Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 41 (1950)

Heft: 12

Artikel: Zur Theorie der Dimension der physikalischen Grössen

Autor: Landolt, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1061253

41. Jahrgang Nr. 12 Samstag, 10. Juni 1950

BULLETIN

DES SCHWEIZERISCHEN ELEKTROTECHNISCHEN VEREINS

Zur Theorie der Dimension der physikalischen Grössen

Von *M. Landolt*, Winterthur

53.081.5

Der Autor untersucht verschiedene Definitionen des Begriffs der Dimension. Da sich diese nicht decken, und da sie nicht alle den gegenwärtigen Anforderungen genügen, schlägt er eine neue Variante vor. Diese beruht auf dem Grössenkalkül, setzt aber die Ideen Fouriers fort und übernimmt die Auffassung von Helmholtz. Die neue Definitionsvariante gestattet eine bequeme Handhabung der Dimensionen mit mathematischen Mitteln. Zum Schluss nimmt der Autor Stellung gegen die Vorschläge, die darauf abzielen, den Winkeln und axialen Grössen eine besondere Dimension zuzuschreiben.

L'auteur passe en revue diverses définitions de la notion de dimension. Vu qu'elles diffèrent entre elles et qu'elles ne répondent pas toutes aux besoins actuels, il avance une nouvelle variante qui, en continuant les idées de Fourier et en s'inspirant des conceptions de Helmholtz, se base sur le calcul aux grandeurs. La nouvelle variante de définition permet de manier facilement les dimensions par des moyens mathématiques. Enfin, l'auteur prend position contre des propositions visant d'attribuer une dimension spéciale aux angles et grandeurs axiales.

1. Vom Ursprung des Begriffs der Dimension einer physikalischen Grösse

Die beiden verwandten Begriffe *Dimension* und *Dimensionsexponent* hat der französische Mathematiker *Jean-Baptiste Joseph Fourier* [1, Art. 157... 162] [1]) geschaffen. Der Artikel 160 seiner «Théorie analytique de la chaleur», die erstmals im Jahr 1822 in der endgültigen Fassung erschienen ist, hat folgenden Wortlaut:

> Il faut maintenant remarquer que chaque grandeur indéterminée ou constante a une *dimension* qui lui est propre et que les termes d'une même équation ne pourraient pas être comparés, s'ils n'avaient point le même *exposant de dimension*. Nous avons introduit cette considération dans la Théorie de la chaleur pour rendre nos définitions plus fixes et servir à vérifier le calcul; c'est pour cette raison que, dans la Géométrie et dans la Mécanique, elle équivaut aux lemmes fondamentaux que les Grecs nous ont laissés sans démonstration.

Wie dieser Text zeigt, verzichtet *Fourier* darauf, seine beiden neuen Begriffe explizit zu definieren. Wie sie anzuwenden sind, zeigt er aber in den beiden folgenden Artikeln.

In Art. 161 erläutert er den Einfluss der Dimension auf die Änderung der Masszahl einer Grösse beim Übergang auf neue Einheiten. Von einer Grösse X, die eine Länge darstellt, sagt er, sie habe bezüglich der Längeneinheit die Dimension 1; er braucht also offensichtlich das Wort «Dimension» im Sinne von «Dimensionsexponent». Dasselbe ist der Fall, wenn er anschliessend erklärt: die Winkel, die Sinus- und andere trigonometrische Funktionen, die Logarithmen oder Potenzexponenten seien reine Zahlen, die mit der Längeneinheit nicht änderten; für sie müsste man daher die Dimension 0 finden. Auch in Art. 162 braucht er «Dimension» synonym mit «Dimensionsexponent».

Maxwell [2, S. 2] zitiert *Fourier* bei der Darlegung des Dimensionsbegriffs. Trotzdem deckt sich seine Auffassung nicht genau mit derjenigen *Fouriers;* überdies sind seine Darlegungen nicht streng eindeutig. *Maxwell* [2, S. 1 u. 2] schreibt:

> The formulae at which we arrive must be such that a person of any nation, by substituting for the different symbols the numerical values of the quantities as measured by his own national units, would arrive at a true result.
>
> Hence, in all scientific studies it is of greatest importance to employ units belonging to a properly defined system, and to know the relations of these units to the fundamental units, so that we may be able at once to transform our results from one system to another.
>
> This ist most conveniently done by ascertaining the *dimensions* of every unit in terms of the three fundamental units. When a given unit varies as the nth power of one of these units, it is said to be of *n dimensions* as regards that unit.

Bei der Definition Maxwells, die im letzten Absatz steht, handelt es sich um Dimensionen (Mehrzahl) einer *Einheit*, wogegen man nach Fourier von Dimensionsexponenten oder von der Dimension (in Einzahl) einer Grösse — worunter *Fourier* nur die Masszahl versteht — sprechen müsste. Später geht *Maxwell* noch deutlicher eigene Wege.

Maxwell erklärt [2, S. 3], dass er bei der Behandlung der Dimensionen von Einheiten die *Einheit* der Länge mit $[L]$, die *Einheit* der Zeit mit $[T]$ und die *Einheit* der Masse mit $[M]$ bezeichne; später [2, S. 5] setzt er dann für die *Dimensionen* der Einheit der Geschwindigkeit $[L\,T^{-1}]$, für die *Dimensionen* der Einheit der Arbeit $[ML^2T^{-2}]$ usw. Der Leser weiss nun nicht, ob die Dimensionen ausschliesslich durch die Exponenten wiedergegeben werden, oder ob die eckigen Klammern auch zum Dimensionsausdruck gehören. Wahrscheinlich sollen die eckigen Klammern nur ausdrücken, dass es sich um die Einheit einer Grösse handelt, die mit den Grundgrössen in einem entsprechenden Zusammenhang steht. Während die Dimensionsexponenten bei Fourier eindeutig nur in Gleichungen vorkommen, die zwischen den Masszahlen physikalischer Grössen bestehen, scheinen sie bei *Maxwell* in Ausdrücken aufzutreten, welche Beziehungen zwischen den physikalischen Grössen selbst wiedergeben.

[1]) siehe Literaturverzeichnis am Schluss.

In dieser Weise scheint *Helmholtz* die Dimensionsausdrücke *Maxwells* verstanden zu haben; er lehrt [3, S. 32], nachdem er dargelegt hat, dass die neuen Grössen jeweils durch Gleichungen definiert werden, in denen ausser diesen nur die drei Grundgrössen in verschiedenen Kombinationen stehen:

.... Da nun auf diese Weise im Fortschritt der Untersuchungen verhältnißmässig complizirte Zusammensetzungen der ursprünglichen Größenarten auftreten und man sehr häufig das Bedürfnis hat, für eine Größe, die auf einem verwickelten Wege durch Heranziehung von Sätzen aus verschiedenen Kapiteln der Physik gefunden ist, die Art der charakteristischen Gruppirung zu bezeichnen, so bildet man Gleichungen, welche nicht den Zahlenwert der zu messenden Größe geben sollen, sondern die Art der Zusammensetzung aus den grundlegenden Größen Masse, Länge, Zeit anzeigen. Man schliesst, um an diesen besondern Sinn solcher Gleichungen zu erinnern, nach *Maxwells* Vorgang zweckmäßig die Ausdrücke in eckige Klammern ein und bezeichnet, ohne sich an bestimmte Maasseinheiten zu binden, eine Masse durch M, eine Länge durch L und eine Zeit durch T; oft findet man in solchen Angaben das Auftreten von Bruchstrichen dadurch vermieden, daß man negative Exponenten anwendet und dann stets ein Product irgendwelcher Potenzen von M, L, T erhält. Diesen für den in Frage stehenden neuen physikalischen Begriff zustande kommenden Complex dieser Größen nennt man die *Dimension* desselben.

Nach *Helmholtz* schildert also die Dimension einer Grösse «die Art der Zusammensetzung aus den grundlegenden Größen», es wird ein Zusammenhang zwischen physikalischen Grössen, nicht nur zwischen Masszahlen, angedeutet; hiebei hat der Umstand, dass die in den Dimensionsausdrücken verwendeten Symbole bei *Helmholtz* offensichtlich Masszahlen darstellen, nichts zu bedeuten.

Einige Jahre früher behandelte *Helmholtz* das Operieren mit benannten Zahlen — also mit physikalischen Grössen nach heutigem Sprachgebrauch — in einem erkenntnistheoretischen Aufsatz [4, S. 84]. Er bezeichnete dabei «die besondere Art der Einheiten», die eine benannte Zahl zusammenfasst, als *Benennung der Zahl.*

Auf einer ganz andern Anschauung beruhen die Erklärungen, die *Bruhat* [5, S. 255] für die Dimensionsausdrücke gibt. Er schreibt:

Prenons par exemple la loi fondamentale de la Dynamique, qui sert à définir l'unité de force comme une unité dérivée. Par convention, cette loi s'exprime par la même formule $f = m\gamma$ dans les deux systèmes: si pour une certaine expérience, les nombres qui mesurent la force, la masse et l'accélération sont f_1, m_1, γ_1 dans le premier système d'unités et f_2, m_2, γ_2 dans le second, ces deux séries de nombres satisfont aux relations:

$$f_1 = m_1 \gamma_1, \qquad f_2 = m_2 \gamma_2,$$

et l'on a:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Le rapport des nombres qui mesurent une même grandeur avec deux unités différentes est égal à l'inverse du rapport de ces deux unités: les rapports F, M, Γ des unités du système 2 aux unités correspondantes du système 1 sont égaux respectivement aux rapports f_1/f_2, m_1/m_2, γ_1/γ_2, et sont liés par la relation:

$$\mathrm{F} = \mathrm{M}\Gamma.$$

Cette relation est dite l'*équation de dimensions de la force:* chacune des quantités F, M, Γ y représente le rapport de deux grandeurs de même espèce, c'est-à-dire un certain nombre, et elle permet par exemple de calculer le rapport des unités de force lorsqu'on connaît les rapports des unités de masse et d'accélération. Il est essentiel de remarquer que l'équation de dimensions d'une grandeur ne nous renseigne pas sur la nature physique de cette grandeur, mais qu'elle ne fait que traduire les conventions faites pour définir son unité par un choix arbitraire de formules.

Den Begriff der Dimension selbst umschreibt *Bruhat* [5, S. 256] in folgender Weise:

En dehors des changements d'unités, on peut aussi employer les équations de dimensions à vérifier l'*homogénéité d'une formule.* Une formule est l'expression d'une relation numérique entre les nombres qui mesurent diverses grandeurs; cette relation doit être conservée si l'on mesure les grandeurs avec un autre système d'unités, tout en conservant les relations de définitions des unités dérivées à partir des unités fondamentales. Les expressions qui figurent dans les deux membres de la formule doivent être multipliés par le même rapport, elles doivent avoir mêmes dimensions.

Aus diesen Erklärungen kann man entnehmen, dass nach *Bruhat* die Dimension einer Grösse ihr allgemein für zwei Maßsysteme bestehendes Einheitenverhältnis ist; es kann aus den Einheitenverhältnissen von Bezugsgrössen zusammengesetzt sein. Dabei ist die Dimension auf alle Fälle eine reine Zahl.

Die Tatsache, dass *Fourier* auf eine explizite Definition der von ihm eingeführten Begriffe «Dimension» und «Dimensionsexponent» verzichtet hat, ist wohl die Hauptursache dafür, dass uns kein einheitlicher Dimensionsbegriff überliefert ist. *Fischer* [6, S. 122 u. 123] hat dargelegt, dass mehrere Bedeutungen des Begriffs «Dimension» nebeneinander bestehen.

2. Definition der Dimension

Von den genannten Autoren gibt einzig *Bruhat* eine eindeutige und erschöpfende Definition des Begriffs der Dimension, allerdings nur in Form einer Umschreibung. Diese Definition kann aber diejenigen nicht befriedigen, die im Sinne der Auffassung von *Helmholtz* und wohl auch von *Maxwell* von der Dimension einer Grösse eine mehr oder weniger vollständige Darstellung der besondern Art dieser Grösse verlangen. In diesem Sinne stellt auch *Häberli* [7, S. 344] Forderungen an ein Dimensionssystem.

Es scheint aber, dass bis heute eine diesen Ansprüchen genügende, explizite, eindeutige und erschöpfende Definition noch nicht vorliegt. Aus diesem Grund wird im folgenden der Versuch unternommen, eine solche Definition anzugeben. Sie wird durch drei Zusätze ergänzt.

Den Weg zur Lösung der Aufgabe bietet der von *Wallot* [8; 9], *Landolt* [10; 11], *Hochrainer* [12], *Roth-Desmeules* [13] und andern Autoren dargelegte Grössenkalkül.

Bei gegebenem System der Definitionen der verschiedenen physikalischen Grössen ist man ohne Verwendung des Grössenkalküls gezwungen, einerseits das System der Masszahlengleichungen und anderseits ein kohärentes Maßsystem [2]) nebeneinander zu behandeln. Überdies muss das Axiom anerkannt werden, dass bei der Verwendung verschiedener Maßsysteme die Masszahlen einer Grösse den ver-

[2]) Unter einem kohärenten Maßsystem versteht man eine Gesamtheit von Einheiten aller verschiedenartigen Grössen, wobei die verschiedenen Einheiten so gewählt sind, dass zwischen ihnen Eins-zu-Eins-Beziehungen bestehen.

wendeten Einheiten umgekehrt proportional sind. Bei gegebenem System der Definitionen vereinigt man im Grössenkalkül das System der Masszahlengleichungen und das Maßsystem; man versteht unter jedem Buchstabensymbol unmittelbar die physikalische Grösse, d. h. das Produkt aus Masszahl und Einheit. Eine physikalische Grösse ist natürlich nicht die Naturerscheinung an sich, sondern lediglich das physikalisch-mathematische Modell, das man sich von dieser macht.

Es folgt nun die Definition der Dimension mit den drei Zusätzen, und zwar je mit Erläuterungen.

Definition:

Die Dimension einer skalaren Grösse ist eine gleichartige Vergleichsgrösse; diese kann ihrerseits aus einer oder aus mehreren ungleichartigen Vergleichsgrössen zusammengesetzt sein.

Diese Definition beschränkt sich auf skalare Grössen. Gleichartige Grössen unterscheiden sich in diesem Fall nur durch einen Faktor, der eine reine Zahl ist. Die Dimension eines Volumens ist irgendein Vergleichsvolumen. Man kann eine Vergleichsgrösse immer als Einheit ansprechen; sie ist lediglich eine im Ausmass noch nicht festgelegte Einheit.

Die Vergleichsgrösse kann ihrerseits zusammengesetzt sein; vorzugsweise wird man hiezu die sogenannten Grundgrössen, also Länge, Masse, Zeit und elektrische Ladung verwenden.

Erster Zusatz:

Bei nichtskalaren Grössen bezieht sich die Dimension lediglich auf die bei Nichtbeachtung der räumlichen Richtungen verbleibenden skalaren Bestandteile.

Dieser Zusatz hat zur Folge, dass die Gesamtheit der Dimensionen nicht dieselbe Mannigfaltigkeit aufweist wie die Gesamtheit der Grössen. Ob eine Grösse ein Skalar, ein Vektor oder ein Tensor ist, kann man an der Dimension nicht erkennen. So haben zum Beispiel die Arbeit, die eine skalare Grösse ist, und das Drehmoment, das ein schiefsymmetrischer Tensor ist, aber häufig als Vektor dargestellt wird, dieselbe Dimension.

Zweiter Zusatz:

Grössen, die für verschiedene Definitionssysteme dieselbe Naturerscheinung wiedergeben, können verschiedene Dimensionen haben.

Definiert man Grössen, welche dieselbe Naturerscheinung wiedergeben, auf verschiedene Weise, so kann es nicht überraschen, dass sich für diese Grössen verschiedene Dimensionen ergeben. Es liegen dann tatsächlich verschiedene Grössen vor, obwohl sie alle denselben Namen haben und häufig auch durch dasselbe Buchstabensymbol dargestellt werden. Drei wichtigen Maßsystemen, nämlich dem Giorgi-System, dem elektrostatischen CGS-System und dem elektromagnetischen CGS-System, liegen verschiedene Definitionssysteme zugrunde. Das Definitionssystem, an das sich das Giorgi-System anschliesst, kennt vier voneinander unabhängige, nicht ineinander überführbare Grössen, z. B. die Länge, die Masse, die Zeit und die elektrische Ladung. Bei den Definitionssystemen, an welche die CGS-Systeme anschliessen, gibt es dagegen drei solche unabhängige Grössen; zudem sind die beiden Definitionssysteme noch verschieden. Die Folge ist, dass die elektrischen und die magnetischen Grössen in den drei Maßsystemen je eine andere Dimension aufweisen.

Dritter Zusatz:

Verschiedenartige Grössen können dieselbe Dimension haben.

Der dritte Zusatz ist nur zum Teil eine Folge des ersten und zweiten Zusatzes.

Ein erstes Beispiel stellen die Grössen «Arbeit» und «Drehmoment» dar, die schon in den Erläuterungen zum ersten Zusatz erwähnt sind. Ein zweites Beispiel bilden die «elektrische Feldstärke» im elektrostatischen und die «magnetische Feldstärke» im elektromagnetischen CGS-System. Als drittes Beispiel sei noch erwähnt, dass im elektromagnetischen CGS-System der «elektrische Widerstand» und die «Geschwindigkeit» dieselbe Dimension haben.

Um Missverständnisse auszuschliessen, sei noch ausdrücklich festgestellt, dass hier unter der Bezeichnung «CGS-System» die klassischen, dreidimensionalen CGS-Systeme verstanden werden, nicht die in den letzten Jahren gelegentlich erwähnten, auf vier Grunddimensionen ausgebauten «Neo-CGS-Systeme».

3. Mathematische Erfassung der Dimension

Die folgenden Darlegungen bedienen sich des Grössenkalküls. Über diesen wurden in Abschnitt 2 einige Angaben gemacht.

Drückt man ein und dieselbe Grösse durch verschiedene als Einheiten bezeichnete Vergleichsgrössen aus, so erhält man für diese Grösse verschiedene Masszahlen. So gilt z. B. für eine Energie von 1800 Kilojoule die Umformung

$$W = 1800 \text{ kJ} = 1\,800\,000 \text{ J} = 30\,000 \text{ Wmin} = 500 \text{ Wh} = 0{,}5 \text{ kWh}. \qquad (1)$$

Allgemein setzen wir analog für eine skalare Grösse

$$X = \{X\}_1\,[X]_1 = \{X\}_2\,[X]_2 = \{X\}_3\,[X]_3 = \ldots \qquad (2)$$

Dabei bezeichnen wir mit $[X]_1$, $[X]_2$, $[X]_3$, verschiedene Einheiten von X und mit $\{X\}_1$, $\{X\}_2$, $\{X\}_3$, die zugehörigen Masszahlen.

Nun soll $[X]$ (ohne Index) die Dimension von X nach der in Abschnitt 2 gegebenen Definition, also eine der Grösse gleichartige Vergleichsgrösse darstellen [3]). Über das Ausmass dieser Vergleichsgrösse ist nichts festgelegt, auch wenn die Grösse X selbst genau bekannt ist. Verwendet man die Vergleichsgrösse $[X]$ als Einheit, so ergibt sich für X eine in ihrem Wert unbestimmte Masszahl $\{X\}$ (ohne Index). Damit wird

$$X = \{X\}\,[X]. \qquad (3)$$

Hieraus folgt

$$\frac{X}{[X]} = \{X\}. \qquad (4)$$

[3]) Der Ausdruck «$[X]$» ist «Dimension von X» zu lesen.

Durch Gl. (3) und (4) wird lediglich ausgedrückt, dass die Grösse X ein reines Vielfaches der Vergleichsgrösse $[X]$ ist, und dass der Quotient der Grösse X und der Vergleichsgrösse $[X]$ eine reine Zahl ist; deren Wert ist unbekannt.

Indem wir für bestimmte Einheiten die eckige Klammer *mit* Index, für die Dimension dagegen die eckige Klammer *ohne* Index verwenden, bringen wir deutlich zum Ausdruck, dass die Dimension einer Grösse lediglich eine verallgemeinerte Einheit dieser Grösse ist.

4. Dimensionsgleichungen und Dimensionsexponenten

Es ist heute vielfach üblich, die Dimensionen der vier Grundgrössen Länge l, Masse m, Zeit t, elektrische Ladung Q durch L, M, T, Q wiederzugeben. Nach der in Abschnitt 3 eingeführten Schreibweise mit eckigen Klammern gilt demnach:

$$[l] = \mathrm{L}, \tag{5a}$$
$$[m] = \mathrm{M}, \tag{5b}$$
$$[t] = \mathrm{T}, \tag{5c}$$
$$[Q] = \mathrm{Q}. \tag{5d}$$

Drückt man nun die vier Grundgrössen nach Gl. (3) je als Produkt der Dimension und der zugehörigen unbestimmten Masszahl aus, so wird

$$l = \{l\}\ \mathrm{L}, \tag{6a}$$
$$m = \{m\}\ \mathrm{M}, \tag{6b}$$
$$t = \{t\}\ \mathrm{T}, \tag{6c}$$
$$Q = \{Q\}\ \mathrm{Q}. \tag{6d}$$

Ein Definitionssystem, das auf n nicht durch einander ausdrückbaren, also unabhängigen Grundgrössen und damit auch mit n Grunddimensionen aufgebaut ist, bezeichnen wir kurz als n-dimensional.

Im Grössenkalkül können die physikalischen Grössen als Potenzprodukte der Grundgrössen dargestellt werden. Für ein vierdimensionales Definitionssystem gilt demnach für eine beliebige skalare Grösse X der allgemeine Ansatz

$$X = \varkappa\, l^{\alpha}\, m^{\beta}\, t^{\gamma}\, Q^{\delta} \tag{7}$$

Dabei ist $\varkappa$ eine konstante reine Zahl, beispielsweise 1, $1/2$, 2π. Ersetzt man nun l, m, t und Q nach Gl. (6a...d), so erhält man

$$X = \varkappa\, \{l\}^{\alpha}\, \{m\}^{\beta}\, \{t\}^{\gamma}\, \{Q\}^{\delta}\, \mathrm{L}^{\alpha}\, \mathrm{M}^{\beta}\, \mathrm{T}^{\gamma}\, \mathrm{Q}^{\delta}. \tag{8}$$

Die Grösse X erscheint damit als das Produkt einer unbestimmten reinen Zahl, die selbst in der Form eines Potenzproduktes auftritt, und eines Potenzprodukts von Dimensionen. Die reine Zahl ist die unbestimmte Masszahl der Grösse X:

$$\{X\} = \varkappa\, \{l\}^{\alpha}\, \{m\}^{\beta}\, \{t\}^{\gamma}\, \{Q\}^{\delta}. \tag{9}$$

Das Potenzprodukt der Dimensionen der Grundgrössen stellt, wenn man die Grösse X nach Gl. (3) ausdrückt, die Dimension von X dar. Es ist also

$$\boxed{[X] = \mathrm{L}^{\alpha}\, \mathrm{M}^{\beta}\, \mathrm{T}^{\gamma}\, \mathrm{Q}^{\delta}}\,. \tag{10}$$

Gleichungen der Art von Gl. (10) nennt man *Dimensionsgleichungen;* Ausdrücke der Art der rechten Seite von Gl. (10) sind *Dimensionsausdrücke.* Die in diesen vorkommenden Exponenten sind die *Dimensionsexponenten.*

Für die elektrische Spannung gilt beispielsweise

$$[U] = \mathrm{L}^2\, \mathrm{M}\, \mathrm{T}^{-2}\, \mathrm{Q}^{-1}. \tag{11}$$

Von den Dimensionsgleichungen kommt man auf die Einheitengleichungen eines kohärenten Maßsystems, wenn es auf demselben Definitionssystem beruht wie die Dimensionsgleichungen, indem man für jede Dimension die entsprechende Einheit setzt. Handelt es sich zum Beispiel um das Giorgi-System [4]), das wir durch den Index $_G$ kennzeichnen wollen, so geht die Dimensionsgleichung (10) in folgende Einheitengleichung über:

$$[X]_G = [l]^{\alpha}\, [m]^{\beta}\, [t]^{\gamma}\, [Q]^{\delta}. \tag{12}$$

Hier wird deutlich, dass unsere Dimensionsgleichungen lediglich verallgemeinerte Einheitengleichungen sind. Betrachtet man wieder die elektrische Spannung als Beispiel, so wird, da der Meter, das Kilogramm, die Sekunde, das Coulomb die Giorgi-Einheiten der Länge, der Masse, der Zeit und der elektrischen Ladung sind:

$$[U]_G = \mathrm{m}^2\, \mathrm{kg}\, \mathrm{s}^{-2}\mathrm{C}^{-1}. \tag{13}$$

Man kann die Einheitengleichungen auch direkt aus den Grössengleichungen ableiten. Gl. (7) stellt eine solche Grössengleichung dar. Man hat darin lediglich für $\varkappa$ den Wert 1 zu benützen und für die Grössen die Einheiten zu setzen.

In einer Dimensionsgleichung kann die Dimension einer Grösse auch durch die Dimensionen von Grössen ausgedrückt werden, die nicht Grundgrössen sind. So erhält man z. B. aus der Gleichung

$$U = \frac{P}{I}, \tag{14}$$

die den Zusammenhang der elektrischen Spannung U mit der Leistung P und der elektrischen Stromstärke I ausdrückt,

$$[U] = [P]\, [I]^{-1}. \tag{15}$$

Da das Volt, das Watt und das Ampère die Giorgi-Einheiten der Spannung, der Leistung und der Stromstärke sind, geht Gl. (15) für das Giorgi-System in folgende Einheitengleichung über:

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}}. \tag{16}$$

Analog wie man für reine Zahlen setzt, definiert man im Grössenkalkül für physikalische Grössen

$$X^0 = 1. \tag{17}$$

Nach Gl. (3) folgt daraus

$$\{X\}^0\, [X]^0 = 1. \tag{18}$$

[4]) siehe Bull. SEV Bd. 40(1949), Nr. 15, S. 462...474 (Sonderabdruck erhältlich).

Für die unbestimmte Masszahl, die eine reine Zahl ist, gilt bekanntlich, wenn man unendlich grosse Werte ausschliesst,

$$\{X\}^0 = 1. \tag{19}$$

Aus Gl. (18) und (19) folgt somit

$$\boxed{[X]^0 = 1}. \tag{20}$$

Die Grössen der Mechanik setzt man aus den Grundgrössen Länge, Masse und Zeit zusammen. Bezeichnen wir eine solche mechanische Grösse mit Y, so gilt analog Gl. (10)

$$[Y] = \mathrm{L}^\alpha \mathrm{M}^\beta \mathrm{T}^\gamma. \tag{21}$$

Wünscht man den Ansatz vierdimensional zu schreiben, so rechtfertigt Gl. (20) die folgende Schreibweise:

$$[Y] = \mathrm{L}^\alpha \mathrm{M}^\beta \mathrm{T}^\gamma \mathrm{Q}^0. \tag{22}$$

Als Beispiel einer mechanischen Grösse betrachten wir die Arbeit A. Für ihre Dimension gilt bekanntlich

$$[A] = \mathrm{L}^2 \mathrm{M} \mathrm{T}^{-2}. \tag{23}$$

Für das Giorgi-System erhält man damit die Einheitengleichung

$$[A]_\mathrm{G} = \mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-2}, \tag{24a}$$

oder, da das Joule die Arbeitseinheit im Giorgi-System ist,

$$\mathrm{J} = \mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-2}. \tag{24b}$$

Analog erhält man für das CGS-System

$$[A]_\mathrm{CGS} = \mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}\,\mathrm{s}^{-2}, \tag{25a}$$

oder, da das Erg die CGS-Einheit der Arbeit ist,

$$\mathrm{erg} = \mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}\,\mathrm{s}^{-2}. \tag{25b}$$

Wir betrachten nun eine Grösse ζ, die insofern degeneriert ist, als alle vier Dimensionsexponenten null sind. Nach Gl. (20) findet man dann für die Dimension dieser Grösse

$$[\zeta] = \mathrm{L}^0 \mathrm{M}^0 \mathrm{T}^0 \mathrm{Q}^0. \tag{26}$$

Man bezeichnet solche Grössen als *dimensionslos*. Alle reinen Zahlen sind dimensionslos.

Die zu 1 gewordene Dimension der reinen Zahlen nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als sie eine im Ausmass *bestimmte* Einheit darstellt. Diese Sonderstellung entspricht dem Umstand, dass in allen Maßsystemen übereinstimmend 1 die Einheit der reinen Zahlen ist.

5. Verwendung der Dimensionsexponenten für die Umrechnung auf andere Einheiten

Verwendet man für ein und dieselbe Grösse zwei verschiedene Einheiten, so verhalten sich bekanntlich die beiden zugehörigen Masszahlen umgekehrt wie die Einheiten. Zu diesem Gesetz kommt man sofort, wenn aus Gl. (2) der Quotient der Masszahlen gebildet wird:

$$\frac{\{X\}_1}{\{X\}_2} = \frac{[X]_2}{[X]_1}. \tag{27}$$

Wählt man für jede der vier Grundgrössen zwei verschiedene Einheiten, wobei wir je die eine durch den Index $_1$, die andere durch den Index $_2$ kennzeichnen, so ergeben sich nach Gl. (12) für die beiden kohärenten Einheiten von X die beiden folgenden Einheitengleichungen:

$$[X]_1 = [l]_1^\alpha\,[m]_1^\beta\,[t]_1^\gamma\,[Q]_1^\delta\,. \tag{28a}$$

$$[X]_2 = [l]_2^\alpha\,[m]_2^\beta\,[t]_2^\gamma\,]Q]_2^\delta\,. \tag{28b}$$

Nach Gl. (27) folgt hieraus

$$\boxed{\frac{\{X_1\}}{\{X_2\}} = \left(\frac{[l]_2}{[l]_1}\right)^\alpha \left(\frac{[m]_2}{[m]_1}\right)^\beta \left(\frac{[t]_2}{[t]_1}\right)^\gamma \left(\frac{[Q]_2}{[Q]_1}\right)^\delta}\,. \tag{29}$$

Man ersieht hieraus die bekannte Tatsache, dass für das Verhältnis der beiden Masszahlen neben den Verhältnissen der Einheiten der Grundgrössen noch die Dimensionsexponenten eine Rolle spielen.

Betrachtet man als Beispiel die Masszahl einer bestimmten Arbeit für das Giorgi- und das CGS-System, so findet man nach Gl. (27) unter Beachtung von Gl. (24a) und (25a):

$$\frac{\{A\}_\mathrm{G}}{\{A\}_\mathrm{CGS}} = \left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{kg}}\right)^1 \left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{100}\right)^2 \left(\frac{1}{1000}\right)^1 1^{-2} = 10^{-7}. \tag{30}$$

6. Die Dimension der Winkel

Unter dem (ebenen) Winkel versteht man üblicherweise das Verhältnis des aus einem Kreis herausgeschnittenen Bogens zum Radius:

$$\alpha = \frac{s}{r}\,, \tag{31}$$

Um die Dimension des Winkels zu ermitteln, ersetzt man hier jede Grösse nach Gl. (3) durch das Produkt ihrer Dimension und einer unbestimmten Masszahl:

$$\{\alpha\}\,[\alpha] = \frac{\{s\}\,[s]}{\{r\}\,[r]}\,. \tag{32}$$

Hieraus folgt

$$[\alpha] = \frac{[s]}{[r]}\,. \tag{33}$$

Da s und r Längen sind, folgt nach Gl. (5a)

$$[\alpha] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = \mathrm{L}^0. \tag{34}$$

Nach Gl. (20) wird schliesslich

$$[\alpha] = 1. \tag{35}$$

Der Winkel ist also dimensionslos, er ist eine reine Zahl! Schon *Fourier* [1, Art. 161, 162] und *Helmholtz* [3, S. 321] haben dies festgestellt.

Die Tatsache, dass für Winkel verschiedene Einheiten möglich und üblich sind, ist kein ausreichender Grund dafür, dass dem Winkel eine besondere Dimension zugeschrieben werden muss. Man kann auch reine Zahlen in verschiedenen Einheiten ausdrücken. So kann man beispielsweise statt 0,1 auch 10% oder 100% schreiben. Trotzdem sieht man sich nicht veranlasst, der reinen Zahl eine besondere Grunddimension zuzuordnen. Die Winkeleinheit «Grad» gehört zur Familie der *Sondereinheiten* [10, S. 26; 11, S. 30]. Es gilt

$$1^0 = \frac{1}{57,3}. \tag{36}$$

Einen Raumwinkel definiert man als das Verhältnis der auf einer Kugel ausgeschnittenen Kalotte zum Quadrat des Radius:

$$\omega = \frac{A}{r^2}. \tag{37}$$

Analog wie beim (ebenen) Winkel ergibt sich

$$[\omega] = 1. \tag{38}$$

Auch der Raumwinkel ist dimensionslos, auch er ist eine reine Zahl.

Im Lauf der Zeit wurde mehrfach versucht, für den Winkel eine besondere Dimension einzuführen, so von *Thomson* [14], *Williams* [15], *Hadamard* [16], *Wennerberg* [17, S. 11], *Lartigue* [18], *Brylsinki* [19], *Häberli* [7, S. 345]. Die Ursache dieser Vorstösse ist wohl darin zu suchen, dass man eine reine Zahl als Quotient gleichartiger Grössen ansieht. Zur Gleichartigkeit gehört auch gleicher Zusammenhang mit den räumlichen Richtungen. Nun stehen aber beim Winkel das Bogenelement und der Radius senkrecht aufeinander; man empfindet es dann als stossend, dass der Quotient eine reine Zahl sein soll. Beim Drehmoment spielt nur jene Komponente der Kraft eine Rolle, die zum Hebelarm (Länge) senkrecht steht, wogegen bei der Arbeit nur diejenige Komponente der Kraft massgebend ist, die in die Richtung des Weges (Länge) fällt. Bei einigen Grössen tritt eine Axialität in Erscheinung, bei andern nicht. Man wollte deshalb die Axialität bei der Winkelgeschwindigkeit, beim Drehmoment und überhaupt bei allen achsialen Vektoren durch eine besondere Grunddimension zum Ausdruck bringen.

Gegen ein solches Vorgehen ist folgendes einzuwenden: Es ist bekannt, dass die sog. achsialen Vektoren eigentlich keine Vektoren, sondern schiefsymmetrische Tensoren zweiter Stufe sind. Hierauf ist schon verschiedentlich hingewiesen worden, so z. B. von *Weyl* [20, S. 40 u. 41], *Bouthillon* [21, S. 47], *Brillouin* [22, S. 13 u. 54]. Auch jener Drehwinkel, der um einen rechten Winkel dreht, ist ein schiefsymmetrischer Tensor zweiter Stufe [5]). Wenn man aber dem schiefsymmetrischen Tensor zweiter Stufe eine eigene Dimension zuordnen wollte, müsste man konsequenterweise auch dem symmetrischen Tensor zweiter Stufe, ja allgemein den zweistufigen Tensoren und schliesslich den Tensoren beliebiger Stufenzahl je eine besondere Dimension zuordnen. Von praktischer Bedeutung wären dabei insbesondere die Tensoren erster Stufe, die man allgemein als Vektoren bezeichnet, und die Tensoren nullter Stufe, das heisst die Skalare. Die Einführung dieser neuen Dimensionen würde darauf herauskommen, den Begriff der Dimension neu zu definieren; insbesondere müsste der erste Zusatz von Abschnitt 2 wegfallen. Der Begriff der Dimension würde dadurch wesentlich geändert und bereichert werden. Er würde dann auch das einschliessen, was man als Charakter einer Grösse bezeichnet. Die Dimension einer Grösse würde wohl identisch mit dem Begriff «Art einer Grösse». Durch eine solche Wandlung würde aber die «Dimension» viel komplizierter werden, als sie heute ist; sie würde zu einem recht unhandlichen Gebilde. Mit dem Verlust der Einfachheit müsste sie auch ihre praktische Bedeutung einbüssen.

Es ist viel zweckmässiger, die Art einer Grösse teils durch die Dimension, teils durch den Charakter darzustellen. Die Eigenschaft einer Grösse, dass sie Skalar, Vektor, zwei- oder höherstufiger Tensor und als mehrstufiger Tensor noch symmetrisch oder schiefsymmetrisch sein kann, drückt dann der Charakter aus.

Die vorangehenden Darlegungen lassen es als gerechtfertigt erscheinen, den Winkel weiterhin im Sinne von *Fourier* als dimensionslose Grösse zu betrachten.

[5]) Eine diesbezügliche Studie des Verfassers wird in Heft 5, (1950) der Zeitschrift «Elemente der Mathematik» erscheinen unter dem Titel «Die Tensorkoordinaten des Drehwinkels». Darin wird auch der Tensorcharakter des vektoriellen Produkts und der sogenannten achsialen Vektoren dargelegt.

7. Literatur

[1] *Darboux, G.:* Oeuvres de Fourier, Bd. 1. Paris, Gauthier-Villars, 1888.
[2] *Maxwell, J. C.:* A treatise on electricity and magnetism, Bd. 1, 2. Aufl. Oxford, At the Clarendon Press, 1881.
[3] *Krigar-Menzel, O.:* Vorlesungen über theoretische Physik von H. von Helmholtz, Bd. 1, Abt. 2. Leipzig, Barth, 1898.
[4] *Hertz, P. und M. Schlick:* Hermann v. Helmholtz, Schriften zur Erkenntnistheorie. Berlin, Springer, 1921.
[5] *Bruhat, G.:* Mécanique, 3. Aufl. Paris, Masson, 1944.
[6] *Fischer, J.:* Zur Definition von physikalischen Grössen in Gleichungen, Einheiten, Benennungen, Dimensionen, Grössengleichungen usw. Phys. Z. Bd. 37(1936), Seiten 120...129.
[7] *Häberli, F.:* Die physikalischen Dimensionen. Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. Bd. 15(1949), Nr. 11, Seiten 343...353.
[8] *Wallot, J.:* Die physikalischen und technischen Einheiten. Elektrotechn. Z. Bd. 43(1922), Nr. 44, S. 1329...1333; Nr. 46, S. 1381...1386.
[9] *Wallot, J.:* Grössengleichungen und Zahlenwertgleichungen. Elektrotechn. Z. Bd. 64(1943), Nr. 1/2, S. 13...16.
[10] *Landolt, M.:* Grösse, Masszahl und Einheit. Zürich, Rascher, 1943.
[11] *Landolt, M.:* Grandeur, mesure et unité (Trad. par Emile Thomas). Bruxelles, Office International de Librairie; Paris, Dunod, 1947.
[12] *Hochrainer, A.:* Grössen und Grössengleichungen. Elektrotechn. und Maschinenbau Bd. 62(1944), Nr. 29/30, S. 350...362.
[13] *Roth-Desmeules, E.:* Über das Rechnen mit Grössen. Elem. Math. Bd. 4(1949), S. 105...111.
[14] *Thomson, S. P.:* Proc. Phys. Soc. London Bd. 10(1889), Part. I, S. 49.
[15] *Williams, W.:* On the relations of the dimensions of physical quantities to directions in space. Proc. Phys. Soc. London. Bd. 11(1890/92).

[16] *Hadamard, J.:* A propos des notions de dimension et d'homogénéité. J. Phys. Radium, 6. Ser., Bd. 3(1922), S. 149...153.

[17] *Wennerberg, J.:* A study of physical quantities in mechanical and electrical engineering. Stockholm, The Swedish Electrotechnical Committee, 1932.

[18] *Lartigue, A.:* Discussion du rapport de M. Iliovici sur les unités. Bull. Soc. franç. Electr. 5., Ser., Bd. 5(1935), Nr. 51, S. 279.

[19] *Brylinski, E.:* Sur la notion d'angle. Rev. Gén. Electr. Bd. 44(1938), Nr. 11, S. 345...349.

[20] *Weyl, H.:* Raum, Zeit, Materie. 5. Aufl. Berlin, Springer, 1923.

[21] *Bouthillon, L.:* Sur la nature des grandeurs électriques et magnétiques et l'application de la notation tensorielle aux lois de l'électricité. Bull. Soc. franç. Electr., 5. Ser., Bd. 8(1938), S. 41...62.

[22] *Brillouin, L.:* Les tenseurs en mécanique et en élasticité. Paris, Masson, 1944.

Adresse des Autors:
Prof. *Max Landolt*, Direktor des Technikums des Kantons Zürich, Büelweg 7, Winterthur (ZH).

Moderne Verfahren zur elektrischen Leistungsverstärkung

Von *M. Strutt*, Zürich [1])

621.396.64

Nach einer Erörterung des Begriffes der Leistungsverstärkung in der Elektrotechnik wird der Gewinn definiert als Verhältnis der verfügbaren Leistung am Ausgang zu jener am Eingang eines Verstärkers. Dieser Gewinn hängt bei linearen Verstärkern von den Matrixelementen ab und wird für einen einfachen Vierpol angegeben. Als erste Anwendung werden Elektronenröhrenverstärker behandelt, als zweite Anwendung Verstärker ohne Elektronenröhren und zwar mit Halbleitern, ferner magnetische Verstärker und Maschinenverstärker.

Après une discussion de la notion d'amplification de puissance, le gain est défini comme quotient de la puissance disponible à la sortie et de la puissance disponible à l'entrée d'un étage amplificateur. Ce gain dépend des éléments de la matrice de l'amplificateur et il est calculé pour un quadripôle simple. Ces définitions sont alors appliquées aux amplificateurs comportant des tubes électroniques. Des amplificateurs sans tubes électroniques des types suivants sont discutés: les amplificateurs à semi-conducteurs, les amplificateurs magnétiques et les amplificateurs à machines électriques.

1. Begriff der Leistungsverstärkung

Bei der Neuausrüstung des Elektrotechnischen Institutes der Eidgenössischen Technischen Hochschule (ETH), welche jetzt den Anfang genommen hat, wird den Gebieten der elektrischen Messtechnik, der Gasentladungen, der Elektronik, der elektrischen Maschinen und der Hochspannungstechnik besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Hier möchten wir ein Leitmotiv hervorheben, das geeignet erscheint, viele der genannten Arbeiten unter einheitlichen Gesichtspunkten zu betrachten, und zwar den Begriff der *Leistungsverstärkung* in der Elektrotechnik. Diese Leistungsverstärkung benutzt immer eine Hauptleistungsquelle, deren abgegebene Leistung (Speiseleistung) nach gebührender Umformung von einer Nebenleistungsquelle (Eingangsquelle) gesteuert wird. Man kann die Wirkung der Anlage so beschreiben, dass die Ausgangsleistung ein nach gegebenem Muster geformtes Bild der Eingangsleistung ist. Weil die Ausgangsleistung in vielen Fällen bedeutend grösser ist als die Eingangsleistung, kann man sagen, es finde eine Leistungsverstärkung vom Eingang zum Ausgang statt.

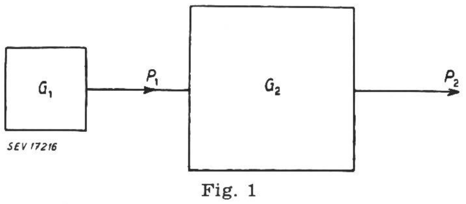

Fig. 1
Schema eines Leistungsverstärkers
G_1 Nebenleistungsquelle; G_2 Verstärker mit Hauptleistungsquelle; P_1 Eingangsleistung; P_2 Ausgangsleistung

In besonderen Fällen kann die Hauptleistungsquelle fortfallen. Dann findet im Verstärker infolge der Verluste der Schaltung eine Schwächung der Eingangsleistung statt, welche als Verstärkung < 1 bezeichnet werden kann. Damit fallen alle Leistungsübertrager (z. B. Leitungen, Transformatoren) unter den Begriff der Leistungsverstärker.

In den einfachsten Fällen der Verstärkung sind die Ströme und Spannungen am Ausgang proportional zu den Strömen und Spannungen am Eingang. Solche Verstärker sind linear oder fast linear. Meistens gilt dies für einen beschränkten Strom- und Spannungsbereich. Ein linearer Verstärker kann n Eingangsklemmen und m Ausgangsklemmen haben. In einfachen Fällen ist $m = n$ und das Verhalten des Verstärkers wird dann im linearen Falle durch eine quadratische Matrix mit n Zeilen und Spalten beschrieben. Die Matrixelemente sind von den Strömen und Spannungen unabhängig. Die Ströme und Spannungen am Ausgang können auch bei linearen Verstärkern von den entsprechenden Eingangsgrössen abweichende Frequenzen haben. Die Matrizenrechnung bildet zur Behandlung aller solcher Verstärker ein bequemes Hilfsmittel. Es empfiehlt sich, bei linearen Leistungsverstärkern den Begriff der *verfügbaren Leistung* einer Quelle einzuführen. Dies ist die maximale Leistung, welche einer Quelle entnommen werden kann. Das Verhältnis der verfügbaren Leistung am Ausgang zu jener am Eingang eines Verstärkers ist der Gewinn g_v ($v =$ verfügbar). Wenn die Eingangsquelle ihre ganze verfügbare Leistung an den Verstärker abgibt, wird der Gewinn maximal. Man kann den Gewinn aus der Verstärkermatrix im linearen Fall berechnen.

Als einfaches Beispiel wählen wir einen Vierpolverstärker mit zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen. Die entsprechende Admittanzmatrix lautet:

$$\begin{Vmatrix} \mathfrak{Y}_{11} & \mathfrak{Y}_{12} \\ \mathfrak{Y}_{21} & \mathfrak{Y}_{22} \end{Vmatrix}$$

Wenn $\mathfrak{Y}_{12} = 0$ ist, haben wir einen Richtvierpol vor uns, bei dem der Gewinn vom Eingang zum Aus-

[1]) Antrittsvorlesung, gehalten an der Eidgenössischen Technischen Hochschule am 2. Juli 1949.