Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 39 (1948)

Heft: 24

Artikel: Die Resonanzerscheinungen beim Schwingkreis

Autor: Gruyter, Erwin de

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1059301

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Nach dem gleichen Prinzip sind auch die Tarife für die Energieabgabe an Industriebetriebe aufgebaut. Den allgemeinen Industrietarif zeigt Tab. III.

Diese Preise sind nach der unten erwähnten Formel zu erhöhen (siehe Ziff. 3).

Gemäss Wiederverkäufertarif der staatlichen Kraftwerkverwaltung wird den Genossenschaften, die in landwirtschaftlichen Gebieten die Energie direkt verteilen, diese ab 3- oder 6-kV-Netz zu 5 Öre/kWh abgegeben, bei einem Umsatz von mindestens 1 GWh pro Jahr.

3. Preiskontrolle.

Eine staatliche Preiskontrollstelle sorgt für die möglichste Beibehaltung der Vorkriegspreise. Mit Rücksicht auf die Teuerung wurden jedoch die Elektrizitätswerke ermächtigt, sämtliche in den Verträgen mit Industriebetrieben vorgesehenen Preise sowie alle Tarife für neue und alte industrielle Abnehmer um 24 % zu erhöhen und zwar nach der Formel 0,3 $(y - 180)$ %, wo y den jeweils geltenden Lebenskostenindex gegenüber 1914 — heute 260 — und 180 den betreffenden Index für das Jahr 1939 bedeutet. Die Preiserhöhung gilt nur für die Energieabgabe an Industriebetriebe, die rund $^2/_3$ der erzeugten Energie verbrauchen. Dagegen sind die Tarife für Kleinabnehmer, d. h. die Haushaltungen und das Kleingewerbe, unverändert.

VI. Schlussfolgerungen

Die schwedische Elektrizitätswirtschaft hat sich in den letzten Jahren stark entwickelt und es wird mit einer längeren Dauer der ausserordentlichen Entwicklung gerechnet. Die Elektrizitätsversorgung ist in organisatorischer und betriebstechnischer Hinsicht durch eine enge Zusammenarbeit sämtlicher Elektrizitäts-Unternehmungen gekennzeichnet, wobei auch die staatlichen Kraftwerke eng mitarbeiten, ohne auf die Rechte und das Betätigungsgebiet der privaten Gesellschaften überzugreifen. Diese von den Schweden als «Schwedisches System» bezeichnete Methode führte zu einer gemeinsamen Betriebführung, die sich besonders während der Kriegszeit sehr gut bewährte und darum auch weiter beibehalten wird. Mit Recht können die Schweden darauf stolz sein.

Dank dieser engen Zusammenarbeit konnten bisher die auch in Schweden aufgetauchten weitergehenden Verstaatlichungstendenzen zurückgestellt werden, und es besteht allgemein der Wunsch, von dem bewährten System nicht abzuweichen.

Zur Deckung des weiteren Bedarfszuwachses wird der Ausbau der Wasserkräfte energisch gefördert. Bis zum Jahre 1953 soll die Jahreserzeugung um die Hälfte gegenüber 1947 gesteigert werden. Der für den Bau von Kraftwerken erforderliche jährliche Kapitalaufwand von durchschnittlich 60 000 000 Kr. vor 1939 stieg im vergangenen Jahr auf rund 225 000 000 Kr. Trotz der Teuerung, die für den Kraftwerkbau zu rund 70 % gegenüber 1939 angegeben wird, sind die Kosten der Energie aus Neuanlagen im allgemeinen nur etwa halb so hoch wie in der Schweiz. Dies zeigt einmal mehr, dass, je geringer die Energiepreise sind, desto intensiver die wirtschaftliche Unabhängigkeit kohlenarmer Länder durch den Ausbau der eigenen Wasserkräfte gefördert wird.

Adresse des Autors:
E. H. Etienne, Sektionschef des eidgenössischen Amtes für Elektrizitätswirtschaft, Bern.

Die Resonanzerscheinungen beim Schwingkreis

Von *Erwin de Gruyter*, Bern *)

621.396.611.1

Nachdem zu Anfang der Schwingkreis-Aufsätze des Verfassers im Bulletin SEV 1939, Nr. 19, S. 639 und 640 neben der eingehenden Behandlung der frequenzabhängigen Impedanz auch das Thema der Gesamt- und Teilspannungen und -Ströme und der Wirkleistung eines Schwingkreises angetönt wurde, soll jetzt eine ausführliche Behandlung folgen.

Im Senderbau ist die Kenntnis der Resonanzerscheinungen zur mechanischen und elektrischen Dimensionierung der Einzelteile und des Aufbaus unerlässlich. Aber auch die Schaltungstechnik allgemein kann grossen Nutzen daraus ziehen zur Berechnung von Spannungs-, Strom- und Phasentransformatoren, hauptsächlich für die Siebtechnik in abgestimmten Verstärkern, für die Gegenkopplungstechnik in Breitbandverstärkern und für die Brückenschaltungen der Messtechnik.

Die Wirkungsweise der gemischten Schwingkreisschaltungen wird durch Überführung ihrer Gleichungen in die Form der reinen Schaltungen mit Hilfe von Aequivalenzgleichungen für den Verlustwiderstand mathematisch sehr übersichtlich. Am Schluss erscheint eine Zusammenstellung der Aufsätze des Verfassers zum Thema «Filter».

L'auteur a fait paraître dans le Bulletin de l'ASE 1939, n° 19, p. 637...644, un article traitant des circuits oscillants, où il étudiait en détail la variation de l'impédance de ces circuits en fonction de la fréquence, mais où il ne donnait que des indications plus sommaires sur différents autres problèmes: celui de la chute de tension totale aux bornes du circuit et aux bornes de chacun de ses éléments, celui des différents courants ainsi que celui de la puissance active d'un circuit oscillant. L'objet du présent article est une étude plus approfondie de ces problèmes.

Dans la construction des émetteurs, il est nécessaire de tenir compte des phénomènes de résonance pour en calculer, tant au point de vue électrique qu'au point de vue mécanique, les éléments. De façon générale il en est de même pour tous les circuits, pour le calcul des transformateurs de tension, de courant ou de phase; plus en particulier c'est le cas dans la technique des filtres pour amplificateurs à résonance, dans la technique de contre-réaction pour amplificateurs à large bande de fréquence ou dans celle des ponts de mesure.

Les propriétés des circuits oscillants complexes sont étudiées mathématiquement avec beaucoup de clarté, en ramenant leurs équations à celles des circuits élémentaires. Dans ce but, on se sert pour représenter les pertes, de fonctions appropriées.

L'article se termine par une liste des publications de l'auteur sur le problème des filtres.

*) Eingang des Manuskripts: 4. Dezember 1944.

A. Reine Serie- und Parallelschaltung

Beim Seriekreis (Fig. 1) mit konstanter Spannung $\mathfrak{U}_s$ treten ausser der Stromresonanz, und damit der Spannungsresonanz am Widerstand $\mathfrak{R}_s$, noch zwei weitere Serieresonanz-Frequenzwerte auf, und zwar die der Spannungsresonanz an der Spule v_{Le} und am Kondensator v_{Ce} (Fig. 3). Beim entsprechenden, sich reziprok verhaltenden Parallelkreis

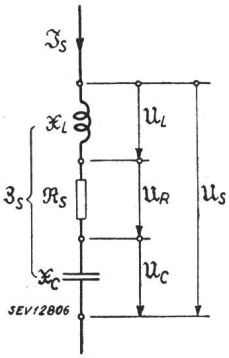

Fig. 1
Reine Serieschaltung

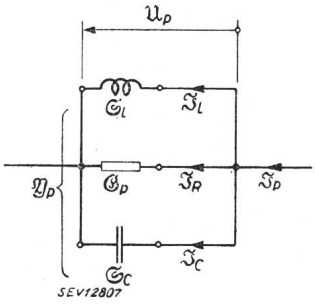

Fig. 2
Reine Parallelschaltung

($R_s/G_p = L/C$; Fig. 2) mit konstantem Strom $\mathfrak{J}_p$ treten ausser der Spannungsresonanz, und damit der Stromresonanz im Leiter $\mathfrak{G}_p$, zwei entsprechende weitere Parallelresonanz-Frequenzwerte auf, und zwar die Stromresonanzen in Spule und Kondensator.

Beim umgekehrten Fall des Seriekreises mit konstantem Strom $\mathfrak{J}_s$ bzw. des Parallelkreises mit konstanter Spannung $\mathfrak{U}_p$ gibt es nur die Gesamtspannungs- bzw. -stromresonanz.

Resonanz ist von mir also als Extremwert-Bildung von Spannung oder Strom interpretiert. Im ersten von den beiden oben genannten Fällen — reine Serie- oder Parallelschaltung vorausgesetzt — fällt mit der Gesamtstrom- bzw. -spannungsresonanz noch das Wirkleistungsmaximum zusammen; in beiden Fällen erreicht auch die Schwingkreis-Impedanz ein Extremum und der Phasenwinkel zwischen Speisespannung und -strom geht durch null (Realfrequenz).

Die von mir schon früher definierte *Schwing*frequenz hat mit den *Resonanz*erscheinungen direkt nichts zu tun.

Die Schemata Fig. 1 und 2 und deren Bezeichnungen dienen als Grundlage für die Rechnungen, die in jedem Fall für beide Schemata simultan durchgeführt werden können; beim Übergang vom einen zum andern hat man Spannungen und Ströme, Impedanzen und Admittanzen, sowie die Indizes s und p zu vertauschen. Die Reziprozitätsbedingung

$$R_s/G_p = L/C = R_0^2 \tag{1}$$

ergibt zusammen mit den Definitionen der relativen Grössen

$$r_s = R_s/R_0 \tag{2}$$

$$g_p = G_p/G_0 = G_p R_0 \tag{3}$$

die Identität der Werte

$$r_s \equiv g_p \tag{4}$$

für reziprok sich verhaltende Schaltungen, welche Gleichung für die reinen Schwingkreisschaltungen folgendermassen auf die bisher gebräuchlichen Ausdrücke erweitert werden kann:

$$\underline{r_s = g_p = r = 2w = 1/\varrho} \tag{5}$$

1. Fall: U_s; I_p = konst.

Grundgleichung: $\underline{\mathfrak{J}_s = \mathfrak{U}_s/\mathfrak{Z}_s}$ (6)

Spannung am Widerstand:

$$U_R = I_s R_s = U_s R_s/Z_s$$

$$\underline{u_R = r/z_s}$$

Die Spannungswerte (kleine Buchstaben, nicht zu verwechseln mit den Momentanwerten!) sind bezogen auf die konstante Spannung U_s.

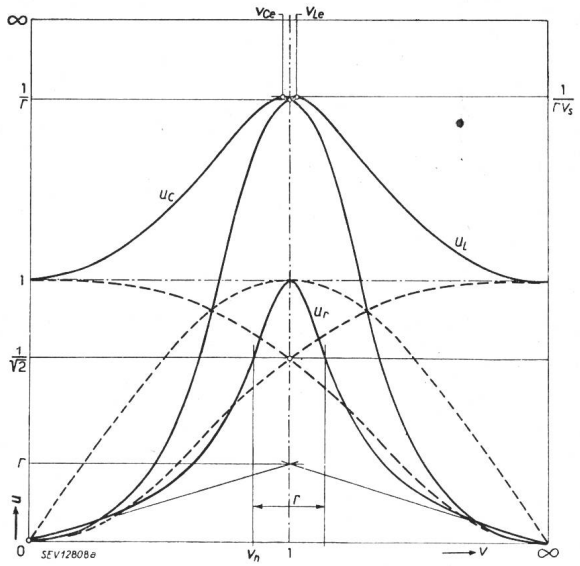

Fig. 3
Spannungswerte für U_s = konst. (vgl. Fig. 1)
Gestrichelt: Grenzkurven für $r = \sqrt{2}$

In Frequenzwerten explizit lautet die Beziehung:

$$\underline{u_R = rv \,/\, \sqrt{1 - 2(1-2w^2)v^2 + v^4}} \quad \text{(Fig. 3)} \tag{7}$$

Kurvendiskussion: reziprok-symmetrisch bezüglich $v = 1$

$$v = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}; \; u_R = 0 \; ; \; {}^{tg}u_R = \pm r$$

Extremwert: $v = 1$; $u_{Re} = 1$

Die Spitzenspannung am Widerstand erreicht die indizierte Spannung.

Die Bandbreite einer Resonanzkurve $K(f)$ wird zweckmässig definiert als das Frequenzband, innerhalb dessen die Bedingung erfüllt ist

$$\boxed{K(f) \gtrless 2^{\mp \frac{1}{2}} K_e = K_b} \tag{8}$$

K_e ist der Extremwert der Kurve und K_b derjenige an den Bandgrenzen.

Im vorliegenden Fall (7) ist das Extremum ein Maximum und der Bandgrenzenwert wird aus

Gründen, die später dargelegt werden, Halbwert genannt. Im Gegensatz dazu steht der Doppelwert bei Kurven mit einem Minimum [untere Zeichen in Gl. (8)].

Halbwert $u_{Rh} = u_{Re}/\sqrt{2}$

$$r/\sqrt{r^2+(v_h-1/v_h)^2} = 1/\sqrt{2} \qquad (8a)$$

Die relative Bandbreite ist definiert zu

$$\underline{b = v_h - 1/v_h} \qquad (9)$$

ergibt eingesetzt in Gl. (8):

$$\underline{b = r} \qquad (10)$$

Die relative Bandbreite der Widerstandsspannungskurve ist gleich dem Verlustwiderstandswert.

Gl. (8a) nach v_h aufgelöst ergibt die Doppelgleichung

$$\underline{v_h = \sqrt{1+w^2} \pm w} \qquad (11)$$

$$w^2 \ll 1 \; ; \; \underline{v_h \approx 1 \pm w} \qquad (11a)$$

Für die Tangentenrichtungen bildet man die Ableitung:

$$\underline{\frac{\partial u_r}{\partial v} = r \frac{1-v^4}{\sqrt{\{1-2(1-2w^2)v^2+v^4\}^3}} = u'_R} \qquad (12)$$

Die Flankensteilheit ist definiert als Tangentenrichtung beim Bandgrenzenwert. In Gl. (12) wird der kleinere Wert des Paares Gl. (11) eingesetzt, damit man im linearen Teil der Abszisse bleibt und so die Umrechnung spart:

$$^{tg}u_{Rh} = \frac{\varrho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1-w/\sqrt{1+w^2}} \qquad (13)$$

$$w \ll 1 \; ; \; {}^{tg}u_{Rh} \approx \varrho/\sqrt{2} \qquad (13a)$$

Grenzkurve ohne Wendetangente (gestrichelte Kurve Fig. 3):

$$r = \sqrt{2} \; ; \; u_R = v\sqrt{2/(1+v^4)} \; ; \; {}^{tg}u_R = \frac{1-v^4}{\sqrt{\frac{1}{2}(1+v^4)^3}}$$

$$v = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} ; \; {}^{tg}u_R = \pm\sqrt{2} = \pm 1/0{,}707$$

$$v_h = \sqrt{2-\sqrt{3}} = 0{,}518 \; ; \; {}^{tg}u_{Rh} = \sqrt{\frac{3/8}{2-\sqrt{3}}} = 1/0{,}845$$

Spannung an der Spule	Spannung an dem Kondensator
$U_L = I_s X_L = U_s X_L/Z_s$	$U_C = I_s X_C = U_s X_C/Z_s$
$\underline{u_L = x_L/z_s}$	$\underline{u_C = x_C/z_s}$
$\underline{u_L =}$	$\underline{u_C =}$
$\underline{v^2/\sqrt{1-2(1-2w^2)v^2+v^4}}$	$\underline{1/\sqrt{1-2(1-2w^2)v^2+v^4}}$
	(14; 15)
$v \ll 1 \; ; \; u_L \approx v^2$	$1/v \ll 1 \; ; \; u_C \approx 1/v^2$

Die Spannungswerte an Spule und Kondensator sind gleich mit reziproken Frequenzwerten.

Diskussion (Fig. 3 und 4):

$$v = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} ; \; u_L = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} ; \; u_C = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$v = 1 \; ; \; u_{L0} = u_{C0} = \varrho = u_{X0}$$

Weiter ist bei

$$u_{L;C} = u_X = 1 \; ; \; \underline{1/v_{L1} = \sqrt{2-r^2} = v_{C1}} \qquad (16)$$

1. Grenzwert: $r = 0 \; ; \; 1/v_{L1} = \sqrt{2} = v_{C1}$

2. Grenzwert: $1/v_{L1} = v_{C1} = 0 \; ; \; r = \sqrt{2}$

Der Parameter-Grenzwert $r = \sqrt{2}$ ist der gleiche wie bei der Spannung am Widerstand: Dort erzeugt er eine Spannungskurve ohne Wendetangente, hier dagegen eine solche ohne Überhöhung (vgl. Fig. 4).

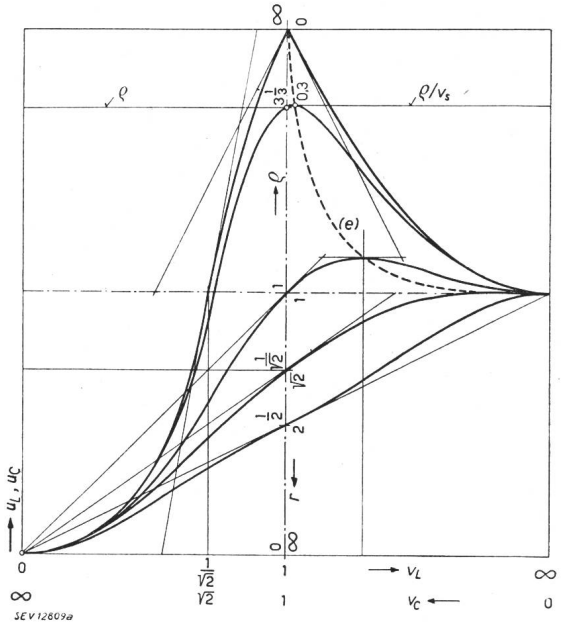

Fig. 4

Spannungswerte an der Spule bzw. am Kondensator in Funktion des Frequenzwertes mit der Dämpfung als Parameter

Die gestrichelte Kurve (*e*) ist der geometrische Ort der Extrema

Für die Tangenten-Richtung bildet man die Ableitung:

$$\underline{\frac{\partial u_L}{\partial v} = 2v \frac{1-(1-2w^2)v^2}{\sqrt{\{1-2(1-2w^2)v^2+v^4\}^3}}} \qquad (17)$$

$$\left.\begin{matrix} \infty \geqq w \geqq \frac{1}{2} \\ 0 \leqq \varrho \leqq 1 \end{matrix}\right\} ; \; v = 1 \; ; \; {}^{tg}u_{L0} = \varrho = -{}^{tg}u_{C0}$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{2} \geqq w \geqq 0 \\ 1 \leqq \varrho \leqq \infty \end{matrix}\right\} ; \; u_X = 1 \; ; \; {}^{tg}u_{L1} = 4\sqrt{2(1-2w^2)^5} = -{}^{tg}u_{C1}$$

Das Extremum liegt bei $\frac{\partial u_L}{\partial v} = 0$, also bei

1) $v = 0$

2) $v = \infty$

3) $\underline{1/v_{Le} = \sqrt{1-2w^2} = v_{Ce}}$ (18)

$$v^4 \ll 1 \; ; \; \underline{1/v_{Le} \approx v_s^2 \approx v_{Ce}} \qquad (18a)$$

Das Extremum hat den Wert

$$\underline{u_{Xe} = \varrho/v_s} \qquad (19)$$

$$w^2 \ll 1 \; ; \; \underline{u_{Xe} \approx \varrho} \qquad (19a)$$

Bei geringer Dämpfung erreicht die Spitzenspannung an den Reaktanzen das ϱ-fache der Klemmenspannung.

Eliminiert man aus Gl. (18) und (19) den Parameter, so erhält man die Ortskurve der Extrema (gestrichelte Kurve Fig. 4) zu:

$$u_{Le} = 1/\sqrt{1-1/v_{Le}^4} \; ; \; u_{Ce} = 1/\sqrt{1-v_{Ce}^4} \qquad (20\,;21)$$

Spezialfälle des Parameters:

$$1)\; r = 0 \; ; \; u_L = \left|\frac{v^2}{1-v^2}\right| \; ; \; u_C = \left|\frac{1}{1-v^2}\right| \qquad (22)$$

$$u_X = 1 \; ; \; v_{L1} = 1/\sqrt{2} = 0{,}707 = 1/v_{C1}$$

$$^{tg}u_{L1} = 4\sqrt{2} = 1/0{,}177 = -\,^{tg}u_{C1}$$

Für die Ableitung in Resonanznähe gilt

$$\frac{d\,(1/u_L)}{dv} = \mp\, 2/v^3 \qquad (23)$$

und damit $v = 1$; $^{tg}u_{L0} = \pm\, 2 = {}^{tg}u_{C0}$

Beim ungedämpften Kreis ist die Flankensteilheit der Spannungsresonanzkurven gleich derjenigen der Impedanzkurve.

$$2)\; r = \sqrt{2} \; ; \; u_L = v^2/\sqrt{1+v^4} \qquad (24a)$$

$$u_C = 1/\sqrt{1+v^4} \qquad (24b)$$

$$v = 1 \; ; \; u_{AC} = 1/\sqrt{2} = 0{,}707$$

$$^{tg}u_{L0} = 1/\sqrt{2} = -\,^{tg}u_{C0}$$

$$\text{Strom:} \quad I_s = U_s/Z_s$$

Der Bezugsstrom für die Relativisierung dieser Gleichung wird zwangsläufig aus den konstanten (parameterfreien) Werten wie folgt definiert:

$$i_s = I_s/I_0 \; ; \; I_0 = U_s/R_0 \qquad (25)$$

und man erhält

$$i_s = 1/z_s \qquad (26a)$$

$$i_s = v/\sqrt{1-2(1-2w^2)v^2+v^4} \qquad (26b)$$

Der Stromwert verhält sich reziprok zum Impedanzwert und ist proportional dem Spannungswert am Widerstand (Gl. 7):

$$u_R = r\, i_s \qquad (27)$$

Gl. (27) ist nichts anderes als die Anschrift des ohmschen Gesetzes in relativer Form.

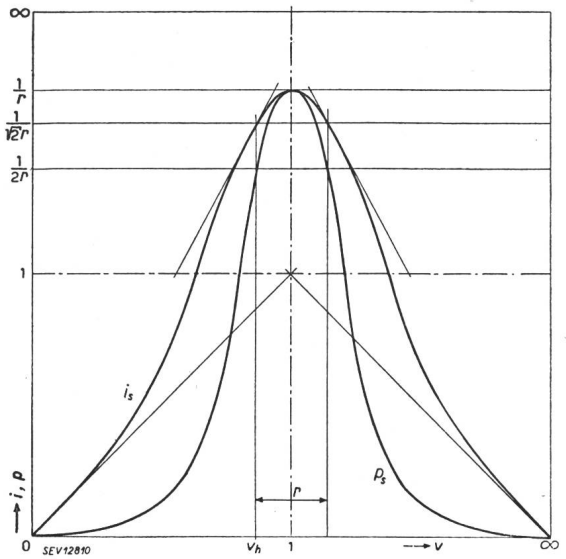

Fig. 5
Strom- und Wirkleistungswert für U_s = konst.

Kurvendiskussion (i_s in Fig. 5): reziprok-symmetrisch bezüglich $v = 1$

$$v = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} ; \; i_s = 0 \; ; \; ^{tg}i_s = \pm\, 1$$

Extremum: $v = 1$; $i_{se} = \varrho$

oder absolut $I_{se} = U_s\, \varrho/R_0$

$$I_{se} = U_s/R_s$$

Der Spitzenstrom ist gleich dem Strom, der durch die indizierte Spannung im Widerstand hervorgerufen würde.

Halbwert:

$$i_{sh} = i_{se}/\sqrt{2}$$

$$1/\sqrt{r^2+(v_h-1/v_h)^2} = 1/r\sqrt{2} \qquad (28)$$

welche Gleichung identisch mit Gl. (8a) ist. Es ergeben sich also hier die gleichen Konsequenzen wie dort. Gl. (7) zeigt ausserdem, dass man die Ableitung Gl. (12) nur durch r zu dividieren braucht, um die entsprechende für den Stromwert zu erhalten:

$$\frac{\partial i_s}{\partial v} = \frac{1-v^4}{\sqrt{\{1-2(1-2w^2)v^2+v^4\}^3}} = i_s' \qquad (29)$$

Analog zu Gl. (13) erhält man die Flankensteilheit der Stromresonanzkurve; da diese bei geringer Dämpfung sich im Reziprokgebiet in Ordinatenrichtung befindet, sei die entsprechende Gleichung beigefügt. Die im folgenden den Tangenten-Zeichen vorgesetzten grossen Buchstaben bezeichnen das Feld, für das die Tangentengleichung gilt:

L = Doppelt-Linearfeld,
R = Doppelt-Reziprokfeld,
A = Einfachreziprokfeld in Abszissenrichtung,
O = Einfachreziprokfeld in Ordinatenrichtung.

Für das Doppelt-Linearfeld kann das Kennzeichen fehlen, ebenso wie bisher für kombinierte Gleichungen, die sich auf die gesamte Reziprok-Darstellungsebene beziehen.

$$^{L\,tg}i_{sh} = \frac{\varrho^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1-w/\sqrt{1+w^2}} \qquad (30)$$

$$^{0\,tg}i_{sh} = \frac{\sqrt{2}}{1-w/\sqrt{1+w^2}}$$

$$w \ll 1 \; ; \; ^{0\,tg}i_{sh} \approx \sqrt{2} \neq F(w) \qquad (30a)$$

Diese Werte sind nach Gl. (26a) identisch mit denen für die Impedanzwertkurve, wenn man Halbwert- bzw. Doppelwertbreite schlechthin mit dem gebräuchlichen Ausdruck der relativen «Bandbreite» identifiziert. Nach Gl. (30a) ist die Flankensteilheit hier wie dort bei geringer Dämpfung von dieser unabhängig.

$$\text{Wirkleistung:} \quad P_s = R_s I_s^2 \qquad (31)$$

Die Bezugsleistung für die Relativisierung dieser Gleichung wird analog Gl. (25) definiert zu

$$p_s = P_s/P_0 \; ; \; P_0 = U_s^2/R_0 \qquad (32)$$

$$p_s = R_0 R_s I_s^2/U_s^2 = R_0 R_s/Z_s^2$$

und man erhält:

$$p_s = r/z_s^2 = r\, i_s^2 \qquad (33a)$$

welche Beziehung man ohne weiteres durch Relativschreiben der Gl. (31) erhält.

Man kann jede absolute Gleichung durch Kleinschreiben relativisieren und erhält dann die Bezugsgrössen zwangsläufig richtig aus den konstanten (parameterfreien) Grössen des Systems.

In Frequenzwerten explizit lautet Gl. (33a):

$$p_s = r\,v^2/\{1-2(1-2w^2)v^2+v^4\} \qquad (33b)$$

Kurvendiskussion (p_s in Fig. 5): reziprok-symmetrisch bezüglich $v=1$

Die Diskussion gestaltet sich einfach, wenn man nach Gl. (33a) die Behandlung der Kurve (26) zu Rate zieht.

$$v = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} ;\ p_s = 0\ ;\ {}^{tg}p_s = 0$$

Extremum: $v=1\ ;\ p_{se} = \varrho$

oder absolut $P_{se} = U_s^2\,\varrho/R_0$

$$P_{se} = U_s^2/R_s$$

Die Spitzenwirkleistung ist gleich der Leistung, die durch die indizierte Spannung im Widerstand in Wärme umgewandelt würde.

Halbwert [1]: $p_{sh} = p_{se}/2$

$$r/\{r^2+(v_h-1/v_h)^2\} = 1/2r \qquad (34)$$

Auch diese Gleichung ist wieder identisch mit Gl. (8a) und es gelten analog die Gl. (10) und (11) betreffend Bandbreite und Frequenzwerten, womit die Logik der Definitionen bewiesen ist.

Für die Tangentenrichtung bildet man die Ableitung:

$$\frac{\partial p_s}{\partial v} = \frac{\partial(r\,i_s^2)}{\partial v} = 2\,r\,i_s\,i_s'$$

$$p_s' = \frac{2rv(1-v^4)}{\{1-2(1-2w^2)v^2+v^4\}^2} \qquad (35)$$

Die Gleichungen für die Flankensteilheit lauten (vgl. Gl. 30):

$$\left.\begin{aligned} {}^{L\,tg}p_{sh} &= \sqrt{2}\ {}^{L\,tg}i_{sh} \\ {}^{O\,tg}p_{sh} &= 2\sqrt{2}\ {}^{O\,tg}i_{sh} \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

insbesondere

$$w \ll 1\ ;\ {}^{O\,tg}p_{sh} \approx 4 \neq F(w) \qquad (36a)$$

Bei geringer Dämpfung ist die Flankensteilheit der Wirkleistungskurve gleich der 4. Potenz derjenigen der Stromkurve (also rund dreimal so gross) und daher ebenfalls dämpfungs*un*abhängig.

Gl. (26a) gibt Veranlassung, durch Reduktion der Variabeln den Parameter zu eliminieren, so dass man für zwei Kurvenscharen zwei reduzierte Kurven erhält, die für alle endlichen Dämpfungswerte gültig sind [2]).

[1]) Dieser Ausdruck ist von mir eben aus der halben Wirkleistung abgeleitet!

[2]) vgl. Bull. SEV 1940, S. 417 und 418. Im eingangs erwähnten Aufsatz Bull. SEV 1939, S. 639 und 640 sind demnach für Strom und Leistung statt der relativen irrtümlich die reduzierten Werte angeben.

Setzt man in Gl. (26b) und (33b)

$$v - 1/v = \varphi\,,$$

der «Verstimmung» und erweitert mit ϱ beziehungsweise mit ϱ^2, so erhält man das Gleichungspaar

$$i_s = \varrho/\sqrt{1+\varrho^2\varphi^2}\ ;\ p_s = \varrho/(1+\varrho^2\varphi^2)$$

dann führt man die reduzierten Grössen ein

$$\varphi^* = \varphi\,\varrho\ ;\ i_s^* = i_s/\varrho = u_R\ ;\ p_s^* = p_s/\varrho \qquad (37)$$

und erhält

$$i_s^* = 1/\sqrt{1+\varphi^{*2}}\ ;\ p_s^* = 1/(1+\varphi^{*2}) \qquad (38\,;\,39)$$

$$p_s^* = i_s^{*2} \qquad (39a)$$

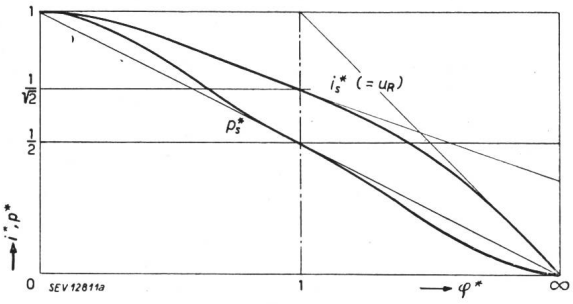

Fig. 6
Reduzierter Strom- und Wirkleistungswert in Funktion der reduzierten Verstimmung

Kurvendiskussion (Fig. 6):

Kurve (39) ist reziprok-zentrisch-symmetrisch bezüglich $\varphi^* = 1$ und $p_s^* = \frac{1}{2}$.

Tangenten:

$$\left.\begin{aligned} {}^{L\,tg}i_s^* &= -\varphi^*/\sqrt{(1+\varphi^{*2})^3} \\ {}^{A\,tg}i_s^* &= -1/\sqrt{(1+1/\varphi^{*2})^3} \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

$$ {}^{L\,tg}p_s^* = -2\varphi^*/(1+\varphi^{*2})^2 \qquad (41)$$

$$\varphi^* = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \infty \end{cases} ;\ i_s^* = \begin{cases} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{cases} ;\ -{}^{tg}i_s^* = \begin{cases} 0 \\ 1/2\sqrt{2} \\ 1 \end{cases} ;$$

$$p_s^* = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{cases} ;\ -{}^{tg}p_s^* = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{cases}$$

Wendetangenten:

$$\varphi^* = 1\sqrt{2}\ ;\ i_s^* = \sqrt{2/3} = 0{,}817\ ;\ -{}^{tg}i_s^* = \frac{2}{9}\sqrt{3} = 0{,}385$$

$$\varphi^* = 1\sqrt{3}\ ;\ p_s^* = 3/4 = 0{,}75\ ;\ -{}^{tg}p_s^* = \frac{3}{8}\sqrt{3} = 0{,}65$$

Bei der reinen Serieschaltung verhalten sich also nach Gl. (37) alle Schwingkreise verschiedener Dämpfung nicht nur bezüglich Impedanzwert, sondern auch bezüglich Stromwert und damit Widerstands-Spannungswert und Wirkleistungswert *ähnlich zweiter Ordnung* (verschiedener Maßstab der beiden Achsen); nicht dagegen bezüglich der Teilspannungen an den Reaktanzen. Das Analoge gilt für die reziproke Parallelschaltung.

2. Fall: I_s ; U_p = konst.

Grundgleichung: $\mathfrak{U}_s = \mathfrak{J}_s\,\mathfrak{Z}_s$ (42)

Gesamtspannung: $U_s = I_s Z_s$ (43)

Die Bezugsspannung für die Relativisierung dieser Gleichung wird analog Gl. (25) definiert zu

$$u_s = U_s/U_0 \; ; \; \underline{U_0 = I_s R_0} \qquad (44)$$

$$\underline{u_s = z_s = 1/i_s} \qquad (45)$$

Der Gesamtspannungswert ist gleich dem Impedanzwert und reziprok dem Stromwert bei konstanter indizierter Spannung.

Die Diskussion ist daher bei Gl. (26) zu verfolgen. Das reduzierte Diagramm ist anwendbar.

Spannung am Widerstand:

$$U_r = I_s R_s$$

$$\underline{u_r = r} \qquad (46)$$

Der Spannungswert am Widerstand ist gleich dem Verlustwiderstandswert und daher frequenzunabhängig.

Wirkleistungswert:

$$P_s = I_s^2 R_s$$

$$\underline{p_s = r} \qquad (47)$$

Auch der Wirkleistungswert ist wie der Spannungswert am Widerstand gleich dem Verlustwiderstandswert.

Spannung an der Spule	Spannung an dem Kondensator	
$U_L = I_s X_L$	$U_C = I_s X_C$	
$u_L = x_L$	$u_C = x_C$	
$\underline{u_L = v}$	$\underline{u_C = 1/v}$	(48; 49)

Die Spannungswerte an den Reaktanzen verlaufen linear, sind gleich mit reziproken Frequenzwerten und erreichen beim Gesamtspannungs-Minimum das ϱ-fache dieses Wertes, der identisch mit dem konstanten Spannungswert am Widerstand ist.

B. Gemischte Serie-Parallel-Schaltungen

In der Nähe der Resonanz ist der Unterschied zwischen reinen und gemischten Schaltungen für die Spannungs- und Stromresonanzen sehr gering. Einzig die Wirkleistung wird entscheidend beeinflusst. Und deshalb befassen wir uns im laufenden Kapitel nur mit dieser. Es ergibt sich dabei ein praktisches Nebenresultat, nämlich dass man mit Hilfe von Aequivalenzgleichungen für die Verlustwiderstände die gemischten auf die reinen Schwingkreisschaltungen zurückführen kann.

Auch die gemischten Schaltungen lassen sich simultan behandeln. Die Reziprozitätsbedingung ist die gleiche wie bei den reinen Schaltungen und findet sinngemäss auf beide Verlustwiderstände einzeln Anwendung analog Gl. (5):

$$r_{sL} + r_{sC} = g_{pL} + g_{pC} = m + n = 2w = r = 1/\varrho \qquad (51)$$

Im Seriekreis mit Parallel-Leitern (Fig. 7) beträgt die Wirkleistung:

$$P = U_L^2 G_{pL} + U_C^2 G_{pC} \qquad (52)$$

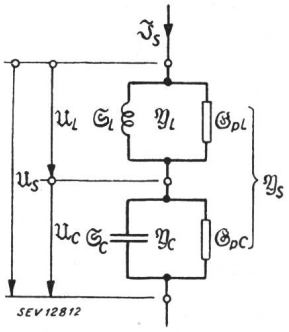

Fig. 7
Der Seriekreis mit Parallel-Leitern

Nach Fig. 7 ist:

$$U_L = I_s/Y_L$$

$$U_C = I_s/Y_C$$

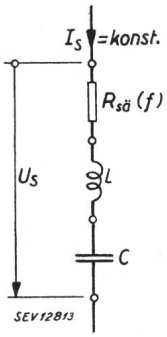

Fig 8
Die wirkleistungsmässig der Schaltung Fig. 7 äquivalente Seriekreisschaltung mit konstantem Strom (2. Fall)

Der äquivalente Seriewiderstand ist trotz Frequenzabhängigkeit rein ohmisch zu denken

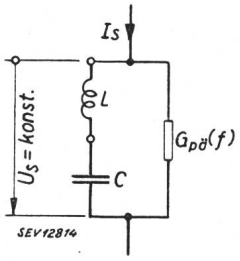

Fig. 9
Die wirkleistungsmässig der Schaltung Fig. 7 äquivalente Seriekreisschaltung mit konstanter Spannung (1. Fall)

Der äquivalente Parallel-Leiter ist trotz Frequenzabhängigkeit rein ohmisch zu denken

ergibt eingesetzt in Gl. (52):

$$P = I_s^2 \left(\frac{G_{pL}}{Y_L^2} + \frac{G_{pC}}{Y_C^2} \right) \qquad (53)$$

$$\boxed{P = I_s^2 R_{sä}} \qquad (54)$$

Diese Formel gestattet sofort die Behandlung des zweiten Falles, der anschliessend daher zunächst erscheint.

2. Fall: I_s ; U_p = konst.

Gleichung (54) sagt aus, dass die Wirkleistung proportional einem Seriewiderstand ist gemäss der Schaltung Fig. 8. Dieser der Schaltung Fig. 7 äquivalente Verlustwiderstand ist nach Gl. (53) frequenzabhängig.

Zur Relativisierung der Gl. (54) definiert man die Bezugsleistung zwangsläufig wie folgt:

$$p = P/P_0 \; ; \; \underline{P_0 = I_s^2 R_0} \qquad (55)$$

Damit wird

$$\boxed{p = r_{sä}} \qquad (56)$$

und nach Gl. (53) erhält man:

$$p = \frac{g_{pL}}{g_{pL}^2 + s_L^2} + \frac{g_{pC}}{g_{pC}^2 + s_C^2}$$

$$p = \frac{m}{m^2 + 1/v^2} + \frac{n}{n^2 + v^2} \qquad (57)$$

oder auf den Hauptnenner gebracht und erweitert:

$$p = \frac{mv^4 + (m+n)mnv^2 + n}{m^2v^4 + (1+m^2n^2)v^2 + n^2}$$

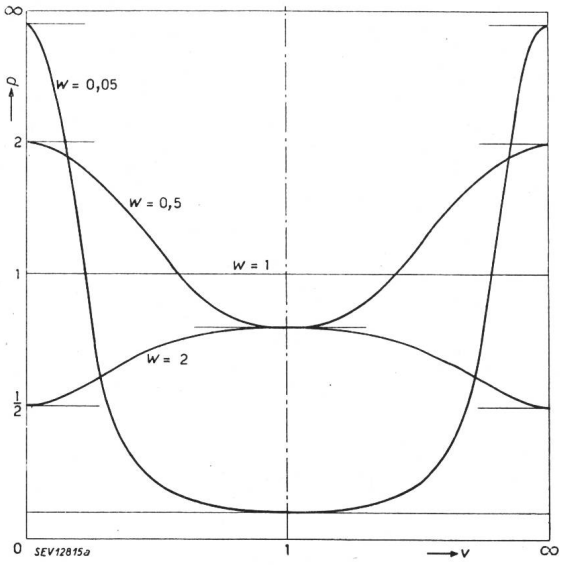

Fig. 10

Wirkleistungswerte der symmetrischen gemischten Schaltung für I_s = konst. mit der Dämpfung als Parameter

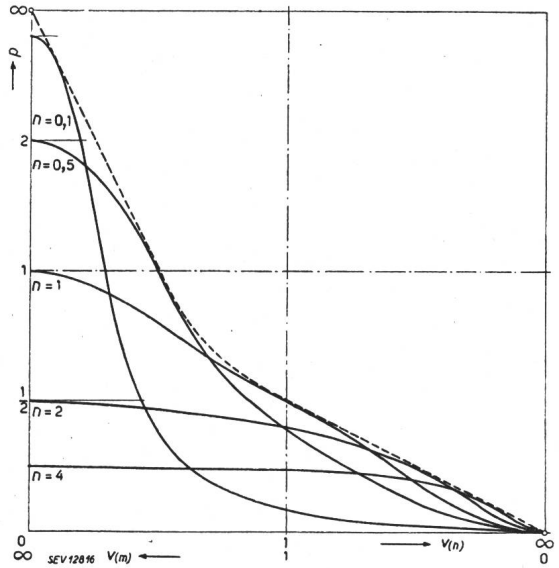

Fig. 11

Wirkleistungswerte der einseitig gedämpften gemischten Schaltung für I_s = konst. mit dem Widerstandswert als Parameter

(Man beachte beim Vergleich mit Fig. 10, dass m; $n = 2w$ ist!)
Die gestrichelte Kurve ist die Einhüllende

Im Gegensatz zu den früheren Gleichungen tritt ausser dem symmetrischen Ausdruck $m+n$ (Gl. 51) noch der weitere $m\,n$ auf, den wir wie folgt abkürzen:

$$\underline{m\,n = q^2} \qquad (58)$$

Nach Einsetzen erhält man für den Wirkleistungswert den übersichtlichen Ausdruck

$$p = \frac{mv^4 + rq^2v^2 + n}{m^2v^4 + (1+q^4)v^2 + n^2} \quad \text{(Fig. 12)} \qquad (59)$$

Diskussion:

a) $v = 0$; $\underline{p_0 = 1/n}$

b) $v = 1$; $p_1 = \dfrac{(1+q^2)\,r}{(1-q^2)^2+r^2}$

r^2 ; $q^2 \ll 1$; $\underline{p_1 \approx r}$

c) $v = \infty$; $\underline{p_\infty = 1/m}$

Spezialfälle der Parameterwerte:

1) $m = 0 \therefore \begin{cases} n = r \\ q = 0 \end{cases}$; $p = \dfrac{n}{v^2+n^2} = \dfrac{\varrho}{\varrho^2v^2+1}$ (60)

(Fig. 11)

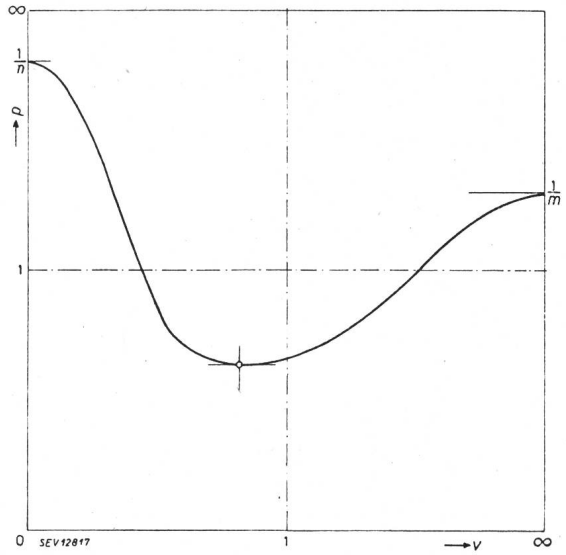

Fig. 12

Wirkleistungswert-Verlauf der asymmetrischen Schaltung für I_s = konst.

Z. B.: $m = 0{,}7$; $n = 0{,}2$

(Vgl. Impedanzverlauf für dieselben Parameterwerte im Bull. SEV 1939, Nr. 4, S. 103, Fig. 17)

a) $v = 0$; $\underline{p_0 = 1/n = \varrho}$

b) $v = 1$; $p_1 = \dfrac{n}{1+n^2} = \dfrac{\varrho}{\varrho^2+1}$ (Fig. 14)

$r^4 \ll 1$; $\underline{p_1 \approx rv_s^8}$

$r^2 \ll 1$; $\underline{p_1 \approx r}$

c) $v = \infty$; $\underline{p_\infty = 0}$

2) $m = n = w = q = r/2$; $p = w\,\dfrac{v^4+2w^2v^2+1}{w^2v^4+(1+w^4)v^2+w^2}$

(Fig. 10) **(61)**

$\underline{w = 1 \; ; \; p \equiv 1}$

a) $v = 0$; $\underline{p_0 = 1/w = 2\varrho}$

b) $v = 1$; $p_1 = \dfrac{2w}{1+w^2}$ (Fig. 14)

$w^4 \ll 1$; $p_1 \approx rv_s^2$

$w^2 \ll 1$; $\underline{p_1 \approx r}$

c) $v = \infty$; $p_\infty = 1/w = 2\varrho$

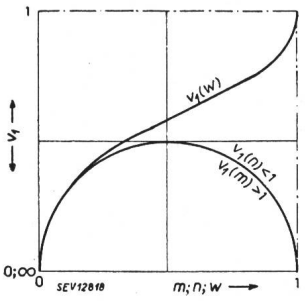

Fig. 13
Frequenzwerte für $p = 1$ (I_s = konst.) bei einseitig gedämpften (m; n) und symmetrischen Kreisen (w)

3) $n = 0 \therefore \begin{cases} m = r \\ q = 0 \end{cases}$; $p = \dfrac{m}{m^2+1/v^2} = \dfrac{\varrho}{1+\varrho^2/v^2}$ **(62)**

(Fig. 11)

a) $v = 0$; $p_0 = 0$

b) $v = 1$; $p_1 = \dfrac{m}{1+m^2} = \dfrac{\varrho}{\varrho^2+1}$ (Fig. 14)

$r^4 \ll 1$; $p_1 \approx r v_s^8$

$r^2 \ll 1$; $p_1 \approx r$

c) $v = \infty$; $p_\infty = 1/m = \varrho$

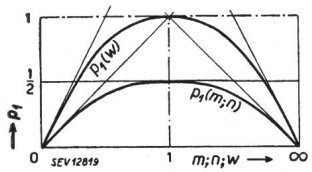

Fig. 14
Wirkleistungswerte für $v = 1$ (I_s = konst.) bei einseitig gedämpften (m; n) und symmetrischen Kreisen (w)

Schnittpunkte mit der Linie $p = 1$:

1) $p = \dfrac{n}{v^2+n^2} = \dfrac{mv^2}{m^2v^2+1} = 1$

$v_1 = \sqrt{n-n^2} = 1/\sqrt{m-m^2}$ (Fig. 13) **(63)**

Kreis um $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ bzw. $\left(\frac{1}{2}\,;\,\infty\right)$ mit dem Radius $\frac{1}{2}$ in der Reziprok-Darstellungsebene.

2) $p = w\,\dfrac{v^4+2w^2v^2+1}{w^2v^4+(1+w^4)v^2+w^2} = 1$

Nach Ausmultiplikation kann man den zweiten Gleichungsteil in der Form von F $(v;w) = 0$ schreiben, durch den Faktor $(1-w)$ dividieren und erhält so die Lösung:

$$v_1 = \sqrt{\frac{1+w+w^2-w^3}{2w} - \sqrt{\left(\frac{1+w+w^2-w^3}{2w}\right)^2 - 1}} \qquad \textbf{(64)}$$

(Fig. 13)

Reziprok-symmetrisch bezüglich $v_1 = 1$

$w \ll 1$; $v_1 \approx \sqrt{w}$ **(64a)**

Die Kurve ähnelt im Scheitel einer liegenden quadratischen Parabel.

Die *Einhüllende* zur Kurvenschar Gl. (60) erhält man durch Elimination des Parameters n aus dem Gleichungspaar

$$\left.\begin{aligned} F(v;p;n) &= 0 \\ \frac{\partial F(v;p;n)}{\partial n} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(65)}$$

indem man zuerst die Gl. (60) nach Potenzen von n ordnet. Da weiterhin $v(n) = 1/v(m)$ ist, so ergeben sich die Einhüllenden der Kurvenschaaren Gl. (60) und (62) zu

$$p_t = \frac{1}{2v(n)} = \frac{v(m)}{2} \quad \text{(Fig. 11)} \qquad \textbf{(65a)}$$

Für die Tangentenrichtungen bildet man die Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 2v\,\frac{(1-q^2m^2)\,mv^4 - 2q^2(m-n)\,v^2 - (1-q^2n^2)\,n}{\{m^2v^4 + (1+q^4)\,v^2 + n^2\}^2} \qquad \textbf{(66)}$$

r^2 ; $q^2 \ll 1$; $\dfrac{\partial p}{\partial v} \approx 2v\,\dfrac{mv^4 - 2q^2(m-n)\,v^2 - n}{(m^2v^4+v^2+n^2)^2}$

a) $v = 0$; ∞ ; ${}^{tg}p_0 = 0$

b) für $v = 1$ ergibt sich nach Trennung von Linear- und Reziprok-Gebiet in Ordinatenrichtung

$$\begin{cases} {}^{L\,tg}p_1 = 2(m-n)\,\dfrac{1-2(1+2w^2)\,q^2+q^4}{\{(1-q^2)^2+r^2\}^2} \\[2ex] {}^{0\,tg}p_1 = 2(m-n)\,\dfrac{1-2(1+2w^2)\,q^2+q^4}{(1+q^2)^2\,r^2} \end{cases}$$

und bei r^2 ; $q^2 \ll 1$

$$\begin{cases} {}^{L\,tg}p_1 \approx 2(m-n) \\ {}^{0\,tg}p_1 \approx 2(m-n)\,\varrho^2 \end{cases}$$

Das Extremum liegt bei $\dfrac{\partial p}{\partial v} = 0$, also bei

$$v_e^2 = \frac{2q^2(m-n) \pm \sqrt{4q^4(m-n)^2 + 4q^2(1-q^2m^2)(1-q^2n^2)}}{2(1-q^2m^2)\,m}$$

Da v_e nur reell Sinn hat, heisst die Gleichung nach Multiplikation unter der Wurzel, die dann gezogen werden kann:

$$v_e^2 = \frac{q}{m}\cdot\frac{1+q(m-n)-q^4}{1-q^2m^2}$$

und nach Kürzen erhält man schliesslich

$$v_e = \sqrt{\sqrt{\frac{n}{m}}\cdot\frac{1-qn}{1-qm}} \qquad \textbf{(67)}$$

r^2 ; $q^2 \ll 1$; $v_e \approx \sqrt[4]{n/m}$ **(67a)**

1) $n = 0$; $v_e = 0$

2) $n = m$; $v_e = 1$

3) $m = 0$; $v_e = \infty$

Nach Umformen von Gl. (57):

$$p = \frac{1}{m + 1/mv^2} + \frac{1}{n + v^2/n}$$

und Einsetzen von Gl. (67) erhält man

$$p_e = 2q\,\frac{1-qw}{1-q^4} \qquad \textbf{(68)}$$

r^2 ; $q^2 \ll 1$; $p_e \approx 2q$ **(68a)**

1) m ; $n = 0 \therefore q = 0$; $p_e = 0$

2) $m = n = w = q$: $p_e = r\,\dfrac{1-w^2}{1-w^4}$

$p_e = \dfrac{r}{1+w^2}$

$w^4 \ll 1$; $p_e \approx r v_s^2$

$w^2 \ll 1$; $p_e \approx r$

1. Fall: U_s ; I_p = konst.

Gleichung (54) lässt sich umschreiben

$$P = U_s^2 Y_s^2 R_{sä} \tag{69}$$

$$\boxed{P = U_s^2 G_{pä}} \tag{70}$$

Die Wirkleistung ist proportional einem Parallel-Leiter gemäss Schaltung Fig. 9. Dieser der Schaltung Fig. 7 äquivalente Verlustleiter ist nach Gl. (69) frequenzabhängig.

Zur Relativisierung der Gl. (70) wählt man die Bezugsleistung analog zu Gl. (55) wie folgt:

$$p = P/P_0 \; ; \; \underline{P_0 = U_s^2 G_0} \tag{71}$$

Damit wird

$$\boxed{p = g_{pä}} \tag{72}$$

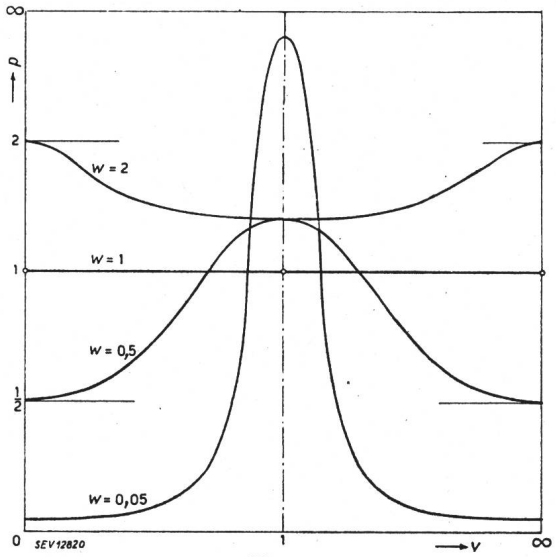

Fig. 15
Wirkleistungswerte der symmetrischen gemischten Schaltung für U_s = konst. mit der Dämpfung als Parameter

Nach Gl. (69) erhält man:

$$g_{pä} = y_s^2 r_{sä} \tag{73}$$

$r_{sä}$ ist nach Gl. (56) und (59) bekannt; y_s^2 berechnet sich folgendermassen:

$$\mathfrak{Y}_s = \frac{\mathfrak{Y}_L \cdot \mathfrak{Y}_C}{\mathfrak{Y}_L + \mathfrak{Y}_C}$$

$$\mathfrak{y}_s = \frac{(g_{pL} + js_L)(g_{pC} + js_C)}{(g_{pL} + g_{pC}) + j(s_C + s_L)}$$

$$\mathfrak{y}_s = \frac{(m - j/v)(n + jv)}{(m+n) + j(v - 1/v)}$$

$$\mathfrak{y}_s = \frac{(1+mn) + j(mv - n/v)}{(m+n) + j(v - 1/v)}$$

$$y_s^2 = \frac{(1+mn)^2 + (mv - n/v)^2}{(m+n)^2 + (v - 1/v)^2}$$

$$y_s^2 = \frac{m^2 v^4 + (1+q^4)v^2 + n^2}{v^4 - 2(1-2w^2)v^2 + 1} \tag{74}$$

Damit erhält man p für konstante indizierte Spannung schliesslich zu

$$p = \frac{mv^4 + rq^2v^2 + n}{v^4 - 2(1-2w^2)v^2 + 1} \quad \text{(Fig. 17)} \tag{75}$$

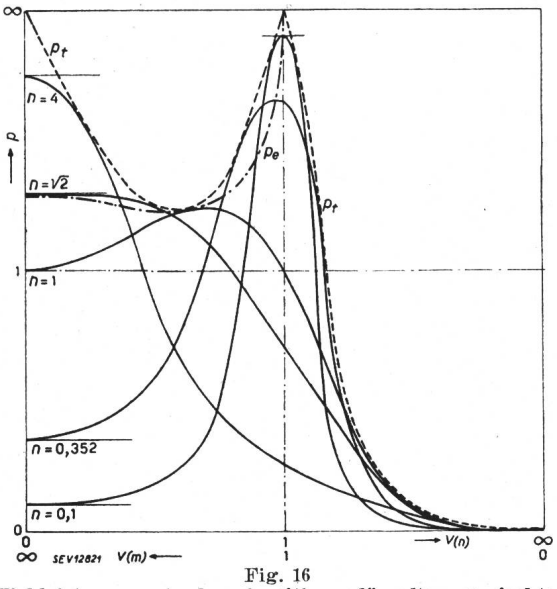

Fig. 16
Wirkleistungswerte der einseitig gedämpften gemischten Schaltung für U_s = konst. mit dem Widerstandswert als Parameter
(Man beachte beim Vergleich mit Fig. 15, dass m; $n = 2w$ ist!)
Die gestrichelte Kurve ist die Einhüllende,
die strichpunktierte ist die Ortskurve der Extrema

Diskussion:

a) $v = 0 \; ; \; \underline{p_0 = n}$

b) $v = 1 \; ; \; \underline{p_1 = \varrho(1+q^2)}$

$r^2 \; ; \; q^2 \ll 1 \; ; \; \underline{p_1 \approx \varrho}$

c) $v = \infty \; ; \; \underline{p_\infty = m}$

Spezialfälle der Parameterwerte:

1) $m = 0 \therefore \begin{cases} n = r \\ q = 0 \end{cases} ; \; \underline{p = \dfrac{n}{v^4 - 2(1-n^2/2)v^2 + 1}}$ (76)

a) $v = 0 \; ; \; \underline{p_0 = n = r}$ (Fig. 16)

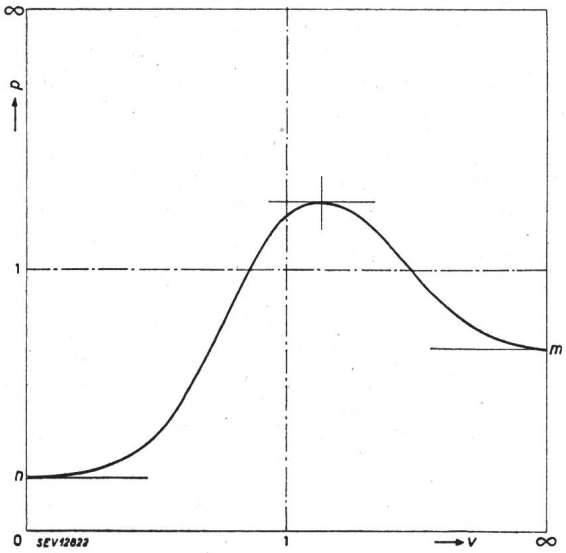

Fig. 17
Wirkleistungswert-Verlauf der asymmetrischen Schaltung für U_s = konst.
Z. B.: $m = 0{,}7$; $n = 0{,}2$ (vgl. Fig. 12)

b) $v = 1$; $p_1 = 1/n = \varrho$

c) $v = \infty$; $p_\infty = 0$

2) $m = n = w = q = r\ 2$; $p = w \dfrac{v^4+2w^2v^2+1}{v^4-2(1-2w^2)v^2+1}$

(Fig. 15) **(77)**

a) $v = 0$; $p_0 = w$

b) $v = 1$; $p_1 = \dfrac{1+w^2}{2w}$

$w^4 \ll 1$; $p_1 \approx \varrho/v_s^2$

$w^2 \ll 1$; $p_1 \approx \varrho$

c) $v = \infty$; $p_\infty = w$

3) $n = 0 \therefore \begin{cases} m = r \\ q = 0 \end{cases}$; $p = \dfrac{m}{1-2(1-m^2/2)/v^2+1/v^4}$

(Fig. 16) **(78)**

a) $v = 0$; $p_0 = 0$

b) $v = 1$; $p_1 = 1/m = \varrho$

c) $v = \infty$; $p_\infty = m = r$

Schnittpunkte mit der Linie $p = 1$:

1) $p = \dfrac{n}{v^4-2(1-n^2/2)v^2+1} = \dfrac{m\,v^4}{v^4-2(1-m^2/2)v^2+1} = 1$

$$v_1 = \sqrt{(1-n^2/2) \pm \sqrt{(1-n^2/2)^2-(1-n)}} =$$

$$= 1/\sqrt{(1-m^2/2) \pm \sqrt{(1-m^2/2)^2-(1-m)}} \quad \textbf{(79)}$$

(Fig. 18)

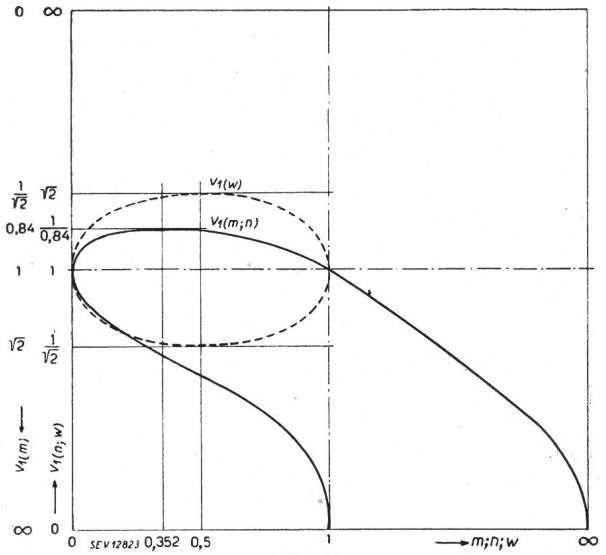

Fig. 18

Frequenzwerte für $p = 1$ (U_s = konst.) bei einseitig gedämpften (m; n) und symmetrischen Kreisen (w)

Diskussion:

$$n = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \infty \end{cases} ; \quad v_1 = \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 0 \end{cases} ; \quad {}^{tg}v_1 = \begin{cases} \pm\infty \\ -\frac{1}{2} \\ -\infty \end{cases}$$

in der Reziprok-Darstellungsweise.

$$n \ll 1 \ ; \ v_1 \approx \sqrt{1 \pm \sqrt{n}}$$

$$v_1 \approx 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

Die Kurve ähnelt im Scheitel einer liegenden quadratischen Parabel mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.

Der eine Ast hat ein Extremum bei

$$\frac{d(v_1^2)}{dn} = -n + \frac{1-2n+n^3}{2\sqrt{n-n^2+n^4/4}} = 0$$

$$n^3 - 2n^2 + 2n - \frac{1}{2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} n_e &= 0{,}352 \\ v_{1e} &= 1/0{,}84 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(80)}$$

2) $p = w \dfrac{v^4+2w^2v^2+1}{v^4-2(1-2w^2)v^2+1} = 1$

$$v_1 = \sqrt{(1+w-w^2) \pm \sqrt{(1+w-w^2)^2-1}} \quad \textbf{(81)}$$

Reziprok-zentrisch-symmetrisch

bezüglich $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$.

$$w = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} ; \quad v_1 = 1$$

$$w = \frac{1}{2} ; \quad v_1 = \begin{cases} \sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

Die *Einhüllende* zur Kurvenschar Gl. (76) erhält man nach Umformung

$$p = \frac{n}{v^2n^2+(v^2-1)^2}$$

aus dem Gleichungspaar entsprechend (65)

$$\left.\begin{aligned} pv^2n^2-n+p(v^2-1)^2 &= 0 \\ 2pv^2n-1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

durch Elimination des Parameters n. Aus Reziprozitätsgründen ergeben sich die Einhüllenden der Kurvenschaaren Gl. (76) und (78) zu

$$p_t = \frac{v^{-1}(n)}{2\,|\,1-v^2(n)\,|} = \frac{v^3(m)}{2\,|\,1-v^2(m)\,|} \quad \text{(Fig. 16)} \quad \textbf{(82)}$$

$$v(n) = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \infty \end{cases} ; \quad p_t = \begin{cases} \infty \\ \infty \\ 0 \end{cases} ; \quad {}^{tg}p_t = \begin{cases} -2 \\ \pm 4 \\ 0 \end{cases}$$

und ${}^{tg}p_t = 0$; $v(n) = 1/\sqrt{3} = 0{,}578$; $p_t = \frac{3}{4}\sqrt{3} = 1{,}30 = 1/0{,}77$

Für die Tangentenrichtungen bildet man die Ableitung:

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -4v\,\frac{(1-wm)\,mv^4-(m-n)\,v^2-(1-wn)\,n}{\{v^4-2(1-2w^2)\,v^2+1\}^2} \quad \textbf{(83)}$$

$$r^2 \ll 1 \ ; \ \frac{\partial p}{\partial v} \approx -4v\,\frac{mv^4-(m-n)\,v^2-n}{\{v^4-2(1-2w^2)\,v^2+1\}^2}$$

a) $v = 0\ ;\ \infty\ ;\ {}^{tg}p = 0$

b) für $v = 1$ ergibt sich nach Trennung von Linear- und Reziprok-Gebiet in Ordinatenrichtung:

$$\begin{cases} {}^{L\,tg}p = 2(m^2-n^2)\,\varrho^3 \\ {}^{0\,tg}p = \dfrac{m^2-n^2}{(1+q^2)^2}\,\varrho/2 \end{cases}$$

$$q^2 \ll 1 \ ; \ {}^{0\,tg}p \approx (m^2-n^2)\,\varrho/2$$

Das Extremum liegt bei $\dfrac{\partial p}{\partial v} = 0$, also bei

$$v_e^2 = \frac{(m-n) \pm \sqrt{(m+n)^2+4(1-wm)(1-wn)mn}}{2(1-wm)m}$$

Da v_e nur reell Sinn hat, heisst die Gleichung nach Multiplikation unter der Wurzel, die dann gezogen werden kann, und nach Kürzen

$$\underline{v_e = \sqrt{\frac{2-q^2-n^2}{2-q^2-m^2}}} \tag{84}$$

$$r^2 \; ; \; q^2 \ll 1 \; ; \; \underline{v_e \approx 1} \tag{84a}$$

$$1)\; m = 0 \therefore \begin{cases} n = r \\ q = 0 \end{cases} ; \; v_e = \sqrt{1-n^2/2} \tag{85}$$

$$w^4 \ll 1 \; ; \; v_e \approx v_s^2 \tag{85a}$$

$$2)\; m = n \; ; \qquad v_e = 1 \tag{86}$$

$$3)\; n = 0 \therefore \begin{cases} m = r \\ q = 0 \end{cases} ; \; v_e = 1/\sqrt{1-m^2/2} \tag{87}$$

$$w^4 \ll 1 \; ; \; v_e \approx 1/v_s^2 \tag{87a}$$

(79) in Gl. (74) eingesetzt ergibt die extremalen Wirkleistungs-Frequenzwerte

$$\underline{p_e = \varrho \frac{1-q^2w^2}{1-w^2}} \tag{88}$$

$$r^4 \ll 1 \; ; \; \underline{p_e \approx \varrho/v_s^2} \tag{88a}$$

$$r^2 \ll 1 \; ; \; \underline{p_e \approx \varrho} \tag{88b}$$

$$1)\; m \; ; n = 0 \therefore q = 0 \; ; \; \underline{p_e = \varrho/v_s^2} \tag{89}$$

$$2)\; m = n = w = q \; ; \quad \underline{p_e = \varrho\,(1+w^2)} \tag{90}$$

$$w^4 \ll 1 \; ; \quad \underline{p_e \approx \varrho/v_s^2} \tag{90a}$$

Den *geometrischen Ort der Extrema* erhält man durch Elimination von n bzw. m aus den Gleichungen (89) und (85) bzw. (87):

$$p_e = \frac{\sqrt{2}}{\{1+v_e^2(n)\}\sqrt{1-v_e^2(n)}} = \frac{\sqrt{2}}{\{1+1/v_e^2(m)\}\sqrt{1-1/v_e^2(m)}} \tag{91}$$

$$v_e(n) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} ; \; p_e = \begin{cases} \sqrt{2} \\ \infty \end{cases} ; \; {}^{tg}p_e = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

und ${}^{tg}p_e = 0$; $v_e(n) = 1/\sqrt{3} = 0{,}578$; $p_e = \frac{3}{4}\sqrt{3} = 1{,}30 = 1/0{,}77$

Die Extrema dieser Ortskurve und der Einhüllenden sind selbstverständlich identisch.

C. Schlussfolgerungen

Der Vergleich der Leistungskurven zeigt *erstens*, dass bei verlustarmen Kreisen nur der 1. Fall (U_s ; I_p = konst.) über den ganzen Frequenzbereich realisierbar ist, weswegen dies als Normalfall angesprochen werden muss; *zweitens* ist nicht nur Spannungs- und Stromverlauf, sondern auch der Leistungsverlauf für die gemischten Schaltungen ähnlich dem für die reinen Schaltungen, wenn die Dämpfung gering ist. Dagegen ergibt sich *drittens* für die gemischten Schaltungen eine Realisierbarkeit des 2. Falles (I_s ; U_p = konst.), wenn die Dämpfung stark ist. Ausserdem erhält die Leistungskurve mehr Resonanzcharakter. Die bisher in der elektrischen Schwingkreis-Technik vernachlässigten gemischten Schaltungen verdienen mehr Beachtung, da sie sehr wertvolle Eigenschaften besitzen. Als Anwendungsbeispiele möchte ich nur nennen: Breitbandverstärker, Frequenzgang-Korrektur, Brückenschaltungen aller Art, vor allem auch für Messzwecke.

Literatur

(Es sind ausschliesslich Veröffentlichungen des Verfassers aufgeführt.)

Der verlustbehaftete Parallel-Resonanzkreis als Wechselstromwiderstand. Bull. SEV Bd. 30(1939), Nr. 4, S. 99...109; Berichtigung Nr. 6, S. 174.

Serie-Resonanzkreis, gekoppelte Kreise und Bandfilter. Bull. SEV Bd. 30(1939), Nr. 19, S. 637...644; Bd. 31(1940), Nr. 19, S. 416...429; Berichtigung Nr. 21, S. 493, u. Bd. 32 (1941), Nr. 21, S. 541...564; Berichtigung Nr. 23, S. 622.

L-R- und *C-R*-Glieder sind entartete Schwingkreise. Bull. SEV Bd. 33(1942), Nr. 1, S. 19...22.

Theorie der Filter. RADIO-Service, 1944, Nr. 3/4, S. 60, mit Fortsetzungen in den folgenden Heften. (Diese Aufsatzreihe ist eine logisch aufgebaute Zusammenfassung der in zwangloser Folge zuerst genannten und des vorliegenden Artikels. Einleitend werden aber im Gegensatz zu den anderen Aufsätzen auch die *nichtstationären Zustände*, z. B. Eigenschwingungen, Einschwingvorgänge bei Fremderregung, usw., eingehend behandelt.)

Die beiden wichtigsten «Tonblenden»-Schaltungen und ihre Berechnung. Bull. SEV Bd. 34(1943), Nr. 17, S. 506...510.

Zwei und mehr Lautsprecher am Verstärker-Ausgang. Abschnitt 2, Hochton- und Tiefton-Lautsprecher. Bull. SEV Bd. 33(1942), Nr. 4, S. 107.

Adresse des Autors:
Erwin de Gruyter, «Oranjehof», Wabern bei Bern.

Das Unterwasserkraftwerk im Vergleich zu einem Flusskraftwerk in Kaplanbauweise

Von *H. Christaller*, Biberach a. d. Riss

621.311.21 : 624.034.3

Für ein zurzeit im Bau befindliches Wasserkraftwerk an der Iller wurden vergleichsweise die Kaplanbauweise und die Unterwasserbauweise durchprojektiert. Das Ergebnis dieses Vergleichs zeigt, dass die Unterwasserbauweise etwas teurer als die Kaplanbauweise geworden wäre. Die bautechnischen, betrieblichen und wirtschaftlichen Gründe, die zur Wahl der Kaplanbauweise geführt haben, werden im einzelnen erörtert.

Pour une usine hydroélectrique en construction sur l'Iller, des projets avaient été établis aussi bien pour des turbines Francis, que pour des turbines Kaplan, ce qui a permis de constater que ces dernières sont un peu moins coûteuses. L'auteur passe en revue les raisons qui ont motivé l'adoption des turbines Kaplan, au point de vue de la construction, de l'exploitation et du rendement économique.

Das erste grössere Unterwasserkraftwerk, System Arno Fischer, wurde in Steinbach an der Iller zwischen Kempten und Memmingen im Jahre 1937/38 erstellt. 8 km unterhalb von Steinbach projektierte die Energie-Versorgung Schwaben A.-G. (EVS), Biberach a. d. Riss, eine Flusskraftstufe an der Iller unter ganz ähnlichen topographischen und wasserwirtschaftlichen Verhältnissen. Nach eingehenden Vergleichsstudien zwischen der üblichen Kaplan-Bauweise und der Unterwasserbauweise entschloss sich die EVS zur erstgenannten. Mit dem Ausbau wurde im Frühjahr 1948 begonnen.