Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 40 (1949)

Heft: 24

Artikel: Die Eigenfrequenzen der einlagigen Zylinderspule bei Spannungsstössen

Autor: Heller, B. / Hlávka, J. / Veverka, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1060740

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

fasser die oben gestellte Frage verneinend beantworten. Die Sicherheit, mit der der Konstrukteur rechnet, scheint für alle Fälle genügend zu sein. Das zeigen die angeführten Versuche von Rikli und hauptsächlich die Betriebsfunktion von vergüteten und durch früher beschriebene Fehler belasteten Rotorkörpern, die in der Lehrzeit erzeugt wurden. Man kann behaupten, dass diese Schmiedestücke trotz der Kontrolle durch Achsialbohrung qualitativ viel schlechter waren, als die später erzeugten, und dass bloss aus dem Grunde, dass die Fabrikationserfahrungen der Erzeuger sowie die Kontrollmethoden der Verbraucher qualitativ weit hinter den heutigen lagen.

Durch die Beseitigung der Achsialbohrung wäre nicht nur die Hüttenfabrikation grösserer Einheiten erleichtert, sondern auch die Verwendung von Stählen mit besseren magnetischen und Schweisseigenschaften ermöglicht. Auch würde dadurch der Notbehelf, die magnetischen Eigenschaften durch Einpressung von Weicheisen in die Bohrung zu verbessern, erspart werden.

Nachdem die Kontrolle der Rotorschmiedestücke durch achsiale Bohrung eine internationale Gewohnheit darstellt, wäre eine internationale Diskussion zwischen dem Verbraucher und dem Erzeuger sehr erwünscht.

Möge diese Abhandlung als Anregung dazu dienen.

Literatur

[1] *Rikli, H.:* Mechanischer Sicherheitsgrad grosser Turbogeneratoren. Bull. SEV Bd. 21(1930), Nr. 11, S. 357...365.

[2] *Pohl, R.:* Mechanische Probleme bei grossen Turbogeneratoren. Elektrotechn. Z. Bd. 53(1932), Nr. 46, S. 1099...1101; Nr. 48, S. 1151...1154.

[3] *Mauer-Korschan:* Stahl und Eisen 1933, S. 209...215.
Mauer-Gummert: Stahl und Eisen 1934, S. 1281...1289.
Coupette: Stahl und Eisen 1941, S. 1013...1022.

[4] *Hunziker, E.:* Grosse Dreiphasen-Generatoren. Bull. SEV Bd. 21(1930), Nr. 14, S. 445...455.

Adresse des Autors:
Ing. *Jiři Novák*, Kollárova 18, Plzeň, Č.S.R.

Die Eigenfrequenzen der einlagigen Zylinderspule bei Spannungsstössen

Von *B. Heller, J. Hlávka* und *A. Veverka*, Prag

621.318.4.015.33

Es werden die Eigenfrequenzen der einlagigen Zylinderspule bei Spannungsstössen unter Berücksichtigung der gegenseitigen Induktivität der einzelnen Windungen sowohl für die Spule mit geerdetem Wicklungsende, als auch mit freiem Wicklungsende berechnet. Die abgeleiteten Frequenzbeziehungen, welche die Abhängigkeit der zeitlichen Frequenz von der räumlichen Frequenz darstellen, werden eingehend besprochen.

L'auteur s'occupe du calcul des fréquences propres d'une bobine cylindrique à une seule couche, soumise à des chocs de tension, en tenant compte de l'inductance mutuelle des spires, dans le cas où l'extrémité de la bobine est mise à la terre et dans celui où l'extrémité est libre. Les rapports entre la fréquence dans le temps et la fréquence dans l'espace font ensuite l'objet d'une analyse détaillée.

Bekanntlich verhält sich eine Spule gegenüber Spannungsstössen wie ein kompliziertes, aus Induktivitäten und Kapazitäten zusammengesetztes Gebilde. Zu Beginn des Stossvorganges überwiegt der Einfluss der Kapazitäten, während später die Strom- und Spannungsverhältnisse hauptsächlich durch die Induktivitäten festgelegt werden. Im Zwischenbereich treten Ausgleichvorgänge auf, welche einen kontinuierlichen Übergang des Anfangszustandes in den Endzustand vermitteln.

Wird in erster Näherung die Spule als leitungsähnliches Gebilde aufgefasst und trifft ein rechteckiger Spannungsstoss von der Grösse U_1 auf die Spule auf, so ist nach bekannten Gesetzen die Spannung am Spulenanfang

$$U = 2\,U_1 \frac{Z_s}{Z_s + Z_1} \qquad (1)$$

Dabei bedeutet Z_s den Wellenwiderstand der Spule und Z_1 den Wellenwiderstand der Leitung. Da $Z_s \gg Z_1$ ist, wird folglich

$$U = 2\,U_1$$

Für das Folgende wird $U = 1$ angenommen (Einheitsstoss).

I. Die Konstanten der einlagigen Zylinderspule

Jede Windung der Spule besitzt pro Längeneinheit, bezogen auf die Spulenachse, Kapazität gegenüber Erde von der Grösse C_1 und Kapazität gegenüber benachbarten Windungen von der Grösse C_2. Weiter ist jede Windung mit einem magnetischen Feld verkettet, welches aus dem Eigenfeld der betrachteten Windung und den Feldern, verursacht durch die übrigen Windungen der Spule, besteht. Für das resultierende magnetische Feld, welches mit der Windung am Ort x (gemessen längs der Spulenachse) verkettet ist, gilt daher:

$$\Phi(x) = \int_0^1 M(x, \xi)\, i(\xi)\, \mathrm{d}\xi \qquad (2)$$

Dabei bedeutet $M(x, \xi)$ den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zweier Windungen, welche sich an den Orten x und ξ befinden, $i(\xi)$ ist der Strom in der Windung (ξ). Weiter ist die axiale Länge der Spule der Einfachheit halber gleich eins angenommen.

Da der Stromverlauf in der Spule sich von Windung zu Windung ändert, folgt aus Gl. (2), dass es nicht möglich ist, jeder Windung einen eindeutigen Induktionskoeffizienten zuzuordnen.

Wird die Eigeninduktivität einer Windung mit M_0 bezeichnet, so gilt für das Verhältnis $\frac{M}{M_0}$ in Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{a}{r}$ (a Windungsabstand, r Spulenradius) in Luft der Verlauf nach Fig. 1.

Befindet sich innerhalb der Spule massives Metall oder eine kurzgeschlossene Sekundärwicklung, wodurch das magnetische Feld innerhalb der Spule zum Teil abgeschirmt ist, so wird in diesem Fall der Verlauf von $\frac{M}{M_0}$ durch Fig. 2 dargestellt.

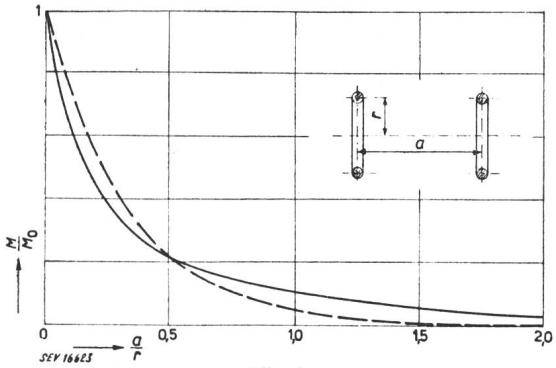

Fig. 1
Verlauf der Gegeninduktivität zweier Windungen in Luft

Um zu einfachen mathematischen Beziehungen zu gelangen, wurde versucht, die Kurven in Fig. 1 und Fig. 2 durch Exponentialfunktionen zu approximieren. In Fig. 1 ist die Funktion $\frac{M}{M_0} = e^{-3{,}15\frac{a}{r}}$ und in Fig. 2 die Funktion $\frac{M}{M_0} = e^{-2{,}2\frac{a}{b}}$ gestrichelt eingetragen. Die Exponentialfunktionen stellen eine gute Näherung an den tatsächlichen Verlauf dar.

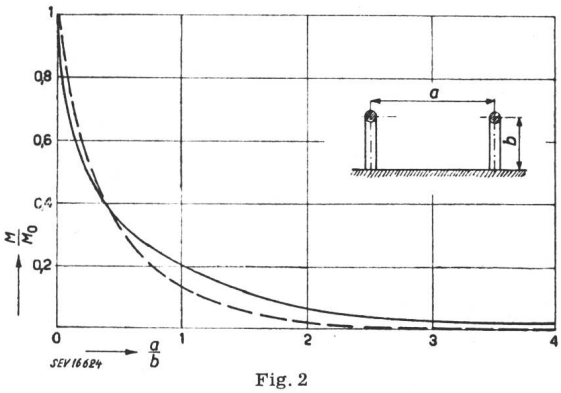

Fig. 2
Verlauf der Gegeninduktivität zweier Windungen bei Abschirmung des Feldes im Spuleninnern

Allgemein kann daher angesetzt werden:

$$M(x, \xi) = M_0 \, e^{-\lambda|\xi - x|} \tag{3}$$

Da eine Spule von der Länge eins zugrunde gelegt ist, so gilt für eine Spule von der Länge l in Luft

$$\lambda = 3{,}15 \frac{l}{r}$$

Und für eine abgeschirmte Spule

$$\lambda = 2{,}2 \frac{l}{b}$$

II. Der Ausgleichvorgang der einlagigen Zylinderspule

Im ersten Augenblick nach Auftreffen des Stosses auf die Spule bildet sich eine Spannungsverteilung $u(x, 0)$ aus, welche nur durch die Anordnung der Kapazitäten bestimmt ist. (In Wirklichkeit tritt diese Spannungsverteilung erst nach rund 0,15 s auf, da das magnetische Feld des Verschiebungsstromes keine plötzliche Spannungsänderung gestattet.) Der darauffolgende Ausgleichvorgang wird dadurch ausgelöst, dass die Endverteilung mit der Anfangsverteilung der Spannung längs der Spule im allgemeinen nicht übereinstimmt.

Für die einlagige Zylinderspule gilt das Ersatzschema Fig. 3. Für ein Spulenelement, bezogen auf die axiale Länge dx, gilt dann:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C_1 \frac{\partial u}{\partial t} + C_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \tag{4}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = N \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{5}$$

$$\Phi = \int_0^x N M_0 \, e^{-\lambda(x-\xi)} i(\xi) \, d\xi + \int_x^l N M_0 \, e^{-\lambda(\xi - x)} i(\xi) \, d\xi \tag{6}$$

N bedeutet dabei die Windungszahl der Spule.

Aus Gl. (6) folgt nach zweimaliger Differentiation:

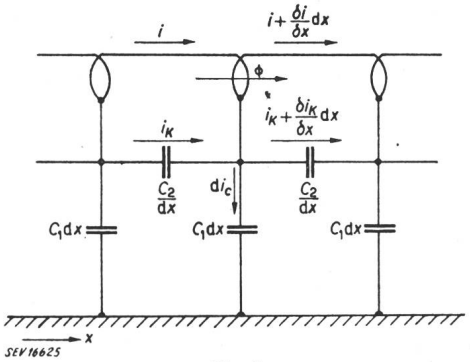

Fig. 3
Ersatzschema der einlagigen Zylinderspule

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \lambda^2 \Phi - 2 \lambda N M_0 i \tag{7}$$

Aus Gl. (4), (5), (7) erhält man durch Elimination folgende Differentialgleichung:

$$\frac{1}{N^2 M_0} \left(\frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \right) = C_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - C_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial t^2} \tag{8}$$

Analoge Gleichungen gelten für Strom i und Spannung u. Zu Lösung von Gl. (8) wurde angesetzt: $\Phi = \text{Konst.} \, e^{j\alpha x} \cdot e^{j\omega t}$. Durch Einsetzen in Gl. (8) folgt folgende Beziehung zwischen α und ω:

$$\omega^2 = \frac{\lambda \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{\lambda}}{2 N^2 M_0 (C_1 + C_2 \alpha^2)} \tag{9}$$

bzw. $$\alpha^2 = -\frac{\lambda^2 - 2N^2 M_0 \omega^2 C_2 \lambda}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda^2 - 2N^2 M_0 \omega^2 C_2 \lambda}{2}\right)^2 + 2\lambda N^2 M_0 \omega^2 C_1} \quad (10)$$

Aus Gl. (10) folgt, dass jedem $\omega^2 > 0$ zwei Werte α_1^2, α_2^2 entsprechen, wobei $\alpha_1^2 > 0$, $\alpha_2^2 < 0$ ist. Daher hat das allgemeine Integral von Gl. (8) die Form:

$$\Phi = \sum_\nu \left(a_{1\nu}\, e^{j\alpha_{1\nu}x} + a'_{1\nu} e^{-j\alpha_{1\nu}x} + a_{2\nu}\, e^{j\alpha_{2\nu}x} + a'_{2\nu} e^{-j\alpha_{2\nu}x}\right) \varepsilon^{j\omega_\nu t} \quad (11)$$

und enthält sowohl harmonische als auch hyperbolische Funktionen des Ortes.

Wie aus Gl. (10) zu ersehen ist, gilt mit $\omega^2 \to \infty$ ebenfalls $\alpha^2 \to \infty$. Eine Grenzfrequenz, welche die Theorie von Wagner und Rüdenberg fordert, existiert daher nicht.

Wie eine nähere Diskussion von Gl. (9) zeigt, geht diese bei geeigneter Wahl des Parameters λ in die Frequenzformeln von Blume und Boyajan, bzw. von Wagner und Rüdenberg über.

Die Theorie von Blume und Boyajan enthält die Annahme einer sehr guten Kopplung auch räumlich sehr weit entfernter Windungen miteinander. Dem entspricht nach früherem ein Wert $\lambda \ll 1$. Damit folgt aus Gl. (9)

$$\omega^2 \cong \frac{\alpha^4}{2N^2 M_0 (C_1 + C_2\alpha^2)} \quad (12a)$$

während nach Blume-Boyajan gilt

$$\omega^2 = \frac{\alpha^4}{L C_1 \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\alpha^2\right)} \quad (12b)$$

Im Gegensatz zu Blume-Boyajan berücksichtigen Wagner und Rüdenberg nur eine gegenseitige induktive Beeinflussung von räumlich sehr nahe beieinander liegenden Windungen. Dem entspricht ein Wert $\lambda \gg 1$. Solange die Ungleichung $\lambda\alpha^2 \gg \frac{\alpha^4}{\lambda}$ gilt, kann nach Gl. (9) geschrieben werden:

$$\omega^2 = \frac{\lambda^2\alpha^2}{2N^2 M_0 (C_1 + C_2\alpha^2)} \quad (13a)$$

welche Gleichung vollkommen der Frequenzbeziehung nach Rüdenberg

$$\omega^2 = \frac{\alpha^2}{L C_1 \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\alpha^2\right)} \quad (13b)$$

entspricht. Wie erwähnt, liegt der Ableitung von Gl. (13a) die Ungleichung $\lambda\alpha^2 \gg \frac{\alpha^4}{\lambda}$ zugrunde. Für Werte $\alpha \geqq \lambda$ ist diese Ungleichung nicht mehr erfüllt, so dass dann Gl. (13a) keine Geltung besitzt.

Der Verlauf der Funktion $\omega = \omega(\alpha)$ nach Gl. (9) ist für $\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{100}$ und $\lambda = 1$ in Fig. 4 und für $\lambda = 20$ in Fig. 5 dargestellt; ferner sind für diese Werte die entsprechenden Kurven nach Blume-Boyajan [Gl. (12a)] und Rüdenberg [Gl. (13a)] eingetragen. Wie aus Fig. 4 und 5 zu ersehen ist, ist für $\lambda = 1$

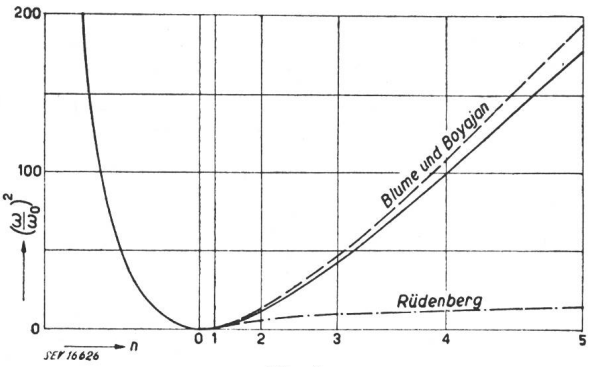

Fig. 4

Abhängigkeit der zeitlichen Frequenz von der räumlichen Frequenz bei starker magnetischer Kopplung der einzelnen Windungen

Die räumliche Frequenz ist im quadratischen Maßstab aufgetragen

der Frequenzverlauf nach Gl. (9) fast identisch mit dem nach Blume-Boyajan, während umgekehrt für $\lambda = 20$ im Bereich $\frac{\alpha}{\pi} \ll \frac{20}{\pi} = 7$ die Rüdenbergsche Formel eine viel bessere Näherung an Gl. (9) darstellt als die Beziehung nach Blume-Boyajan. Zum Vergleich der verschiedenen Frequenzbeziehungen sind in Tabelle I die Werte $\frac{\omega_2}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_1}, \frac{\omega_6}{\omega_1}$, gerechnet

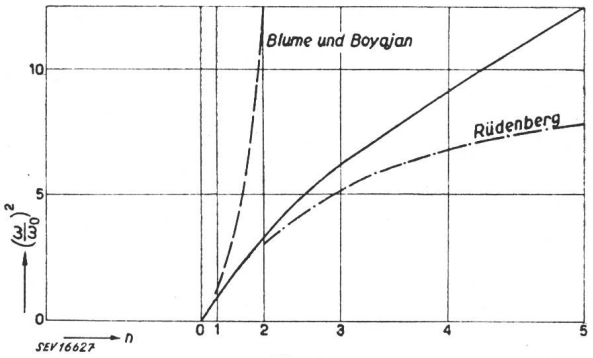

Fig. 5

Abhängigkeit der zeitlichen Frequenz von der räumlichen Frequenz bei schwacher magnetischer Kopplung der einzelnen Windungen

Maßstab wie in Fig. 4

nach Gl. (9), Gl. (12b) (Blume-Boyajan), Gl. (13b) (Rüdenberg) und gemessen von Bewley an einem dreiphasigen 5000-kVA-Transformator (Discussion-Transactions AIEE 1940, S. 1257) eingetragen. Wie aus Tabelle I zu ersehen ist, gibt Gl. (9) die experimentellen Daten gut wieder, selbst für die sechste Harmonische, für welche grosse Abweichungen sowohl nach Blume-Boyajan als auch nach Rüdenberg gegenüber der Messung auftreten.

Vergleich der verschiedenen Frequenzbeziehungen

Tabelle I

	$\frac{\omega_2}{\omega_1}$	$\frac{\omega_3}{\omega_1}$	$\frac{\omega_6}{\omega_1}$
Gl. 9	3,3	6,7	11,9
Gl. 12b	3,6	7,1	19
Gl. 13b	1,8	2,4	3
Versuch	3,3	7,2	13

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\alpha^4}{\lambda} = \eta \tag{14}$$

so folgt aus Gl. (9), dass die Spule mit der Frequenz

$$\omega^2 = \frac{\eta}{2 N^2 M_0 C_1} \tag{15}$$

schwingt.

Wie im Anhang näher erläutert ist, gilt für die Spule mit freiem Wicklungsende:

$$\omega^2 = \frac{3}{N^2 M_0 C_1} \tag{16}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\alpha^4}{\lambda} = 6 \tag{17}$$

Die Frequenz nach Gl. (15) ist identisch mit der Frequenz, welche nach Willheim als Grundschwingung bei einer Spule mit freiem Wicklungsende auftritt (Elektrotechn. und Maschinenbau 1932, S. 16).

Aus diesen Ausführungen folgt, dass Gl. (9) grundsätzlich alle in der Literatur angeführten Frequenzbeziehungen als Spezialfälle enthält.

Die Lösungen der Differentialgleichung (8) von der Form $\varepsilon^{j\alpha x}\, \varepsilon^{j\omega t}$, wo α und ω reelle Grössen sind, können physikalisch sowohl als stehende Wellen als auch als fortschreitende Wellen aufgefasst werden.

Die Geschwindigkeit der fortschreitenden Wellen beträgt dabei

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \sqrt{\frac{\lambda + \frac{\alpha^2}{\lambda}}{2 N^2 M_0 (C_1 + C_2 \alpha^2)}} \tag{18}$$

Aus Gl. (18) folgt, dass die Geschwindigkeit der einzelnen Wellen eine Funktion der räumlichen Frequenz ist. Es besteht daher Dispersion, und die Wellenform verändert sich dauernd. Für hohe Werte von α besteht eine Grenzgeschwindigkeit

$$v_g = \sqrt{\frac{1}{2 N^2 M_0 \lambda C_2}} \tag{18a}$$

Wird in erster Näherung angenommen, dass alle hochfrequenten Wellen sich mit dieser Geschwindigkeit fortpflanzen, so ist es möglich, die maximale Beanspruchung der einzelnen Windungen gegeneinander in Form einer fortschreitenden Welle darzustellen, da für die Windungsbeanspruchung in erster Reihe die hochfrequenten Wellen massgebend sind. (Dies gilt allerdings nur, wenn die hyperbolische Verteilung vernachlässigbar ist.) Die hochfrequenten Wellen, welche grossen Werten α entsprechen und praktisch die gleiche Geschwindigkeit besitzen, werden sehr bald gedämpft, und es bleiben nur die niederfrequenten, mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortschreitenden Wellen übrig.

Im allgemeinen bietet daher die Annahme von fortschreitenden Wellen keinen Vorteil gegenüber der Annahme stehender Wellen, ganz abgesehen von den hyperbolischen Gliedern in Gl. (11), welche prinzipiell immer vorhanden sind und deren Erklärung durch fortschreitende Wellen mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist.

Gilt für eine Spule die Beziehung:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{C_2}{C_1} \tag{19}$$

so folgt aus Gl. (9)

$$\omega^2 = \frac{\alpha^2 \lambda}{2 N^2 M_0 C_1} \frac{1 + \frac{\alpha^2}{\lambda^2}}{1 + \alpha^2 \frac{C_2}{C_1}} = \frac{\alpha^2 \lambda}{2 N^2 M_0 C_1} \tag{20}$$

In diesem Fall verschwinden in der räumlichen Verteilung die hyperbolischen Glieder, die Geschwindigkeit der einzelnen Wellen

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \sqrt{\frac{\lambda}{2 N^2 M_0 C_1}} \tag{21}$$

ist konstant und unabhängig von α. Es findet daher keine Dispersion statt und ein Wellenzug schreitet innerhalb der Spule ohne Verzerrung fort. Eine Spule, deren Konstanten die Gl. (17) erfüllen, soll daher im folgenden als verzerrungsfreie Spule (analog zur verzerrungsfreien Leitung) bezeichnet werden.

Wegen der Wichtigkeit dieses Ergebnisses soll noch eine direkte Ableitung auf Grund der Differentialgleichung (8) gegeben werden. Differentialgleichung (8) kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{\lambda}{2 N^2 M_0 C_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\Phi - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Phi - \frac{C_2}{C_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right) \tag{8a}$$

Gilt Gl. (19), so kann eine neue Veränderliche

$$\Psi = \frac{2 N M_0}{\lambda} i = \Phi - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

eingeführt werden.

Dann gilt:

$$\frac{\lambda}{C_1 2 N^2 M_0} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \tag{22}$$

Gl. (22) ist aber schon die Wellengleichung, der Strom i ist daher als fortschreitende, unverzerrte Welle mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{\lambda}{C_1 2 N^2 M_0}}$ dar-

stellbar. Das gleiche gilt für die Spannung u und den Fluss Φ.

Mit $\Phi = \mathrm{f}\left(x - \sqrt{\frac{\lambda}{2\,N^2 C_1 M_0}}\,t\right)$ erhält man:

$$u = N\sqrt{\frac{\lambda}{2\,CN^2 M_0}}\int \mathrm{f}'\,\mathrm{d}x =$$

$$\sqrt{\frac{\lambda}{2\,C_1 M_0}}\,\mathrm{f}\left(x - \sqrt{\frac{\lambda}{2\,N^2 C_1 M_0}}\,t\right)$$

$$i = \left(\lambda^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)\frac{1}{2\lambda N} = \frac{1}{2\lambda N}\left[\lambda^2\mathrm{f} - \mathrm{f}''\right]$$

Für den Wellenwiderstand der Spule gilt dann:

$$Z = \frac{u}{i} = N\sqrt{\frac{\lambda}{2\,C_1 M_0}}\,\frac{\mathrm{f}\,2\,\lambda N}{\lambda^2\mathrm{f} - \mathrm{f}''} \qquad (23)$$

Der Wellenwiderstand der verzerrungsfreien Spule ist daher im allgemeinen nicht konstant, sondern eine fortschreitende Welle und als solche eine Funktion der Zeit und des Ortes. Nur im Falle, wenn gilt: $\mathrm{f}(x - vt) = A\,\varepsilon^{\beta(x-vt)}$ reduziert sich der Wellenwiderstand auf einen konstanten Wert. Trifft ein Spannungsstoss auf eine verzerrungsfreie Spule auf, so bildet sich im ersten Augenblick eine Spannungsverteilung längs der Spule aus, welche nur durch die Längs- und Querkapazitäten festgelegt ist. Wird für diese in erster Näherung ein exponentiell abklingender Verlauf angenommen, so folgt, dass bei der verzerrungsfreien Spule der Wellenwiderstand für die einziehende Welle konstant ist.

III. Die Spule mit geerdetem Wicklungsende

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (8) für den Strom hat entsprechend Gl. (11) die Form:

$$i = A\cos\alpha_1 x + B\sin\alpha_1 x + P\cosh\alpha_2 x + R\sinh\alpha_2 x \qquad (24)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten stehen auf Grund der Randbedingungen $x = 0 \rightarrow u = 0$, $x = 1 \rightarrow u = 0$ zwei Gleichungen zur Verfügung.

Weitere zwei Gleichungen folgen aus Gl. (6), wenn in diese für den Strom nach Gl. (24) eingesetzt wird und die entsprechenden Ausdrücke mit der Lösung nach Gl. (11) verglichen werden. Damit erhält man:

$$\frac{-A\lambda + B\alpha_1}{\alpha_1^2 + \lambda^2} - \frac{P\lambda - R\alpha_2}{\lambda^2 - \alpha_2^2} = 0 \qquad (25)$$

$$\frac{\sin\alpha_1(\alpha_1 A - \lambda B) - \cos\alpha_1(\lambda A + \alpha_1 B)}{\lambda^2 + \alpha_1^2} - \frac{\sinh\alpha_2(\alpha_2 P + \lambda R) + \cosh\alpha_2(\lambda P + \alpha_2 R)}{\lambda^2 - \alpha_2^2} \qquad (26)$$

Daraus folgt für den Fluss

$$\Phi = N M_0\left[\frac{2\lambda}{\lambda^2 + \alpha_1^2}(A\cos\alpha_1 x + B\sin\alpha_1 x) + \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \alpha_2^2}(P\cosh\alpha_2 x + R\sinh\alpha_2 x)\right]\varepsilon^{j\omega t} \qquad (27)$$

Damit folgt für die Spannung durch Integration von Gl. (5)

$$u = N^2 M_0\left[\frac{2\frac{\lambda}{\alpha_1}(A\sin\alpha_1 x - B\cos\alpha_1 x)}{\lambda^2 + \alpha_1^2} + \frac{2\frac{\lambda}{\alpha_2}(P\sinh\alpha_2 x + R\cosh\alpha_2 x)}{\lambda^2 - \alpha_2^2}\right] j\omega\,\varepsilon^{j\omega t} \qquad (28)$$

Aus den Randbedingungen $u(0) = 0$, $u(1) = 0$ folgt:

$$\frac{-B}{\alpha_1(\lambda^2 + \alpha_1^2)} + \frac{R}{\alpha_2(\lambda^2 - \alpha_2^2)} = 0 \qquad (29)$$

$$\frac{A\sin\alpha_1 - B\cos\alpha_1}{\alpha_1(\lambda^2 + \alpha_1^2)} + \frac{P\sinh\alpha_2 + R\cosh\alpha_2}{\alpha_2(\lambda^2 - \alpha_2^2)} \qquad (30)$$

Die Gleichungen (25), (26), (29), (30) stellen ein System von vier homogenen Gleichungen für die Konstanten A, B, P, R dar. Damit dieses System von null verschiedene Lösungen zulässt, muss die Determinante des Systemes identisch verschwinden. Diese Bedingung führt zu einer Gleichung für α. Damit erhält man:

$$\lambda^2\alpha_1\alpha_2(\cos\alpha_1\cosh\alpha_2 - 1) - \lambda\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\sin\alpha_1\cosh\alpha_2 + \lambda\alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\cos\alpha_1\sinh\alpha_2 - \frac{\lambda^4 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2}{2}\sin\alpha_1\sinh\alpha_2 = 0 \qquad (31)$$

Weiter müssen die zum gleichen ω gehörenden zwei räumlichen Frequenzen α_1, α_2 wegen Gl. (9) folgende Beziehung erfüllen:

$$\alpha_2^2 = \frac{\alpha_1^2 + \lambda^2}{1 + \frac{C_2}{C_1}\alpha_1^2} \qquad (32)$$

Die räumlichen Frequenzen der Spule mit geerdetem Wicklungsende sind dann die Wurzeln der Gl. (31) und (32).

Da das Verhältnis $\frac{C_2}{C_1}$ bei den angeführten Spulen $\ll 1$ ist $\left(\frac{1}{25} \ldots \frac{1}{900}\right)$, gilt für die niedrigen räumlichen Frequenzen: $\frac{C_2}{C_1}\alpha_{1\nu}^2 \ll 1$; damit folgt in diesem Bereich:

$$\alpha_{2\nu}^2 \cong \alpha_{1\nu}^2 + \lambda^2 \qquad (33)$$

Auf Grund dieser Vereinfachung wurde für die räumliche Grundfrequenz α_{11} das Gleichungssystem

(31) und (32) für verschiedene Werte λ gelöst und die erhaltenen Wurzeln α_{11} als Funktion des Parameters λ in Fig. 6 eingetragen.

Wie aus Fig. 6 zu ersehen ist, ist die Abweichung der räumlichen Grundfrequenz von π im ganzen Bereich von λ nur gering. Die hyperbolischen Glie-

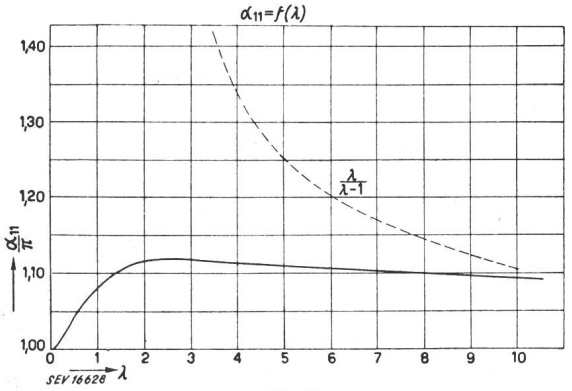

Fig. 6
Verlauf der räumlichen Eigenfrequenz in Abhängigkeit von der magnetischen Kopplung der einzelnen Windungen für die Spule mit geerdetem Wicklungsende

der spielen nur eine untergeordnete Rolle. In erster Näherung kann daher angenommen werden, dass die Spule mit geerdetem Wicklungsende räumlich in Vielfachen von π schwingt.

IV. Die Spule mit freiem Wicklungsende

Zur Bestimmung der Konstanten A, B, P, R sind hier die Randbedingungen $u(0) = 0$, $i(1) = 0$ zu benützen. Damit erhält man:

$$\frac{-B}{\alpha_1(\lambda^2+\alpha_1^2)} + \frac{R}{\alpha_2(\lambda^2-\alpha_1^2)} = 0 \qquad (34)$$

$$A\cos\alpha_1 + B\sin\alpha_1 + P\cosh\alpha_2 + R\sinh\alpha_2 = 0 \qquad (35)$$

Durch Nullsetzen der Determinante folgt weiter:

$$\begin{aligned}&\lambda^2\left[\alpha_2^2(\alpha_2^2-\lambda^2)+\alpha_1^2(\alpha_1^2+\lambda^2)\right]+\\&\sin\alpha_1\cosh\alpha_2\left[(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(2\lambda^2-\alpha_2^2)\right]\alpha_1+\\&\cos\alpha_1\cosh\alpha_2\left[\alpha_2^2(\alpha_2^2+4\alpha_1^2+\lambda^2)+\right.\\&\left.\alpha_1^2(\alpha_1^2-\lambda^2)\right]\lambda+\cos\alpha_1\sinh\alpha_2\left[(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\cdot\right.\\&\left.(2\lambda^2+\alpha_1^2)\right]\alpha_2+\sin\alpha_1\sinh\alpha_2\,\lambda^3\alpha_1\alpha^2=0\end{aligned} \qquad (36)$$

Für verschiedene Werte von λ wurde das Gleichungssystem (33) und (36) numerisch für die räumliche Grundfrequenz α_{11} gelöst und die erhaltenen Werte in Fig. 7 eingetragen. Für kleine Werte λ gilt nach Gl. (17): $\dfrac{\alpha}{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} = 0{,}99\sqrt[4]{\lambda}$, während für grosse Werte λ mit $\alpha_{21} \cong \lambda$ gilt:

$$\alpha_{11} \cong \frac{\pi}{2}\,\frac{2\lambda}{2\lambda-1}$$

Wie aus Fig. 7 zu ersehen ist, liegt der tatsächliche Kurvenverlauf $\dfrac{\alpha}{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} = f(\lambda)$ zwischen den beiden Kurven $\dfrac{\alpha}{\dfrac{\pi}{2}} = 0{,}99\sqrt[4]{\lambda}$ und $\dfrac{\alpha}{\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{2\lambda}{2\lambda-1}$ und schmiegt sich in den entsprechenden Bereichen diesen Näherungen gut an. Aus Fig. 7 ist zu ersehen, dass für $\lambda > 1$, für α_{11} in erster Näherung $\alpha_{11} \cong \dfrac{\pi}{2}$ folgt. Die Spule schwingt für $\lambda > 1$ in Vielfachen von $\dfrac{\pi}{2}$. Für Werte $\lambda < 1$ ist diese Annahme aber

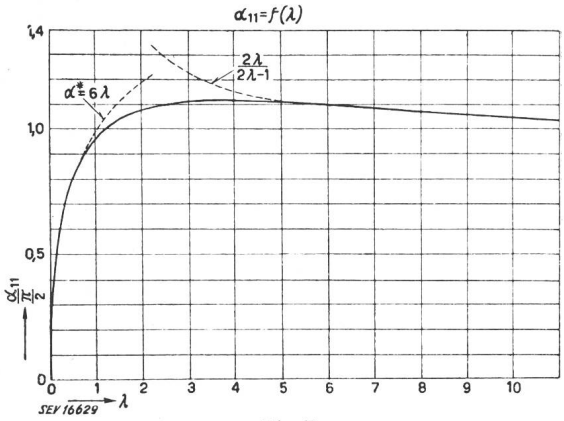

Fig. 7
Verlauf der räumlichen Eigenfrequenz in Abhängigkeit von der magnetischen Kopplung der einzelnen Windungen für die Spule mit freiem Wicklungsende

nicht statthaft, für die Grundfrequenz der räumlichen Verteilung gilt $\dfrac{\pi}{2} > \alpha_{11} > 0$, die hyperbolischen Glieder sind nicht mehr vernachlässigbar. Die Spule schwingt in diesem Bereich guter magnetischer Kopplung zeitlich mit der Frequenz

$$\omega = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{3}{M_0 C_1}} \text{ entsprechend Gl. (16).}$$

Anhang

Die Frequenz der freien Schwingungen der einlagigen Zylinderspule mit freiem Wicklungsende und unendlich guter magnetischer Kopplung

Hier gilt:

$$\Phi = -NM_0\int_0^1 i\,dx = NM_0 a$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -N\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -C_1\frac{\partial u}{\partial t} + C_2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}$$

Durch Elimination folgt, da a von x unabhängig ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -N^2 M_0\frac{da}{dt}, \quad -\frac{1}{C_1}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -N^2 M_0\frac{d^2 a}{dt^2}$$

Durch Integration erhält man:

$$i = N^2 M_0 C_1 \frac{d^2 a}{d t^2} \frac{x^2}{2} + mx + n$$

$$u = - N^2 M_0 C_1 \frac{d a}{d t} x + p$$

wobei m, n, p Integrationskonstanten sind.

Auf Grund der Randbedingungen folgt:

für $x = 0$, $u = 0$, daraus $p = 0$

für $x = 1$, $i = 0$, daraus $u = -\frac{N^2 M_0 C_1}{2} \frac{d^2 a}{d t^2} - m$

Damit: $u = - N^2 M_0 \frac{d a}{d t} x$,

$$i = \frac{N^2 M_0 C_1}{2} \frac{d^2 a}{d t^2} (x^2 - 1) + m (x - 1)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Ausgangsgleichung erhält man:

$$m = 0, \quad a = \frac{N^2 M_0 C_1}{2} \frac{d^2 a}{d t^2} \left(- \frac{2}{3} \right) = - \frac{N^2 M_0 C_1}{3} \frac{d^2 a}{d t^2}$$

Aus dieser Differentialgleichung für a folgt, dass a zeitlich durch eine harmonische Schwingung mit der Frequenz $\omega^2 = \frac{3}{N^2 M_0 C_1}$ dargestellt wird.

Durch Vergleich mit Gl. (15) folgt weiter:

$$\frac{\eta}{2 N^2 M_0 C_1} = \frac{3}{N^2 M_0 C_1}, \text{ oder } \eta = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\alpha^4}{\lambda} = 6$$

Zusammenfassung

Zuerst wird das resultierende magnetische Feld der einlagigen Zylinderspule bei Berücksichtigung der gegenseitigen Induktivität auch entfernter Spulenelemente voneinander bestimmt und gezeigt, dass es möglich ist, den Koeffizienten der gegenseitigen Induktivität durch eine Exponentialfunktion mit geeignet gewähltem Dekrement darzustellen. Der Ausgleichvorgang führt auf ein System von Integral-Differentialgleichungen, welches als exakte Lösung die Summe von räumlich harmonischen und hyperbolischen Funktionen besitzt.

Es wird gezeigt, dass die abgeleitete Frequenzbeziehung (9), welche die Abhängigkeit der zeitlichen Frequenz von der räumlichen Frequenz darstellt, die Frequenzbeziehungen nach Wagner-Rüdenberg, nach Blume-Boyajan und nach Willheim als Spezialfälle enthält, in welche Gleichung (9) bei geeigneter Wahl des Parameters übergeht. Der Ausgleichvorgang kann physikalisch sowohl durch stehende als auch durch fortschreitende Wellen, welche aber beim Eindringen in die Spule verzerrt werden, dargestellt werden. Eine Grenzfrequenz für fortschreitende Wellen, welche die Theorie von Wagner-Rüdenberg fordert, existiert nicht. Als nächstes wird die Spule behandelt, deren Konstanten Gl. (19) erfüllen. In einer solchen «verzerrungsfreien» Spule besteht für fortschreitende Wellen keine Dispersion. Die Eigenschaften dieser Spule werden näher untersucht, und es wird gezeigt, dass Spannung, Strom und Wellenwiderstand sich bei einer solchen Spule als fortschreitende, unverzerrte Wellen darstellen lassen. Weiter werden die Sonderfälle der Spule mit geerdetem und freiem Wicklungsende eingehend behandelt, und wird ihre exakte Lösung angegeben. Es wird gezeigt, dass bei der Spule mit geerdetem Wicklungsende sich die räumliche Verteilung von Spannung und Strom in guter Näherung durch harmonische Funktionen darstellen lässt, deren Wellenlänge ganze Vielfache von π beträgt. Die hyperbolischen Glieder sind hier vernachlässigbar. Bei der Spule mit freiem Wicklungsende dagegen ist die räumliche Grundfrequenz in weiten Grenzen veränderlich. Für Werte $\lambda > 1$ kann in erster Näherung die Grundfrequenz gleich $\frac{\pi}{2}$ gesetzt werden, während für Werte $\lambda < 1$ dies auch angenähert nicht möglich ist. In diesem Falle müssen auch die hyperbolischen Glieder berücksichtigt werden, da ihre Vernachlässigung zu ganz falschen Resultaten führen würde.

Literatur

[1] *Wagner, K. W.:* Das Eindringen einer elektromagnetischen Welle in eine Spule mit Windungskapazitäten. Elektrotechn. u. Maschinenbau Bd. 33(1915), Nr. 8, S. 89...92; Nr. 9, S. 105...108.

[2] *Blume, L. F.*, u. *A. Boyajan:* Abnormal Voltages within Transformers. Trans". Amer. Inst. Electr. Engr". Bd. 38 (1919), S. 577...620.

[3] *Willheim, R.:* Die Gewitterfestigkeit des Drehstromtransformators. Elektrotechn. u. Maschinenbau Bd. 50(1932), Nr. 1, S. 16...21; Nr. 2, S. 28...31.

[4] *Elsner, R.:* Neuere Untersuchungen zur Frage der Stossbeanspruchung in Transformatoren. Arch. Elektrotechn. Bd. 30(1936), Nr. 6, S. 368...386.

[5] *Pirenne, J.:* Théorie générale des phénomènes oscillatoires dans les enroulements des transformateurs. Rev. gén. Electr. Bd. 47(1940), Nr. 1/2, S. 19...29; Nr. 3/4, S. 53...63.

[6] *Rüdenberg, R.:* Performance of Travelling Waves in Coils and Windings. Trans". Amer. Inst. Electr. Engr". Bd. 59 (1940), S. 1031, Discussion S. 1257.

[7] *Bewley, L. V., J. H. Hagenguth* u. *F. R. Jackson:* Methodes of Determining Natural Frequencies in Coils and Windings. Trans". Amer. Instr. Electr. Engr". Bd. 60(1941), S. 1145 ...1150, Discussion S. 1361...1363.

[8] *Heller, E., J. Hlávka* u. *A. Veverka:* Nárazové zjevy v transformátorech. Elektrotechn. Obz. Bd. 37(1948), Nr. 6, S. 93...115.

Adresse des ersten Autors:
Dr. *B. Heller*, Výzkum KOVO, Malostranské nábřeží 1, Praha III.