig. 4
Kennlinie eines nichtlinearen Widerstandes

Beliebige Oszillatoren mit nur einem Schwingkreis können auf die in Fig. 3 gezeigte Form zurückgeführt werden.

b) Die gleichzeitige Erzeugung mehrerer Schwingungen [5, 6]

Unter bestimmten Umständen kann ein Oszillator mit zwei oder mehreren Schwingkreisen, die auf verschiedene Frequenzen abgestimmt sind, gleichzeitig verschiedene Frequenzen erzeugen (Fig. 5). Diese

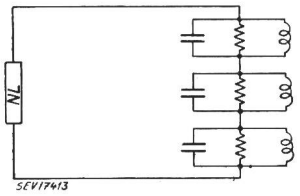

Fig. 5
Oszillator mit mehreren Schwingkreisen

gleichzeitigen Schwingungen treten besonders bei Generatoren für sehr hohe Frequenzen auf (Reflexklystron) und sind dort sehr unerwünscht. Es stellt sich nun folgendes Problem: Welches sind die Bedingungen dafür, dass ein Oszillator auf zwei oder mehreren Frequenzen gleichzeitig schwingt, und welches sind die Amplituden dieser Schwingungen? Die Lösung wurde erst in neuester Zeit gefunden. Es ist interessant, festzustellen, dass der Grossteil der Lehrbücher die Möglichkeit der gleichzeitigen Schwingungen überhaupt verneint.

c) Synchronisation eines Oszillators durch eine äussere Wechselspannung [7, 8]

In einer Schaltung, wie sie in Fig. 6 gezeigt wird, kann experimentell beobachtet werden, dass die Frequenz der freien Schwingungen die Tendenz hat, einen Wert

$$\omega = \frac{p}{q}\,\omega_s \tag{2}$$

anzunehmen, wobei ω_s die Frequenz der äusseren Wechselspannung ist und p und q ganze Zahlen sind. Dieses Verhältnis bleibt auch bei einer kleinen Änderung von ω_s bestehen. Die maximale Änderung von ω_s, bei der dieses Verhältnis erhalten bleibt, nennt man die «Synchronisations-Bandbreite». Das

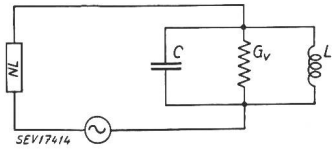

Fig. 6
Schwingkreis mit äusserer Wechselspannung

nichtlineare Problem lautet nun: Berechne die Synchronisations-Bandbreite für einen bestimmten nichtlinearen Widerstand und bestimmte Werte von p und q.

Mathematisch führt dieses Problem wie die vorhergehenden auf nichtlineare Differentialgleichungen, so zum Beispiel der Dynatron-Oszillator auf die sogenannte «Van der Polsche Gleichung»:

$$\ddot{x} + \varepsilon\,(1 + \alpha x + \beta x^2 + \ldots)\,\dot{x} + x = 0 \tag{3}$$

Nichtlineare Differentialgleichungen sind aber sehr schwierig zu behandeln, und nur in Ausnahmefällen ist es möglich, die Lösung in geschlossener Form darzustellen. Meist gibt man sich denn auch mit einer guten Näherungslösung zufrieden.

Von allen Lösungen einer nichtlinearen Differentialgleichung sind die periodischen besonders wichtig. Ist T die Periodendauer, dann gilt für die periodischen Lösungen $F(t)$:

$$F(t) = F(t + T) \tag{4}$$

Die periodischen Lösungen entsprechen den möglichen Schwingzuständen eines Oszillators, wobei dann allerdings noch die Prüfung nötig ist, ob diese Zustände auch stabil sind, d. h. ob sich nach einer kleinen Störung der ursprüngliche Betriebszustand wieder einstellt.

Diese drei Beispiele zeigen, dass sich die nichtlineare Mechanik hauptsächlich mit Schwingvorgängen beschäftigt, bei denen nichtlineare Elemente beteiligt sind. Diese Nichtlinearität kann somit ebensogut in der Induktivität (Eisenkern) enthalten sein als im Widerstand.

2. Historisches

Die nichtlineare Mechanik hat sich in drei Etappen entwickelt. Der hauptsächlichste Vertreter der ersten Etappe war der französische Physiker und Mathematiker *Henri Poincaré* (1854...1912), der nichtlineare Probleme der Astronomie behandelte. Seine Arbeiten sind grundlegend, aber seine Methoden lassen sich leider nur auf Vorgänge anwenden, die sich relativ langsam abspielen; sie versagen bei den hohen Frequenzen der Elektrotechnik. Die zweite Etappe dauerte von 1921...1930, ihr Hauptvertreter war *Balthasar Van der Pol*. In ihr wurden mit relativ einfachen mathematischen Mitteln Probleme, ähnlich den in unsern drei Beispielen gezeigten, behandelt und oft erfolgreich gelöst. In der dritten Etappe (1932...1940) versuchten einige Russen, besonders *L. Mandelstam* und *N. Papalexi*, mit grossem mathematischem Aufwand tiefer in die

Probleme einzudringen, wobei sie denn auch einige sehr interessante Entdeckungen machten.

In neuester Zeit ist das Schwergewicht der Entwicklung nach Amerika gerückt. An mehreren amerikanischen Universitäten werden Vorlesungen über nichtlineare Schwingungsprobleme speziell für Elektroingenieure gehalten. Es fällt jedoch bei der Durchsicht der Literatur auf, dass relativ nur sehr wenig Experimente gemacht wurden, und dass bis heute eine sorgfältige experimentelle Untermauerung der theoretischen Ergebnisse fehlt. Den heutigen Zustand der nichtlinearen Mechanik kann man als eine «Sammlung von Näherungsmethoden» charakterisieren. So kann die oben angeführte Van der Polsche Gleichung (3) in guter Näherung gelöst werden, wenn der Parameter ε entweder sehr klein oder sehr gross ist. Wenn man ε als sehr klein annimmt, erhält man eine annähernd sinusförmige Schwingung, für ein grosses ε eine Kippschwingung (Fig. 7).

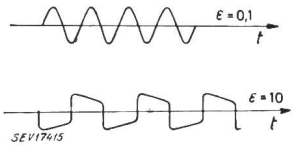

Fig. 7
Periodische Lösungen der Van der Polschen Gleichung

Sinusförmige Schwingungen und Kippschwingungen können somit auf die gleiche Differentialgleichung zurückgeführt werden. Im folgenden werden ausschliesslich annähernd sinusförmige Schwingungen behandelt (ε klein). Insbesondere soll das Beispiel *a)*, der Dynatron-Oszillator, berechnet werden; dazu soll aber die schon erwähnte Methode der gleichwertigen Linearisierung von *N. Kryloff* und *N. Bogoliuboff* benützt werden [2]. Aus diesem Beispiel werden die Grundgedanken der Methode sogleich klar.

3. Der Dynatron-Oszillator

In Fig. 3 bedeutet -NL- das nichtlineare Element. Der Schwingkreis besteht aus der Induktivität L, der Kapazität C und dem Leitwert G_v, wobei die Verluste in G_v zusammengefasst seien. Wie schon oben bemerkt, kann der Zusammenhang zwischen den Momentanwerten von Strom I und Spannung U durch die Potenzreihe Gl. (1) dargestellt werden. Wenn der Gütefaktor Q des Schwingkreises nun nicht zu klein ist, so ist die Spannung U annähernd sinusförmig. Man kann deshalb die Annahme

$$U = \hat{u} \cos \omega_0 t \tag{5}$$

machen, wobei ω_0 die Eigenfrequenz des Resonanzkreises ist.

Gleichgewicht herrscht nun, wenn die von aussen her durch das nichtlineare Element an den Schwingkreis gelieferte mittlere Leistung gleich der mittleren im Schwingkreis verbrauchten Leistung ist. Diese ist bekanntlich:

$$P_v = \frac{\hat{u}^2}{2} G_v \tag{6}$$

Die mittlere an den Schwingkreis abgegebene Leistung ist:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i\, u \cdot \mathrm{d}(\omega_0 t) = \frac{\hat{u}}{2\pi} \int_0^{2\pi} i \cos \omega_0 t \cdot \mathrm{d}(\omega_0 t) \tag{7}$$

P hängt in komplizierter Weise von $\hat{u}$ ab. Dabei soll das Vorzeichen von P so festgelegt werden, dass einem negativen P eine an den Schwingkreis abgegebene Leistung entspricht. Die Bedingung für Gleichgewicht ist somit:

$$P + P_v = 0 \tag{8}$$

Die Abhängigkeit der Funktion $(P + P_v)$ von der Schwingungsamplitude $\hat{u}$ kann graphisch dargestellt werden und ergebe z. B. den in Fig. 8 gezeichneten Verlauf. Alle Werte der Schwingungsamplitude $\hat{u}$, für die $(P + P_v) = 0$, d. h. für die im nichtlinearen Element gleichviel mittlere Leistung erzeugt wird, wie der Schwingkreis verbraucht, entsprechen Gleichgewichtszuständen. Diese Werte werden nachstehend mit $\hat{u}_0$ bezeichnet. Es wird später noch nötig sein, zu kontrollieren, ob diese Gleichgewichtszustände stabil oder labil sind. Dabei werden sich im Betrieb die stabilen Zustände von selbst einstellen.

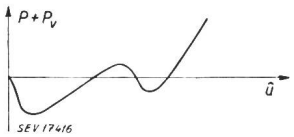

Fig. 8
Der Leistungsüberschuss des Dynatron-Oszillators als Funktion der Spannungsamplitude $\hat{u}$

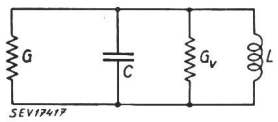

Fig. 9
Der linearisierte Dynatron-Oszillator
G linearisierter Leitwert

Man führt nun den «linearisierten Leitwert» G ein. Dieser entspricht einem gewöhnlichen linearen Leitwert, der die gleiche mittlere Leistung an den Schwingkreis abgeben würde wie der nichtlineare Widerstand. Die gleiche Konvention wie für P gilt auch für das Vorzeichen von G; wenn Leistung abgegeben wird, ist G negativ. Es gilt:

$$G = \frac{2P}{\hat{u}^2} = \frac{1}{\hat{u}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i \cos \omega_0 t \cdot \mathrm{d}(\omega_0 t) \tag{9}$$

Mit Hilfe dieses linearisierten Leitwertes kann das Schaltbild der Fig. 3 auf dasjenige der Fig. 9 reduziert werden.

Für die Gleichgewichtslage gilt (8):

$$P + P_v = G \frac{\hat{u}^2}{2} + G_v \frac{\hat{u}^2}{2} = (G + G_v) \frac{\hat{u}^2}{2} = 0 \tag{10}$$

oder für den nichttrivialen Fall $\hat{u} \neq 0$:

$$G + G_v = 0 \tag{11}$$

Die Leitwerte G und G_v heben sich somit gegenseitig auf und der Schwingkreis verhält sich so, wie wenn er nur aus der Induktivität L und der Kapazität C bestehen würde.

G kann mit Hilfe der Formel (9) aus Gl. (1) berechnet werden. Für die Potenzreihenentwicklung gilt z. B.:

$$G = a_1 + \frac{3}{4} a_3 \hat{u}^2 + \frac{5}{8} a_5 \hat{u}^4 + \ldots \qquad (12)$$

Die Gleichgewichtsbedingung ist somit:

$$G_v + a_1 + \frac{3}{4} a_3 \hat{u}^2 + \frac{5}{8} a_5 \hat{u}^4 + \ldots = 0 \qquad (13)$$

d. h. die möglichen Schwingungsamplituden sind Lösungen der Gleichung (13). Wenn die Gleichgewichtslage des Systems stabil ist, wird die Schwingungsamplitude automatisch einen Wert annehmen, der die Gleichung (13) befriedigt.

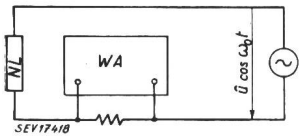

Fig. 10
Schaltbild zur Messung des linearisierten Leitwertes G
WA Wellenanalysator

Für einen gegebenen nichtlinearen Widerstand kann der linearisierte Leitwert auch auf einfache Weise gemessen werden (Fig. 10). Wenn I_0 die Komponente des Stromes I mit der Frequenz ω_0 ist, dann gilt für G:

$$G = \frac{I_0}{\hat{u}} \qquad (14)$$

Dies geht aus der Gleichung (9) hervor, denn

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i \cos \omega_0 t \cdot \mathrm{d}(\omega_0 t) = I_0 \qquad (15)$$

ist ja nach Fourier gerade die Komponente mit der Frequenz ω_0. Es ist also nur mit dem Wellen-Analysator der Anteil I_0 zu messen und durch den Scheitelwert der Spannung zu dividieren.

4. Stabilität

Wie erwähnt, sind nun nicht alle diese Gleichgewichtslagen stabil. Um zu prüfen, ob eine Gleichgewichtslage stabil oder unstabil ist, verfährt man ähnlich wie in der klassischen Mechanik: man stört das System; kehrt es nun in seine ursprüngliche Lage zurück, nennt man es stabil, sonst unstabil. So wird der in Fig. 11a gezeigte Körper nach einer

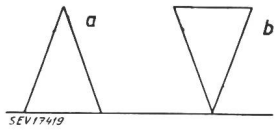

Fig. 11
Stabile (a) und unstabile (b) Gleichgewichtslage

kleinen Störung in seine ursprüngliche Lage zurückkehren, nicht aber jener in Fig. 11b. Die Gleichgewichtslage der Fig. 11a ist somit stabil, die der Fig. 11b unstabil.

Im Falle des Dynatron-Oszillators stört man das Gleichgewicht, indem man die der Gleichgewichtslage entsprechende Spannungsamplitude $\hat{u}_0$ um den kleinen Betrag $\delta\hat{u}$ vergrössert; $\hat{u}$ hat dann den Wert $\hat{u} = \hat{u}_0 + \delta\hat{u}$. Für diesen Wert ist nun das System nicht mehr im Gleichgewicht. Vorerst stellen wir fest, dass die gesamte im Schwingkreis aufgespeicherte Energie von $\frac{C}{2} \hat{u}_0^2$ auf $\frac{C}{2} (\hat{u}_0 + \delta\hat{u})^2$ angewachsen ist. Damit sich der ursprüngliche Zustand wieder einstellt, muss diese Energie wieder abnehmen, d. h. es muss mehr Leistung im Schwingkreis verbraucht werden, als das nichtlineare Element erzeugt. Die Summe $(P + P_v)$ muss also positiv werden. Die in Fig. 12 gezeigte Gleichgewichtslage ist nach dieser Bedingung stabil.

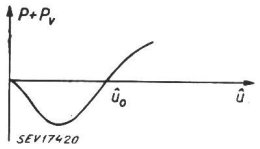

Fig. 12
Stabile Gleichgewichtslage $\hat{u}_0$

Eine Gleichgewichtslage ist also stabil, wenn:

$$\frac{\mathrm{d}(P + P_v)}{\mathrm{d}U} > 0$$

Aus Fig. 8 kann man erkennen, dass stabile und unstabile Gleichgewichtslagen abwechseln.

Im folgenden sollen diese Überlegungen noch etwas präzisiert werden. Dies ist besonders deshalb notwendig, weil in komplizierteren Fällen, wie etwa bei der Behandlung gleichzeitiger Schwingungen, qualitative Überlegungen der obigen Art zur Lösung nicht genügen. Diese sollen deshalb nachstehend mathematisch formuliert werden.

Die erste Ableitung der im Schwingkreis aufgespeicherten Energie nach der Zeit ist gleich der Differenz der von aussen her dem Schwingkreis zugeführten und der im Schwingkreis selbst verbrauchten mittleren Leistung. Also gilt, unter Berücksichtigung des Vorzeichens:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{C}{2} \hat{u}^2 = -(P + P_v) \qquad (16)$$

In der Umgebung eines Gleichgewichtspunktes $(\hat{u} = \hat{u}_0 + \delta\hat{u})$ kann man die rechte Seite der Gleichung (16) in eine Taylorsche Reihe entwickeln:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{C}{2} (\hat{u}_0 + \delta\hat{u})^2 = -(P + P_v)_{\hat{u}=\hat{u}_0} - \delta\hat{u} \left[\frac{\mathrm{d}(P + P_v)}{\mathrm{d}\hat{u}}\right]_{\hat{u}=\hat{u}_0} - \ldots \qquad (17)$$

Für $\hat{u} = \hat{u}_0$ ist $(P + P_v) = 0$. Im folgenden soll $\hat{u}_0$ als eine Konstante und $\delta\hat{u}$ als eine Variable betrachtet werden. Für stabiles Gleichgewicht ist es notwendig, dass sich $\hat{u}$ dem Werte $\hat{u}_0$ nähert, dass also $\delta\hat{u}$ mit zunehmender Zeit kleiner wird. Vernachlässigt man alle höheren Potenzen von $\delta\hat{u}$, so erhält man die lineare Differentialgleichung:

$$C \hat{u}_0 \frac{\mathrm{d}\,\delta\hat{u}}{\mathrm{d}t} = -\delta\hat{u} \frac{\mathrm{d}(P + P_v)}{\mathrm{d}\hat{u}} \qquad (18)$$

Die Lösung der Gleichung (18) ist:

$$\delta\hat{u} = A\,e^{\mu t}, \text{ wobei } \mu = -\frac{1}{C\hat{u}_0}\,\frac{d(P+P_v)}{d\hat{u}} \qquad (19)$$

Wenn $\delta\hat{u}$ mit zunehmender Zeit kleiner werden soll, muss μ negativ sein. Damit erhält man als Bedingung für Stabilität einer Gleichgewichtslage wieder:

$$\frac{d(P+P_v)}{d\hat{u}} > 0 \qquad (20)$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, gilt für den Fall $\hat{u} \neq 0$ auch die Bedingung:

$$\frac{d\,(G+G_v)}{d\hat{u}} = \frac{dG}{d\,\hat{u}} > 0 \qquad (21)$$

Wir hoffen, mit diesem einfachen Beispiel die Methoden der gleichwertigen Linearisierung genügend klargemacht zu haben. Mit ähnlichen Überlegungen und etwas grösserem Aufwand können auch die in den Beispielen *b)* und *c)* erwähnten Probleme der gleichzeitigen Schwingungen und der Synchronisation behandelt werden.

Literatur

Lehrbücher

[1] *Minorsky, N.:* Non-Linear Mechanics. Ann Arbor, Edwards, 1947.

[2] *Kryloff, N.* and *N. Bogoliuboff:* Introduction to Non-Linear Mechanics. Princeton, University Press, 1947.

[3] *Andronow, A.* and *C. Chaikin:* Theory of Oscillations. Princeton, University Press, 1949.

Zeitschriften

[4] *Appleton, E. V.* and *B. Van der Pol:* On a Type of Oscillation Hysteresis in a Simple Triode Generator. Philos. Mag. Bd. 42 (1921).

[5] *Van der Pol, B.:* An Oscillation Hysteresis in a Triode Generator with two Degrees of Freedom. Philos. Mag. Bd. 43 (1922), S. 700.

[6] *Huggins, W. H.:* Multifrequency Bunching in Reflex Klystrons. Proc". Inst. Radio Engr". Bd. 36 (1948), S. 624.

[7] *Van der Pol, B.:* The Non-Linear Theory of Electrical Oscillations. Proc". Inst. Radio Engr". Bd. 22 (1934).

[8] *Cartwright, M. L.:* Forced Oscillations in Nearly Sinusoidal Systems. J. Instn. Electr. Engr"., Part III, Bd. 95 (1948), Nr. 34, S. 88...96.

Adresse des Autors:

Dr. *Hans Schaffner*, dipl. Ing., University of Illinois, Dept. of Electrical Engineering, Urbana, Ill., USA.

Über zusätzliche Verluste beim Parallelbetrieb von Leitungen

Von *F. Schär*, Olten

621.3.017.29:621.315.016.32

Am Beispiel je einer durch einen Transformator parallel geschalteten 150-kV- und 50-kV-Leitung wird gezeigt, wie sich das Minimum der zusätzlichen Verluste leicht berechnen lässt, und es wird das Ergebnis diskutiert.

L'auteur montre, à l'aide de l'exemple de deux lignes à 150 et 40 kV couplées en parallèle par un transformateur, qu'il est facile de calculer le minimum des pertes additionnelles. Il procède ensuite à la discussion des résultats.

Die heutigen Anforderungen an die Elektrizitätsversorgungsunternehmen bedingen oft, insbesondere im Hinblick auf die Betriebssicherheit, dass grössere Netzteile als Maschennetze betrieben werden müssen. Dabei kann es vorkommen, dass Leitungen von verschiedener Nennspannung an beiden Leitungsenden über Transformatoren parallel geschaltet sind und derselben Energieübertragung dienen.

Je nach der Belastung der Knotenpunkte und, wenn die Transformatoren mit Stufenschaltern ausgerüstet sind, je nach deren Einstellung, verteilt sich die Last auf die beiden Leitungen. Mit Rücksicht auf die Übertragungsverluste ist es jedoch nicht gleichgültig, wie sich der Strom auf die beiden Pfade verteilt. Die Verhältnisse lassen sich am besten an Hand eines Beispiels etwa nach Fig. 1 überblicken.

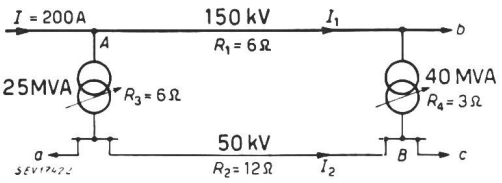

Fig. 1

Teil eines vermaschten Netzes

Energietransport von *A* nach *B*

R_1, R_2 Ohmsche Widerstände der Übertragungsleitungen
R_3, R_4 auf die 150-kV-Seite bezogene Ohmsche Widerstände der Transformatoren

Die im Knotenpunkt *A* zufliessende Energie (U = 150 kV, I = 200 A) sei nach dem Knotenpunkt *B* zu übertragen, wobei der Einfachheit halber die Belastungen durch die Zweige *a* und *b* unberücksichtigt bleiben sollen.

Die günstigste Verteilung des Stromes von 200 A auf die beiden Leitungen ist offenbar dann vorhanden, wenn die Übertragungsverluste ein Minimum sind. Die totalen Verluste zwischen den beiden Knotenpunkten *A* und *B* betragen, wenn man von den Eisenverlusten der Transformatoren, der Ableitung und den Koronaverlusten absieht:

$$P_{vt} = P_{v1} + P_{v2} = 3\,[I_1^2\,(R_1 + R_4) + I_2^2\,(R_2 + R_3')] \qquad (1)$$

In dieser Gleichung bedeuten:

P_{vt} die totalen Leitungsverluste,

P_{v1} die Verluste über den 150-kV-Strang einschliesslich Kupferverluste im Transformator,

P_{v2} die Verluste über den 50-kV-Strang einschliesslich Kupferverluste im Transformator,

R_3' den auf die 50-kV-Seite bezogenen Ohmschen Widerstand des 25-MVA-Transformators.

Die Bedeutung der übrigen Symbole geht aus Fig. 1 hervor.

Drückt man noch den Strom I_2 durch I_1 aus, wobei die Transformatorübersetzung an beiden Transformatoren der Einfachheit halber gleich an-