

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 38 (1947)

Heft: 24

Artikel: Wärmeverbreitung in fester Materie [Fortsetzung]

Autor: Runte, E.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1061457>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Wärmeverbreitung in fester Materie

Von E. Runte, Neuchâtel

[Fortsetzung von Bd. 37(1946), Nr. 22, S. 651]

III. Teil

Die Abkühlungsdauer verschiedener Räume

536.12 : 697.12

Im dritten Teil der Abhandlung werden Anheiz- und Abkühlungsvorgänge von Räumen in ihrem Zusammenhang mathematisch untersucht. Es wird zunächst der Einfluss des Wärmedurchgangs durch die Wände gezeigt, dann die Abkühlung infolge Temperaturausgleiches in der festen Materie. An Beispielen wird nachgewiesen, dass das durch die Aufheizung erzeugte Temperaturfeld weitgehend unabhängig ist von der Art der Aufheizung und nur durch den gesamten Wärmeinhalt des Feldes und die am Ende der Heizdauer erreichte Wandtemperatur bestimmt wird.

Hieraus ergibt sich eine brauchbare Grundlage zur annäherungsweisen Berechnung der Temperaturveränderungen in der Materie. Durch Anpassen und Ueberlagern der im ersten Teil dieser Abhandlung beschriebenen Temperaturfelder lässt sich ein anschauliches Bild verschiedener Anheiz- und Abkühlungsvorgänge darstellen.

Einleitung

Die der Aufheizung folgende Abkühlung von Räumen ist von verschiedenen Faktoren abhängig, und es ist möglich, an Hand von zweckmäßig gewählten Beispielen ein der Wirklichkeit genügend angenähertes Bild zu erhalten.

Es seien die im zweiten Teil bereits getroffenen Annahmen auch für die folgenden Ableitungen gültig, und, nachdem der Verlauf der Aufheizung für drei Räume geprüft wurde, die sich nur durch die Art ihrer Begrenzungsflächen unterscheiden, soll nun auch ihre Abkühlung untersucht werden.

Da der erste Raum vollständig wärmeundurchlässige Begrenzungsflächen aufweist, findet überhaupt keine Abkühlung der Raumluft statt.

Die Begrenzungsflächen des zweiten Raumes hingegen sind in bestimmtem Mass wärmedurchlässig; die Materie ihrer Wände hat aber keine Wärmekapazität, und die natürliche Abkühlung seiner Raumluft ist Funktion des Wärmeinhaltes dieser Luft und des Wärmedurchgangs durch die Wände.

Der dritte Raum befindet sich innerhalb der endlos gedachten Materie mit der Wärmekapazität eines Natursteins, und seine Aufheizung hat ein Temperaturfeld in dieser Materie erzeugt. Die Abkühlung des Raumes ist nur von diesem Temperaturfeld und dessen Materialkonstanten abhängig, insofern kein künstlicher Wärmeentzug vorgenommen wird.

Sollte aber die Materie überall die gleiche Temperatur aufweisen, so würde überhaupt keine natürliche Abkühlung des Raumes stattfinden, und man kann sich dann die Aufgabe stellen, den künstlichen Wärmeentzug zu berechnen, der erforderlich ist, um die Raumluft dauernd auf einer tieferen, ebenfalls konstanten Temperatur zu halten.

La troisième partie de l'exposé étudie mathématiquement le chauffage, le refroidissement et les relations qui lient ces deux phénomènes. On montre tout d'abord l'influence de la perméabilité calorifique des parois, puis le refroidissement dû à l'égalisation des températures dans la masse. En s'appuyant sur des exemples, on montre que le champ thermique du chauffage dépend très peu de la façon dont on chauffe. Il est déterminé principalement par la quantité de chaleur introduite et la température finale de la surface.

Il en découle une base théorique utile pour le calcul approché des variations de température dans une masse solide. En appliquant et en superposant les champs thermiques décrits dans la première partie de cet exposé, on obtient une image expressive de divers cycles de chauffage et refroidissement.

Die mathematische Behandlung¹⁾

1

Es soll die Abkühlung eines Luftraumes berechnet werden, in dessen Grenzflächen die Wärme der Raumluft eindringt, ohne in festem Material zu verbleiben, so dass nur ein Wärmedurchgang durch eine Materialschicht stattfindet.

Es ist:

$$\frac{dQ_{L_t}}{dt} = -k A_d \Delta \vartheta_{L_a} \quad (25)$$

$$Q_{L_t} = c_p \gamma_L V \Delta \vartheta_{L_a}$$

woraus:

$$\frac{d \Delta \vartheta_{L_a}}{dt} = -\frac{k A_d}{c_p \gamma_L V} \Delta \vartheta_{L_a}$$

und:

$$\ln \Delta \vartheta_{L_a} = -\frac{k A_d}{c_p \gamma_L V} t + c_i$$

wo c_i die Integrationskonstante ist.

$$\Delta \vartheta_{L_a} = \Delta \vartheta_{L_{a \max}} \cdot e^{-\frac{k A_d t}{c_p \gamma_L V}} ; \quad \Delta \vartheta_{L_{a \max}} = \vartheta_{L_b} - \vartheta_{L_a} \quad (26)$$

Die erforderliche Abkühlungsdauer t_K , um das Temperaturgefälle $\Delta \vartheta_{L_a}$ auf den n^{ten} Teil von $\Delta \vartheta_{L_{a \max}}$ zu bringen, ist:

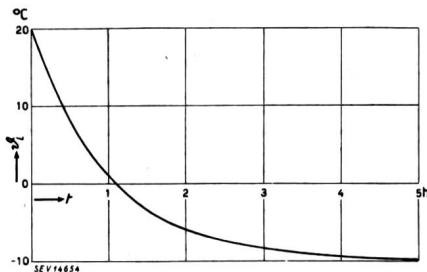
$$t_K = \frac{c_p \gamma_L V}{k A_d} \ln n ; \quad \text{wo} \quad n = \frac{\Delta \vartheta_{L_{a \max}}}{\Delta \vartheta_{L_a}} \quad (27)$$

Der Wärmedurchgang pro Einheit der Begrenzungsfläche zur Zeit t ist:

$$q_{wt} = -k A_d \Delta \vartheta_{L_{a \max}} \cdot e^{-\frac{k A_d t}{c_p \gamma_L V}} \quad (28)$$

¹⁾ siehe die Bezeichnungen im Bull. SEV Bd. 37(1946), Nr. 22, S. 648.

Fig. 4 zeigt den angenäherten Abkühlungsvorgang eines gut isolierten Raumes, dessen Wände keine Wärmekapazität aufweisen. Die in der Berechnung dieses Beispiels verwendeten Konstanten sind:



$$\begin{aligned} V &= 60 \text{ m}^3 & \gamma_L &= 1,293 \text{ kg/m}^3 \\ Ad &= 94 \text{ m}^2 & \vartheta_{Lb} &= 20^\circ\text{C} \\ k &= 0,2 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C} & \vartheta_{La} &= 10^\circ\text{C} \\ c_p &= 0,24 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C} \end{aligned}$$

2

Nun soll die natürliche Abkühlung des geheizten Raumes untersucht werden, der vollständig in unbegrenzter Materie liegt. Der Wärmeinhalt der Luft hat einen geringen Einfluss auf die Temperaturverhältnisse der Räume, deren Wände eine bestimmte Wärmekapazität aufweisen. Dies wurde im zweiten Teil dieser Abhandlung bereits festgestellt; daher kann in diesem Fall der Wärmeinhalt der Luft vernachlässigt werden.

Zur näherungsweisen Berechnung des Abkühlungsvorganges wird des weiteren angenommen, dass das Temperaturfeld in der Materie am Ende der Aufheizung demjenigen einer ebenen Wärmequelle entspricht, den Feldern ähnlich, die im ersten Teil der Abhandlung gezeigt wurden, wobei die Raumtemperatur derjenigen der Wärmequellen, bzw. der Symmetrieebene solcher Felder gleichgestellt wird. Das heißt mit anderen Worten, dass der Einfluss der Raumkanten auf die Temperaturverteilung in der Materie vernachlässigt wird; der dadurch entstehende Fehler dürfte in einiger Entfernung von den Kanten an den Begrenzungsfächlen von nicht sehr grosser Bedeutung sein.

Wie bereits gesagt wurde, stellt sich nach sehr langem Heizen ein Wärmezustand ein, der für einen kubischen Raum demjenigen eines Raumes sphärischer Form ähnlich ist, und somit lässt sich die Grösse des durch die getroffene Annahme bedingten Fehlers abschätzen.

Untersucht man aber unter Berücksichtigung der besprochenen Voraussetzung das Temperaturfeld, so findet man, dass es in gewissem Mass unabhängig ist von der Art, mit welcher es erzeugt wurde, und in der Hauptsache nur durch seinen Wärmeinhalt bestimmt wird. Dies erleichtert wesentlich die näherungsweise Berechnung des Abkühlungsvorganges.

Vergleicht man z. B. den Temperaturverlauf, der sich im Feld einstellt, wenn der Raum mit konstanter Heizleistung P_0 so lange geheizt wird, bis er die Temperatur ϑ_{Le} erreicht, mit dem Temperaturverlauf des Feldes gleichen Wärmeinhaltes, der durch Heizen des Raumes bei konstanter Temperatur ϑ_{Le}

gebildet wird, so ergibt sich eine bemerkenswerte Ähnlichkeit, wie Fig. 5 zeigt.

Im ersten Fall werde der Raum mit einer konstanten Heizleistung P_0 während t_{e1} Stunden geheizt, wobei er die Temperatur ϑ_{Le} erreicht. Der Wärmeinhalt des Feldes ist dann:

$$Q = P_0 t_{e1}$$

Die Raumtemperatur ist gemäss (5)

$$\vartheta_{Le} = \frac{2 P_0}{b A_w} \sqrt{\frac{t_{e1}}{\pi}}$$

Fig. 5

Somit:

$$Q = \frac{b A_w}{2} \vartheta_{Le} \sqrt{\pi t_{e1}} \quad (29)$$

Im zweiten Fall werde der Raum während t_{e2} Stunden auf konstante Temperatur ϑ_{Le} geheizt, wobei die Heizdauer t_{e2} derart gewählt ist, dass der Wärmeinhalt des Feldes wiederum Q wird.

Zu Beginn der Heizung, wenn $t = 0$ ist, herrscht in beiden Fällen überall dieselbe Anfangstemperatur.

Es ist im zweiten Feld:

$$Q = 2 b A_w \vartheta_{Le} \sqrt{\frac{t_{e2}}{\pi}} \quad (30)$$

Aus (29) und (30) ergibt sich:

$$\frac{t_{e1}}{t_{e2}} = \frac{16}{\pi^2} \quad (31)$$

Der Wärmeinhalt Q wird somit im ersten Feld nach zirka 60 % längerer Heizdauer erreicht, als im zweiten.

Die im zweiten Fall zur Aufrechterhaltung der konstanten Raumtemperatur ϑ_{Le} erforderliche Heizleistung nimmt im Verlauf der Heizdauer dauernd ab und erreicht am Ende derselben einen Minimalwert P_{min} .

Es ist:

$$P_{min} = \frac{A_w b \vartheta_{Le}}{\sqrt{\pi t_{e2}}}$$

$$P_0 = \frac{A_w b \vartheta_{Le}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t_{e1}}}$$

woraus:

$$\frac{P_{min}}{P_0} = \frac{8}{\pi^2} \quad (32)$$

Fig. 6 zeigt die Heizleistung in Abhängigkeit von der Heizdauer bei Aufheizung des Raumes, im ersten Fall mit konstanter Heizleistung, im zweiten Fall bei konstanter Raumtemperatur bis zum selben Wärmeinhalt Q des Temperaturfeldes.

Die untersuchten Temperaturfelder sind darum von einer gewissen Bedeutung, weil sie Grenzfälle

darstellen, und die häufigsten Anwendungen innerhalb dieser Grenzen liegen. Es werden meistens die Räume mit konstanter Leistung solange aufgeheizt, bis eine bestimmte, erwünschte Temperatur erreicht ist, welche dann mit Thermostaten konstant gehalten wird.

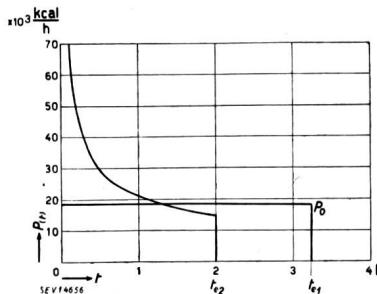


Fig. 6

Nach Fig. 5 kann nun näherungsweise angenommen werden, dass das Temperaturfeld nur von seinem Wärmeinhalt und von der Raumtemperatur am Ende der Aufheizung abhängig ist. Zur Bestimmung des Abkühlungsvorganges kann dieses Feld aber wiederum verglichen werden mit demjenigen konstanten Wärmeinhaltes, das im ersten Teil dieser Abhandlung unter (10) beschrieben ist, worin:

$$\vartheta_L = \frac{Q_k}{b A_w \sqrt{\pi(t_0 + t)}} \quad (33)$$

Wählt man t_0 derart, dass ϑ_L zu Beginn des Abkühlungsvorganges, zur Zeit $t = 0$, ungefähr den Wert ϑ_{Le} hat, so erhält man:

$$t_0 = \frac{Q_k^2}{\pi b^2 A_w^2 \vartheta_{max}^2}$$

wobei $\vartheta_{max} < \vartheta_{Le}$ sein muss.

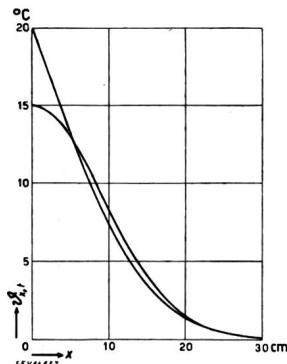


Fig. 7

Fig. 7 zeigt die Ähnlichkeit der Temperaturfelder gleichen Wärmeinhaltes am Ende der Aufheizung und kurze Zeit nach Beginn der Abkühlung. Das Temperaturfeld des Abkühlungsvorganges hat nun gemäß (10) die Gleichung:

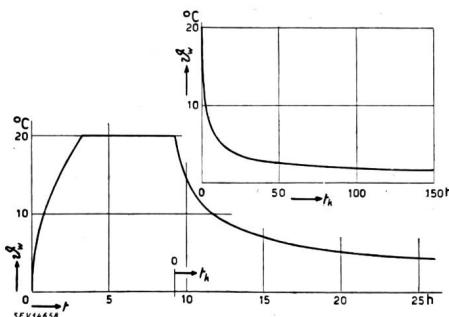


Fig. 8

$$\vartheta_{x,t} = \frac{Q_k}{b A_w \sqrt{\pi(t_0 + t)}} e^{-\frac{x^2}{4a(t_0 + t)}} \quad (34)$$

Fig. 8 zeigt das Bild der Aufheizung eines Raumes mit konstanter Heizleistung bis zur Temperatur 20 °C, worauf diese Temperatur während sechs

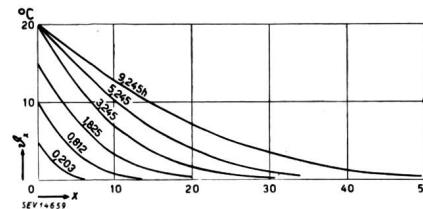


Fig. 9a

Stunden konstant gehalten wird und danach die Abkühlung des Raumes stattfindet, infolge Abwanderung der Wärme in der unbegrenzten Materie gemäß Formel (33). Fig. 9a zeigt das entsprechende

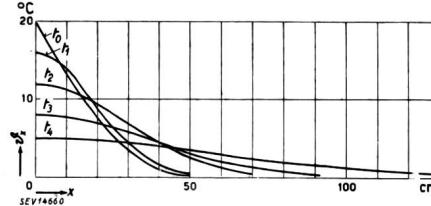


Fig. 9b

Temperaturfeld in der Materie während der Aufheizung und Fig. 9b während der Abkühlung des Raumes.

3

Es soll der künstliche Wärmeentzug berechnet werden, der erforderlich ist, um einen allseitig von unbegrenzter Materie umgebenen Raum auf einer tieferen, konstanten Temperatur zu halten, als die ursprünglich gleichmäßige Temperatur der Materie.

Die Aufgabe kann näherungsweise darauf zurückgeführt werden, die Wände des Raumes von ihrer ursprünglichen Temperatur auf eine bestimmte tiefere Temperatur ϑ_{wK} abzukühlen.

Zu Beginn des Abkühlungsvorganges wird die Raumwärme mit konstanter Leistung P_K entzogen, bis die gewünschte Wandtemperatur ϑ_{wK} erreicht ist, dann soll diese Temperatur konstant gehalten werden.

Die Lufttemperatur wird somit, solange bis die Wandtemperatur $\Delta\vartheta_{wK}$ erreicht ist, konstant $\Delta\vartheta_{Lw}$ kälter sein als die Wand. Von diesem Zeitpunkt an nimmt hingegen die Temperatordifferenz $\Delta\vartheta_{Lw}$ ab, und die Wandtemperatur gleicht sich der Lufttemperatur an.

Der erste Teil des Vorganges kann wieder mit guter Annäherung durch das entsprechend angepasste Temperaturfeld (5) dargestellt werden:

$$\vartheta_{x,t} = \vartheta_{wb} - \frac{2P_K}{bA_w} \sqrt{t} \left(\frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{\pi}} - \xi [1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\eta^2} d\eta] \right) \quad (35)$$

wo $\xi = x/2 \sqrt{at}$ und P_K den konstanten Wärmeentzug bedeutet. Die Wandtemperatur ist dann durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\vartheta_w = \vartheta_{wb} - \frac{2P_K}{bA_w} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \quad (36)$$

Zur Zeit t_1 ist die Wand um $\Delta\vartheta_{wK}$ abgekühlt. Es ist:

$$t_1 = \frac{\pi}{4} b^2 \frac{A_w^2}{P_K^2} \Delta\vartheta_{wK}^2 \quad (37)$$

wo $\Delta\vartheta_{wK} = \vartheta_{wb} - \vartheta_{wK}$

Die Lufttemperatur bis zur Zeit t_1 hat den Wert:

$$\vartheta_L = \vartheta_{wb} - \frac{P_K}{A_w} \left(\frac{2}{b} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{1}{\alpha_l} \right) \quad (38)$$

Der zweite Teil des Vorganges ist annähernd durch das angepasste Temperaturfeld (7) wiedergegeben:

$$\vartheta_{x,t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Delta\vartheta_{wK} \int_0^\xi e^{-\eta^2} d\eta \quad (39)$$

wobei $\xi = \frac{x}{2\sqrt{a(t_0+t)}}$

$$\text{Nach (31) muss } t_0 = \frac{\pi}{16} t_1$$

gewählt werden, damit sich der Wärmeinhalt der beiden Temperaturfelder (35) und (39) zur Zeit t_1 bzw. t_0 entspricht, und es ist daher:

$$t_0 = \frac{\pi^3}{64} b^2 \frac{A_w^2}{P_K^2} \Delta\vartheta_{wK}^2 \quad (40)$$

Vom Zeitpunkt t_1 an nimmt der Wärmeentzug $P_{K,t}$ aus dem Raum ständig ab:

$$P_{K,t} = b A_w \frac{\Delta\vartheta_{wK}}{\sqrt{\pi(t_0+t)}} \quad (41)$$

$$P_{K,0} = b A_w \frac{\Delta\vartheta_{wK}}{\sqrt{\pi t_0}} \quad (42)$$

Gemäss (32) ist $P_{K,0} = P_K \frac{8}{\pi^2}$

Die Unstetigkeit der Leistung beim Uebergang von einem Temperaturfeld zum anderen ergibt sich aus der annäherungsweisen Berechnung und hat ebenfalls eine Unstetigkeit des Temperaturverlaufes der Raumluft zur Folge.

Die Lufttemperatur, vom Zeitpunkt t_1 an, ist:

$$\vartheta_L = \vartheta_{wb} - \frac{b}{\alpha_l} \frac{\Delta\vartheta_{wK}}{\sqrt{\pi(t_0+t)}} \quad (43)$$

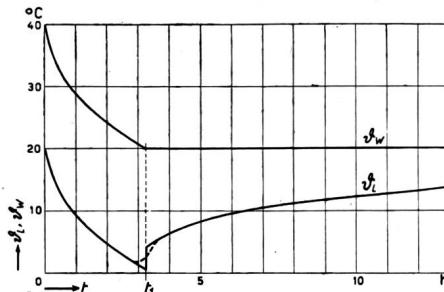


Fig. 10

Fig. 10 zeigt den Temperaturverlauf der Wand und denjenigen der Luft vor und nach dem Zeitpunkt

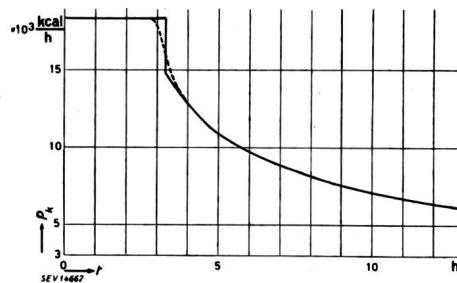


Fig. 11

t_1 , Fig. 11 das entsprechende Leistungsdiagramm, und Fig. 12 das Temperaturfeld in der Materie.

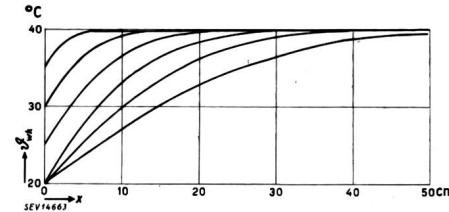


Fig. 12

Die in der Berechnung der Beispiele gemäss Fig. 5...11 verwendeten Konstanten sind:

A_w	= 94 m ²
a	= $3,05 \cdot 10^{-3}$ m ² /h
b	= 19,9 kcal/m ² h ^{1/2} °C
α_l	= 10 kcal/m ² h °C
P_0, P_K	= 18 400 kcal/h
Fig. 5—9:	$\vartheta_{wb} = 0$ °C
Fig. 10, 11:	$\vartheta_{wb} = 40$ °C
	$\vartheta_{wK} = 20$ °C

536.12

Cette partie de l'exposé traite du retard que subit une onde de température en pénétrant dans la matière solide. Une onde élémentaire de température, par exemple, qui pénètre dans une masse solide semi-infinie limitée par un plan est en retard de $1/8$ de période sur l'onde de flux de chaleur correspondante. Cette constatation explique notamment le décalage entre la température maximale de l'été et le solstice d'été.

En pénétrant en profondeur dans la matière, les ondes de température et de chaleur se ralentissent et s'amortissent. Ce phénomène physique trouve différentes applications, entre autre dans la technique du chauffage.

In diesem Teil der Abhandlung wird die verzögernde Wirkung der Materie bei der Verbreitung von Temperaturschwingungen gezeigt. So ist z. B. eine elementare Temperaturschwingung an der ebenen Oberfläche der nur durch diese Ebene begrenzten Materie um $1/8$ ihrer Periode verzögert gegenüber derjenigen des Ein- und Ausströmens der Wärme, woraus sich unter anderem das verspätete Auftreten der höchsten Sommertemperaturen gegenüber der Sommer-Sonnenwende erklären lässt.

Bei tieferem Eindringen der Temperatur und Wärme-fluss-Schwingungen in die Materie verzögern sich diese und klingen ab. Die Anwendung dieser Erkenntnisse wird für verschiedene Fragen behandelt, welche auch die Heiztechnik berühren.

Einleitung

In den ersten drei Teilen dieser Abhandlung wurden Temperaturfelder beschrieben, die von ebenen Wärmequellen in der endlosen, festen Materie erzeugt sind durch konstante, dauernd steigende oder fallende Quellentemperaturen. Durch zweckmässige Anpassung dieser Erkenntnisse wurden beispielsweise verschiedene Fragen der Raumbeheizung und -kühlung behandelt und ein anschauliches Bild dieser Vorgänge angenähert wiedergegeben. Der Einblick in die Vorgänge der Temperaturverschiebungen infolge nicht stationärer Wärmezustände wird aber noch viel deutlicher, wenn die ebenen Wärmequellen einen periodischen Temperaturverlauf aufweisen, und die Behandlung dieser Aufgabe führt wieder zu einer Anzahl praktischer Folgerungen.

Die einfachste Vorstellung, die man sich vom Feld einer ebenen Wärmequelle mit periodischem Temperaturverlauf machen kann, ergibt sich, wenn man diese Quelle auf die nur durch sie begrenzte Materie überall gleicher Grundtemperatur wirken lässt und ihrem Temperaturverlauf z. B. den Charakter einer Cosinusfunktion gibt, die in allen Punkten der Quelle gleichzeitig immer denselben Wert hat. Die Temperaturen schwingen in diesem Fall überall in der Materie um die Grundtemperatur, und die Amplitude der Schwingung nimmt mit wachsendem Abstand von der Wärmequelle ab.

Der Heizungsfachmann könnte z. B. ein besonderes Interesse für die Frage haben, in welcher Entfernung von der Oberfläche die Amplitude der Schwingung der Tages- und Nachttemperaturen noch praktisch wirksam ist, und welchen Einfluss die Dauer einer Temperaturschwingung in dieser Tiefe haben kann. Wie sich aus der folgenden mathematischen Behandlung dieses Vorganges ergibt, treten die Maxima und Minima der Temperaturschwingungen innerhalb der Materie gegenüber dem Zeitpunkt ihres Auftretens an der Oberfläche mit einer Verzögerung auf, die um so bedeutender ist, je weiter man sich von der Oberfläche entfernt. Die Temperaturschwingung an der Oberfläche ist des weiteren um $\frac{1}{8}$ der Schwingungsdauer verzögert gegenüber dem Ein- und Ausströmen der Wärme, und diese Erscheinung kann dazu beitragen, verschiedene Naturvorgänge zu erklären. So müssten demnach unter den genannten Voraussetzungen z. B. die höchsten Sommertemperaturen am 5. August, d. h. sechs Wochen später auftreten, als die grösste Wärmeaufnahme des Erdbodens, die am 21. Juni stattfindet; die höchsten Tagestemperaturen wären zirka drei Stunden nach der Mittagszeit, und die tiefsten Nachttemperaturen um zirka drei Uhr morgens.

Es kann auch die Ueberlagerung von zwei Schwingungen untersucht werden, wovon beispielsweise eine mit der Periodizität einer Jahresdauer variiert und annähernd dem Temperaturverlauf von Sommer und Winter entspricht, wogegen die andere eine 24stündige Schwingungsdauer aufweist und die Variation der Tages- und Nachttemperaturen darstellt.

In der Heiztechnik hat man es aber nicht mit unbegrenzter Materie zu tun, sondern mit Mauern von bestimmter Dicke, die von aussen den Klimaschwankungen ausgesetzt sind und auf der Innenseite durch die Heizeinrichtung auf annähernd konstanter Temperatur gehalten werden. Es kann daher noch die Frage von Interesse sein, ob der Übergang von der unbegrenzten Materie zu einer bestimmten Mauerdicke den Verlauf der Amplituden und die Verzögerung des Auftretens der Temperatur-Maxima und -Minima im Inneren der Materie verändert und in welchem Mass, ferner wie der Wärmefluss auf der geheizten Innenseite der Mauer von der äusseren Klimaschwankung abhängt. Der Wärmeübergang von der Luft zur Materie kann annähernd erfasst werden, sobald der Wärmefluss an den Maueroberflächen bestimmt ist.

Die mathematische Behandlung

1

Die Temperatur einer ebenen, dem Klima ausgesetzten Begrenzungsfläche der Materie sei gegeben durch:

$$\Delta\vartheta_{W,t} = \Delta\vartheta_{Wm} \cos \frac{2\pi t}{T} \quad (44)$$

Sollte z. B. diese Funktion dem klimatischen Jahresverlauf der Oberflächentemperatur angenähert entsprechen, so wäre T ungefähr 8640 h, und man könnte die Fläche, die von einer Cosinuslinie derselben Periode umschlossen ist, gleich gross wählen, wie diejenige, die von der Jahresdurchschnittstemperatur und den einzelnen Mittelwerten der Monatstemperaturen begrenzt wird. Damit wäre die Amplitude $\Delta\vartheta_{Wm}$ eideutig bestimmt.

Fig. 13 zeigt die Anpassung einer Cosinuslinie an einen Klimaverlauf.

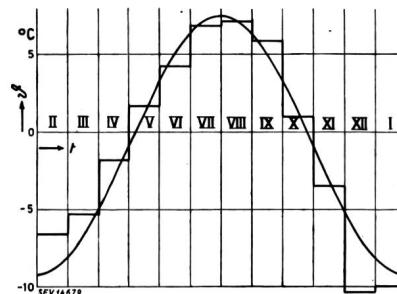


Fig. 13

Gl. (45) stellt ein Temperaturfeld in der Materie dar, das an deren Oberfläche eine Schwingung gemäss (44) aufweist:

$$\Delta\vartheta_{x,t} = \Delta\vartheta_{Wm} \nu_{\vartheta_x} \cos \frac{2\pi}{T} (t - \Delta t_{\vartheta_x}) \quad (45)$$

Die Temperatur im Abstand x von der Oberfläche schwingt mit einer Amplitude $\Delta\vartheta_{Wm} \nu_{\vartheta_x}$ und einer Verzögerung Δt_{ϑ_x} in bezug auf die Oberflächentemperatur, wo ν_{ϑ_x} der Dämpfungsfaktor ist, der das Abklingen der Temperaturschwingung bewirkt.

Es sind ν_{ϑ_x} und Δt_{ϑ_x} Funktionen von x , und bei geeigneter Wahl derselben ist nicht nur (45) eine

Lösung der Differentialgleichung (4) der Wärmeverbreitung, sondern sie erfüllt auch die Randbedingungen, die durch den vorgeschriebenen Temperaturverlauf an der Materialoberfläche bestimmt sind.

Gl. (45) kann auch folgendermassen dargestellt werden:

$$\Delta \vartheta_{x,t} = \Delta \vartheta_{Wm} \left(f_x \cos 2\pi \frac{t}{T} + g_x \sin 2\pi \frac{t}{T} \right) \quad (45a)$$

wo

$$f_x = \nu_{\vartheta_x} \cos \frac{2\pi}{T} \Delta t_{\vartheta_x}; \quad g_x = \nu_{\vartheta_x} \sin \frac{2\pi}{T} \Delta t_{\vartheta_x}$$

und

$$\nu_{\vartheta_x} = (f_x^2 + g_x^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \Delta t_{\vartheta_x} = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{g_x}{f_x}$$

An der Oberfläche ist $x = 0$, woraus:

$$f_0 = 1; \quad g_0 = 0; \quad \nu_0 = 1; \quad \Delta t_0 = 0$$

Der in der Materie auftretende Wärmefluss ist gegeben durch:

$$q_{x,t} = q_{Wm} \nu_{qx} \cos \frac{2\pi}{T} (t - \Delta t_{qx}) \quad (46)$$

Der Wärmefluss schwingt am Ort x mit einer Amplitude $q_{Wm} \nu_{qx}$ und mit einer Verzögerung Δt_{qx} gegenüber der Temperaturschwingung an der Oberfläche, wo ν_{qx} der Dämpfungsfaktor ist für das Abklingen der Wärmeflusswelle.

Gl. (46) kann auch folgendermassen dargestellt werden:

$$q_{x,t} = -\lambda A_W \Delta \vartheta_{Wm} \left(f'_x \cos 2\pi \frac{t}{T} + g'_x \sin 2\pi \frac{t}{T} \right) \quad (46a)$$

Es ist:

$$f'_x = -\left(\nu'_{\vartheta_x}^2 + \frac{4\pi^2}{T^2} \nu_{\vartheta_x}^2 \Delta t'_{\vartheta_x}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{2\pi}{T} \left(\Delta t_{\vartheta_x} + \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{T} \frac{\nu_{\vartheta_x}}{\nu'_{\vartheta_x}} \Delta t'_{\vartheta_x} \right)$$

$$g'_x = -\left(\nu'_{\vartheta_x}^2 + \frac{4\pi^2}{T^2} \nu_{\vartheta_x}^2 \Delta t'_{\vartheta_x}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{2\pi}{T} \left(\Delta t_{\vartheta_x} + \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{T} \frac{\nu_{\vartheta_x}}{\nu'_{\vartheta_x}} \Delta t'_{\vartheta_x} \right) \quad (47)$$

$$q_{Wm} = \lambda A_W \Delta \vartheta_{Wm} \left(\nu_0^2 + \frac{4\pi^2}{T^2} \Delta t_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \lambda A_W \Delta \vartheta_{Wm} (f_0^2 + g_0^2)^{\frac{1}{2}} \quad (48)$$

$$\nu_{qx} = \left(\frac{\nu'_{\vartheta_x} T^2 + 4\pi^2 \nu_{\vartheta_x} \Delta t'_{\vartheta_x}^2}{\nu_0^2 T^2 + 4\pi^2 \Delta t_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{f'_x^2 + g'_x^2}{f_0^2 + g_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (49)$$

$$\Delta t_{qx} = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{T} \frac{\nu_{\vartheta_x}}{\nu'_{\vartheta_x}} \Delta t'_{\vartheta_x} + \Delta t_{\vartheta_x} = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{g'_x}{f'_x} \quad (50)$$

Der Wärmefluss an der Materialoberfläche hat die Gleichung:

$$q_{W,t} = \lambda A_W \Delta \vartheta_{Wm} (f_0^2 + g_0^2)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{2\pi}{T} (t - \Delta t_{q0}) \quad (51)$$

$$\text{wo: } \Delta t_{q0} = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{T} \frac{\Delta t'_{\vartheta_x}}{\nu'_{\vartheta_x}}$$

Der Temperaturgradient von der Luft zur Materialoberfläche ist $\Delta \vartheta_{LW}$ und hat die Gleichung:

$$\Delta \vartheta_{LW} = \frac{\lambda}{\alpha} \Delta \vartheta_{Wm} (f_0^2 + g_0^2)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{2\pi}{T} (t - \Delta t_{q0}) \quad (52)$$

Die Schwingung der Lufttemperatur ist gegenüber derjenigen der Oberflächentemperatur der Materie stets um die gleiche Dauer verschoben wie die Schwingung des Wärmeflusses q_W .

2

Es soll nun das Temperaturfeld der endlosen Materie untersucht werden, die nur einseitig von einer Ebene begrenzt ist, welche eine Temperaturschwingung nach Gl. (44) aufweist. Der Dämpfungsfaktor ν_{ϑ_x} am Orte x ist in diesem Fall:

$$\nu_{\vartheta_x} = e^{-\sigma} \text{ wo } \sigma = \frac{x}{\tau} \text{ und } \tau = \sqrt{\frac{\alpha T}{\pi}} \quad (53)$$

Die Temperaturschwingung klingt mit zunehmender Entfernung von der Oberfläche ab, und zwar um so weniger, je geringer ihre Dauer ist. Fig. 14 zeigt τ

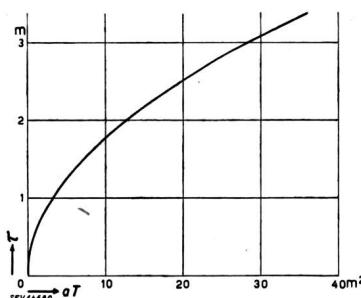


Fig. 14

als Funktion von $a T$ und Fig. 15 stellt σ als Funktion von ν_{ϑ_x} dar. Mit diesen Figuren kann man für jede Schwingungsdauer ermitteln, wie tief die Amplitude der Temperaturschwingung in einem

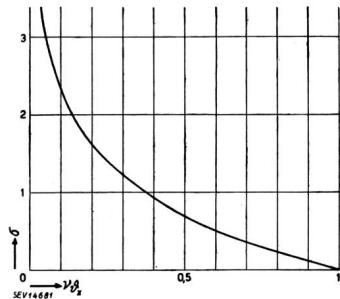


Fig. 15

beliebigen Material mit gegebener Temperaturleitfähigkeit noch wirksam ist. Fig. 16 zeigt beispielweise den Dämpfungsfaktor ν_{ϑ_x} als Funktion des Abstandes x von der Materialoberfläche, für τ_j

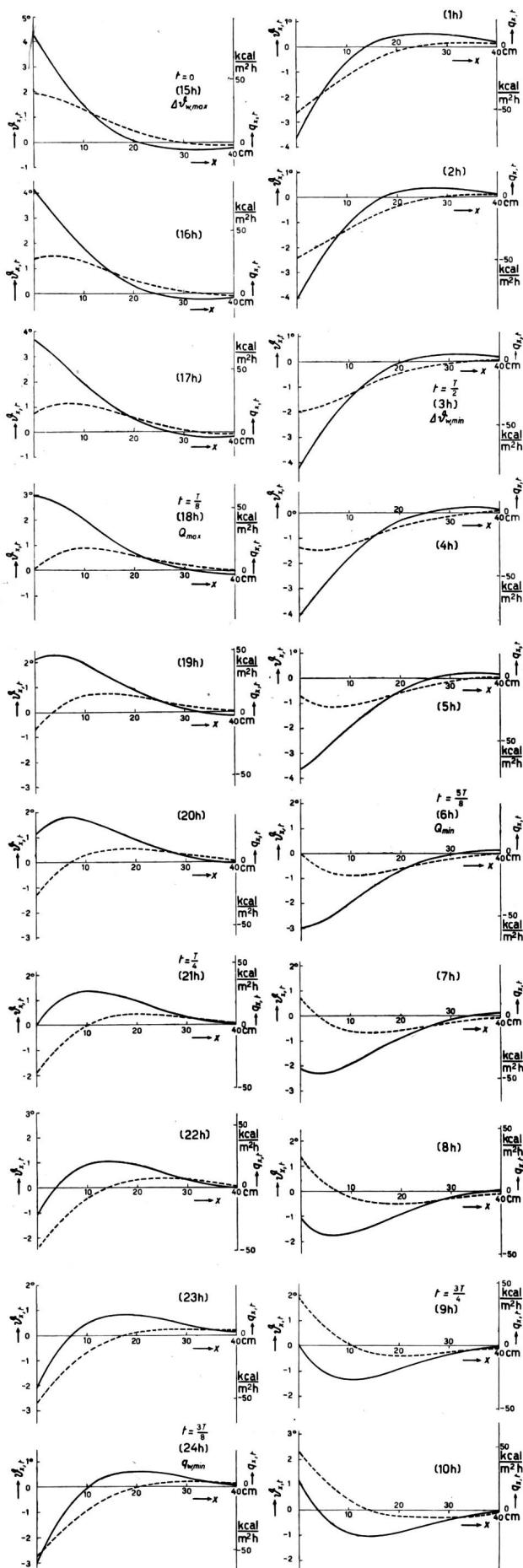


Fig. 16

entsprechend einer Jahresperiode und für τ_T entsprechend einer Tagesperiode in Material mit der Temperaturleitfähigkeit $a = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$. Der Einfluss der Schwingungsdauer auf die Dämpfung geht aus dieser Abbildung deutlich hervor.

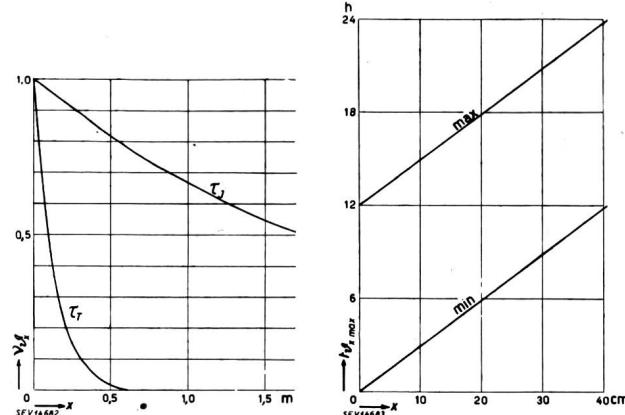


Fig. 17

Die Temperatur schwingt am Orte x mit einer Verzögerung gegenüber ihrer Schwingung an der Oberfläche, und es ist:

$$\Delta t_{\vartheta,x} = \frac{\sigma T}{2\pi} \quad (54)$$

Die Verzögerung ist proportional dem Abstand von der Oberfläche und der Wurzel der Schwingungsdauer, sie ist umgekehrt proportional der Wurzel der Temperaturleitfähigkeit.

Fig. 17 zeigt den Zeitpunkt des Auftretens der maximalen und minimalen Temperaturen einer Tagesschwingung im Abstand x von der Außenfläche im selben Temperaturfeld wie in Fig. 16. Es ist:

$$f_x = e^{-\sigma} \cos \sigma; \quad g_x = e^{-\sigma} \sin \sigma \quad (55)$$

Der maximale Wärmefluss an der Oberfläche hat den Wert:

$$q_{Wm} = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} b A_W \Delta \vartheta_{Wm} \quad (56)$$

Die Schwingung des Wärmeflusses hat an jedem Ort die gleiche Verzögerung gegenüber der Temperaturschwingung, und es ist:

$$\Delta t_{q,x} = \frac{\sigma T}{2\pi} - \frac{T}{8} \quad (57)$$

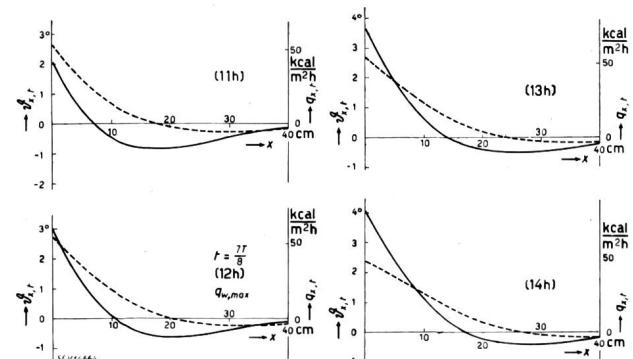


Fig. 18

Der Wärmefluss klingt mit zunehmender Entfernung von der Oberfläche im selben Verhältnis ab, wie die Temperaturschwingung; es ist:

$$\nu_{q_x} = \nu_{\vartheta_x} = e^{-\sigma} \quad (58)$$

Der Temperaturgradient von der Luft zur Oberfläche hat die Gleichung:

$$\Delta\vartheta_{LW} = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \frac{b}{\alpha} \Delta\vartheta_{Wm} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{T}{8} \right) \quad (59)$$

Der Wärmeinhalt im Inneren der Materie, in Abhängigkeit von der Temperaturwelle an der Oberfläche ist:

$$Q_t = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} b A_w \Delta\vartheta_{Wm} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{T}{8} \right) \quad (60)$$

Dieser Wärmeinhalt wird maximal, bzw. minimal $\frac{1}{8}$ Periode nach dem Auftreten der entsprechenden Maximal- bzw. Minimalwerte der Oberflächentemperatur, oder $\frac{1}{4}$ Periode nach dem Auftreten der Maximal- bzw. Minimalwerte des Ein- und Ausströmens der Wärme an der Materienoberfläche.

Fig. 18 stellt das Temperaturfeld einer Tageschwingung dar und dasjenige des entsprechenden Wärmeflusses zu verschiedenen Zeitpunkten, in Abhängigkeit von der Tiefe x für dasselbe Material wie in den anderen Beispielen.

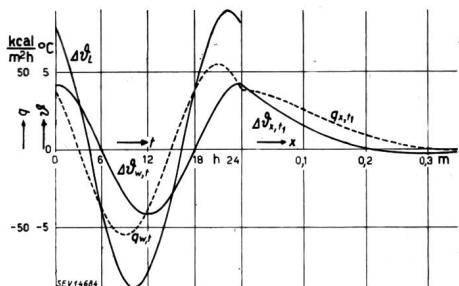


Fig. 19

In dieser Abbildung ist jeweils der Zeitpunkt vermerkt, in welchem der gesamte Wärmeinhalt des Feldes Q_t maximal bzw. minimal ist. Fig. 19 zeigt eine Temperaturschwingung $\Delta\vartheta_{W,t}$ mit Tagesperiodizität an der Materienoberfläche, und den Wärmefluss $q_{W,t}$ am gleichen Ort, die entsprechende Lufttemperatur $\Delta\vartheta_L$, sowie die Temperatur $\Delta\vartheta_{x,t}$ und den Wärmefluss $q_{x,t}$ innerhalb der Materie im Zeitpunkt $t_1 = t_{\vartheta_{Wm}}$ der maximalen Oberflächentemperatur, für dieselben Materialkonstanten wie in den bereits gezeigten Beispielen.

3

Werden die im zweiten Abschnitt beschriebenen Vorgänge mit einer gewissen Annäherung gültig bleiben, wenn anstatt der nur einseitig begrenzten Materie, Mauern in Betracht gezogen werden, die zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung endlos und homogen angenommen seien?

Man kann z. B. die Frage aufwerfen, wie das Temperaturfeld in den überall gleichen Mauern eines ungeheizten Raumes näherungsweise verläuft, der allseitig von der Außenluft umspült ist. Die Temperatur des Raumes sei in jedem Zeitpunkt

gleich derjenigen der Innenwand und nur von der Aussentemperatur und von den Eigenschaften der Mauer abhängig. Der Einfluss der Raumkanten werde vernachlässigt.

Das Temperaturfeld wird in diesem Fall ein ähnliches Bild ergeben, wie dasjenige einer Mauer doppelter Dicke, die allseitig von der Außenluft umspült ist. Der klimatische Vorgang kann näherungsweise dargestellt werden durch die Überlagerung einer Temperaturschwingung mit Tagesperiodizität und einer solchen mit Jahresperiodizität.

Bezieht man sich auf die Gl. (45) und (45a), so ist in diesem Fall:

$$\begin{aligned} f_x &= \cos(\Sigma - \sigma) \cosh \sigma + \cos \sigma \cosh(\Sigma - \sigma) \\ g_x &= \sin(\Sigma - \sigma) \sinh \sigma + \sin \sigma \sinh(\Sigma - \sigma) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (61) \\ \end{array} \right\}$$

$$\text{wo } \sigma = \frac{x}{\tau}; \quad \Sigma = \frac{2d}{\tau}; \quad \text{und} \quad \tau = \sqrt{\frac{\alpha T}{\pi}}.$$

Ferner:

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{1}{\tau} [\sin(\Sigma - \sigma) \cosh \sigma - \sin \sigma \cosh(\Sigma - \sigma) + \\ &\quad + \cos(\Sigma - \sigma) \sinh \sigma - \cos \sigma \sinh(\Sigma - \sigma)] \\ g'_x &= \frac{1}{\tau} [\sin(\Sigma - \sigma) \cosh \sigma - \sin \sigma \cosh(\Sigma - \sigma) - \\ &\quad - \cos(\Sigma - \sigma) \sinh \sigma + \cos \sigma \sinh(\Sigma - \sigma)] \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (62) \\ \end{array} \right\}$$

Die Temperatur- und Wärmefluss-Schwingungen an den Maueraußenflächen sind gegeben durch:

$$f_0 = f_\Sigma = 1; \quad g_0 = g_\Sigma = 0 \quad (63)$$

$$\begin{aligned} f'_0 &= -f_\Sigma = \frac{1}{\tau} \frac{\sin \Sigma - \sinh \Sigma}{\cos \Sigma + \cosh \Sigma} \\ g'_0 &= -g_\Sigma = \frac{1}{\tau} \frac{\sin \Sigma + \sinh \Sigma}{\cos \Sigma + \cosh \Sigma} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (64) \\ \end{array} \right\}$$

$$q_{Wm} = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} b A_w \Delta\vartheta_{Wm} \left(\frac{\cosh \Sigma - \cos \Sigma}{\cosh \Sigma + \cos \Sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (65)$$

$$\Delta t_{q_W} = \frac{T}{2\pi} \arctg \frac{\sin \Sigma + \sinh \Sigma}{\sin \Sigma - \sinh \Sigma} \quad (66)$$

Bezeichnet man mit $\frac{q_{Wm,\Sigma}}{q_{Wm,\infty}}$ das Verhältnis zwischen den Amplituden des Wärmeflusses an der Maueraußenfläche und an der Oberfläche der nur einseitig eben begrenzten, sonst aber endlosen Materie, so ist:

$$\frac{q_{Wm,\Sigma}}{q_{Wm,\infty}} = \frac{\cosh \Sigma - \cos \Sigma}{\cosh \Sigma + \cos \Sigma} \quad (67)$$

Der maximale Wärmefluss an der Außenfläche q_{Wm} ist für grössere Werte von Σ angenähert gleich gross und tritt ungefähr zur selben Zeit auf, wie wenn nur eine Ebene die Materie begrenzen würde. Temperaturschwingungen mit kurzer Dauer, an der Oberfläche von dicken Wänden, ergeben einen grossen Wert von Σ . Kleineren Werten von Σ

entsprechen geringe Wärmeflüsse q_{Wm} . Fig. 20 stellt das Verhältnis $\frac{q_{Wm} \Sigma}{q_{Wm\infty}}$ dar zwischen den Amplituden des Wärmeflusses an der Maueraussenfläche des ungeheizten Raumes und an der Oberfläche der nur einseitig eben begrenzten, sonst endlosen Materie in Abhängigkeit der Werte von Σ .

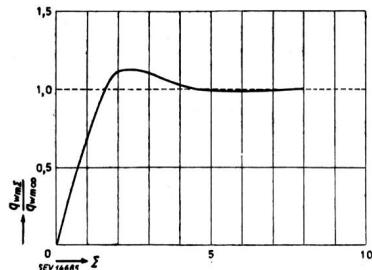


Fig. 20

Die Verzögerung Δt_{q_w} , mit welcher die Wärmefluss-Schwingung an der Maueraussenfläche stattfindet, in bezug auf die Temperaturschwingung am gleichen Ort, tendiert für kleine Werte von Σ nach einer Dauer $T/4$. Fig. 21 zeigt den Einfluss von Σ auf diese Verzögerung.

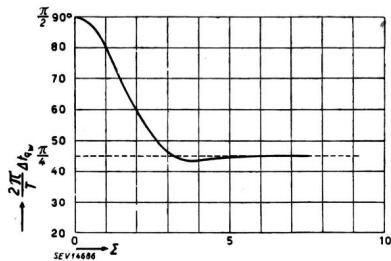


Fig. 21

Die Temperatur- und Wärmefluss-Schwingungen an der Mauerinnenfläche sind gegeben durch:

$$\left. \begin{aligned} f_{\Sigma/2} &= \frac{\cos \Sigma/2 \cosh \Sigma/2}{\cosh^2 \Sigma/2 - \sin^2 \Sigma/2} \\ g_{\Sigma/2} &= \frac{\sin \Sigma/2 \sinh \Sigma/2}{\cosh^2 \Sigma/2 - \sin^2 \Sigma/2} \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

$$f'_{\Sigma/2} = g'_{\Sigma/2} = 0; \quad q_{\Sigma/2} = 0 \quad (69)$$

Während Temperaturschwingungen an der Innenfläche tatsächlich stattfinden, besteht gemäss den

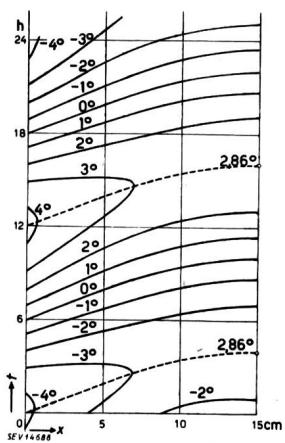


Fig. 23a

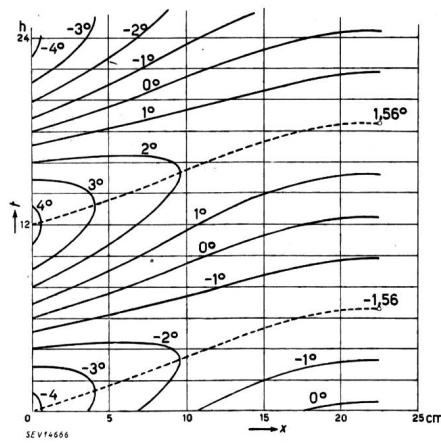


Fig. 23b

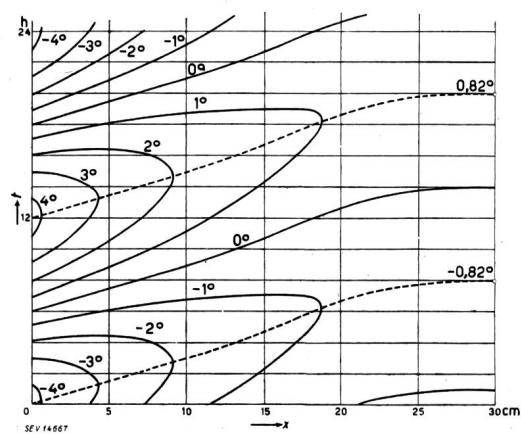


Fig. 23c

getroffenen Annahmen an diesem Ort keine Wärmefluss-Schwingung.

Die Amplitude der Temperaturschwingung wird bestimmt durch den Dämpfungsfaktor:

$$\nu_{\vartheta x} = \frac{1}{\left(\cosh^2 \frac{\Sigma}{2} - \sin^2 \frac{\Sigma}{2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (70)$$

Sie wird für grosse Werte von Σ sehr klein, bleibt hingegen für kleine Werte von Σ ungefähr gleich gross wie an der Aussenfläche. Die Temperaturschwingungen an der Mauerinnenfläche sind gegenüber denjenigen an der Aussenfläche verzögert um:

$$\Delta t_{\vartheta d} = \frac{T}{2\pi} \arctg \tan \frac{\Sigma}{2} \tanh \frac{\Sigma}{2} \quad (71)$$

Auch diese Verzögerung ist für grosse Werte von Σ angenähert dieselbe, wie wenn nur eine Ebene die Materie begrenzen würde, d. h.

$$\Delta t_{\vartheta d} \approx \frac{dT}{2\pi\tau}$$

wogegen sie für kleine Werte von Σ sehr gering bleibt. Fig. 22 stellt den Zeitpunkt dar des Auftretens der maximalen und minimalen Temperaturen einer Tagesschwingung in Material mit der Temperaturleitfähigkeit $a = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$, im Abstand x von der Maueraussenfläche in drei Mauern von je 15, 22,5 und 30 cm Dicke, welche einen ungeheizten Raum demäss den getroffenen Annahmen abschliessen. Es ist zum Vergleich, mit punktierter Linie, der Zeitpunkt des Auftretens der maximalen und minimalen Temperaturen im nur einseitig eben begrenzten Material mit gleichen Konstanten ein-

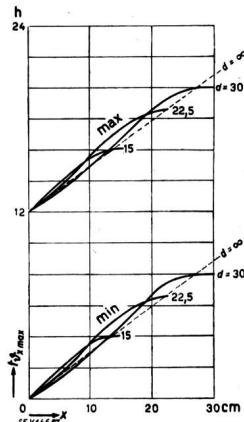


Fig. 22

gezeichnet. Fig. 23 a, b und c zeigen die Isothermen in denselben Mauern, bei einer Amplitude von $4,2^\circ\text{C}$ der Tagesschwingung an deren Aussenflä-

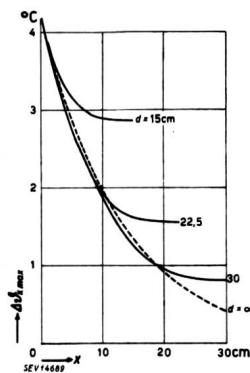


Fig. 24

chen. In Fig. 24 ist für dieses Beispiel der Verlauf der Amplituden in Abhängigkeit vom Abstand von den Außenflächen für die drei genannten Mauern dargestellt, und, wiederum zum Vergleich, mit punktierter Linie der Amplitudenverlauf im Fall der nur einseitig eben begrenzten Materie.

4

Begrenzen die Mauern einen geheizten Raum, dessen Innentemperatur konstant gehalten wird, so kann annäherungsweise das Temperaturfeld aus der Überlagerung von drei verschiedenen Zuständen aufgefasst und dargestellt werden. Es ergibt sich ein stationärer Zustand, der durch die konstante Innentemperatur und die Jahres-Durchschnittstemperatur an der Maueraußenfläche bestimmt ist.

Diesem stationären Zustand werden Temperaturschwingungen mit Jahres- und Tagesperiodizität überlagert. Bezieht man sich wieder auf die Gl. (45) und (45 a), so kann das Temperaturfeld einer solchen Schwingung folgendermassen dargestellt werden:

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \frac{\cos(2\Sigma - \sigma) \cosh \sigma - \cos \sigma \cosh(2\Sigma - \sigma)}{\cos 2\Sigma - \cosh 2\Sigma} \\ g_x &= \frac{\sin(2\Sigma - \sigma) \sinh \sigma - \sin \sigma \sinh(2\Sigma - \sigma)}{\cos 2\Sigma - \cosh 2\Sigma} \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

$$\text{wo } \sigma = \frac{x}{\tau}; \quad \Sigma = \frac{d}{\tau} \quad \text{und} \quad \tau = \sqrt{\frac{aT}{\pi}}$$

woraus:

$$f'_x = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\sin(2\Sigma - \sigma) \cosh \sigma + \sin \sigma \cosh(2\Sigma - \sigma) + \cos(2\Sigma - \sigma) \sinh \sigma + \cos \sigma \sinh(2\Sigma - \sigma)}{\cos 2\Sigma - \cosh 2\Sigma} \right) \quad (73)$$

$$g'_x = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\sin(2\Sigma - \sigma) \cosh \sigma + \sin \sigma \cosh(2\Sigma - \sigma) - \cos(2\Sigma - \sigma) \sinh \sigma - \cos \sigma \sinh(2\Sigma - \sigma)}{\cos 2\Sigma - \cosh 2\Sigma} \right)$$

Die Temperatur- und Wärmefluss-Schwingungen an der Außenfläche sind gegeben durch:

$$f_0 = 1; \quad g_0 = 0 \quad (74)$$

$$\left. \begin{aligned} f'_0 &= \frac{1}{\tau} \frac{\sin 2\Sigma + \sinh 2\Sigma}{\cos 2\Sigma - \cosh 2\Sigma} \\ g'_0 &= \frac{1}{\tau} \frac{\sin 2\Sigma - \sinh 2\Sigma}{\cos 2\Sigma - \cosh 2\Sigma} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

$$q_{wm} = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} b A_w \Delta \vartheta_{wm} \left(\frac{\cosh 2\Sigma + \cos 2\Sigma}{\cosh 2\Sigma - \cos 2\Sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (76)$$

$$\frac{q_{wm}\Sigma}{q_{wm}\infty} = \left(\frac{\cosh 2\Sigma + \cos 2\Sigma}{\cosh 2\Sigma - \cos 2\Sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (77)$$

$$\Delta t_{qw} = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\Sigma - \sinh 2\Sigma}{\sin 2\Sigma + \sinh 2\Sigma} \quad (78)$$

Fig. 25 zeigt den Zeitpunkt des Auftretens der maximalen und minimalen Temperaturen im Abstand x von der Außenfläche für Mauern gleicher Dicke und Beschaffenheit, wie in den vorherigen Beispielen. Man beachte, dass der Einfluss der konstanten Innentemperatur ein schnelleres Auftreten der Maximal- und Minimalwerte der Temperaturschwingung innerhalb der Mauer bewirkt, als dies im ungeheizten Gebäude oder in der ungeheizten Materie der Fall ist.

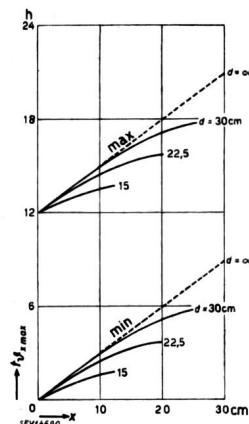


Fig. 25

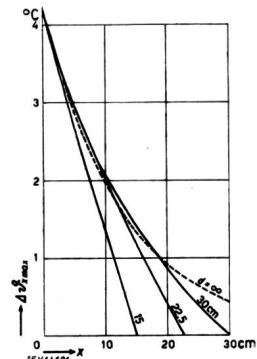


Fig. 26

Fig. 26 stellt den Verlauf der Amplituden der Temperaturschwingungen innerhalb der Mauer dar, wobei diese Schwingungen bis auf den Wert Null an den Innenflächen abklingen, gemäss den getroffenen Annahmen, wonach diese konstante Temperatur aufweisen sollen.

In beiden Figuren sind vergleichsweise mit punktierten Linien die entsprechenden Werte eingezeichnet, die sich im Fall der nur einseitig eben begrenzten Materie ergeben.

Der maximale Wärmefluss an den Maueraußenflächen, q_{wm} , ist für grössere Werte von Σ angenähert gleich gross und tritt ungefähr zur selben Zeit auf, wie wenn nur diese Ebene die Materie begrenzen würde und die Mauerinnenfläche mit konstanter Temperatur nicht bestünde.

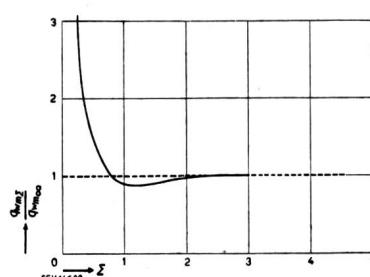


Fig. 27

Für kleinere Werte von Σ ist q_{wm} sehr gross und die Wärmeflußschwingung weist nur eine geringe Verzögerung Δt_{qw} gegenüber der Temperaturschwingung auf.

Fig. 27 stellt das Verhältnis $\frac{q_{wm}\Sigma}{q_{wm}\infty}$ dar zwischen den Amplituden des Wärmeflusses an der Mauer-

aussenfläche des geheizten Raumes und an der Oberfläche der nur einseitig eben begrenzten, sonst endlosen Materie in Abhängigkeit des Wertes von Σ . Fig. 28 zeigt den Einfluss von Σ auf die Verzögerung Δt_{q_w} .

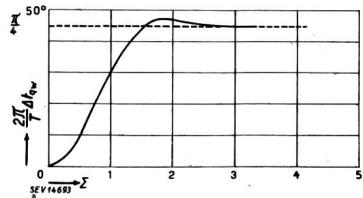


Fig. 28

An der Mauerinnenfläche besteht gemäss den getroffenen Annahmen keine Temperaturschwingung und es ist daher:

$$f_\Sigma = g_\Sigma = 0$$

Der Wärmefluss an der Innenfläche in Abhängigkeit von der äusseren Klimabeeinflussung ist von besonderem Interesse. Er wird bestimmt durch:

$$\left. \begin{aligned} f'_\Sigma &= \frac{2}{\tau} \frac{\sin \Sigma \cosh \Sigma + \cos \Sigma \sinh \Sigma}{\cos 2\Sigma - \cosh 2\Sigma} \\ g'_\Sigma &= \frac{2}{\tau} \frac{\sin \Sigma \cosh \Sigma - \cos \Sigma \sinh \Sigma}{\cos 2\Sigma - \cosh 2\Sigma} \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

$$\nu_{qd} = \frac{\sqrt{2}}{(\cosh 2\Sigma + \cos 2\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \quad (80)$$

$$\Delta t_{\vartheta_d} + \Delta t_{q_d} = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \Sigma - \operatorname{tgh} \Sigma}{\operatorname{tg} \Sigma + \operatorname{tgh} \Sigma} \quad (81)$$

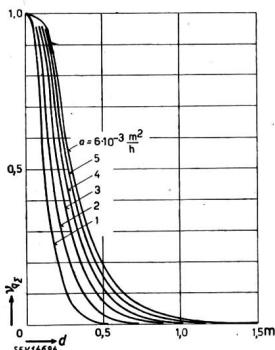


Fig. 29

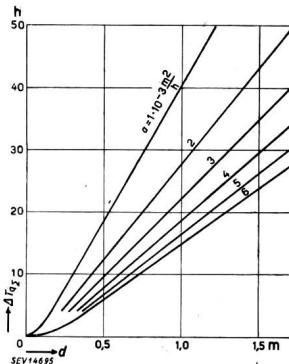


Fig. 30

Die Amplitude der Wärmeflusschwingung an der Innenfläche der Mauer ist für grosse Werte von Σ

gering; für kleine Werte von Σ wird sie ungefähr gleich gross wie diejenige an der Aussenfläche.

Die Verzögerung der Wärmeflusschwingung q_d gegenüber der Temperaturschwingung an der Aussenfläche ist für grosse Werte von Σ angenähert:

$$\Delta t_{\vartheta_d} + \Delta t_{q_d} = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \Sigma - 1}{\operatorname{tg} \Sigma + 1}$$

wogegen diese Verzögerung den Wert Null anstrebt, wenn Σ sehr klein ist.

Fig. 29 zeigt den Verlauf des Dämpfungsfaktors v_{qd} der Wärmeflusschwingungen in Abhängigkeit von der Mauerdicke und von der Temperaturleitfähigkeit und Fig. 30 die Verzögerung, mit welcher die Wärmeflusschwingung an der Mauerinnenfläche

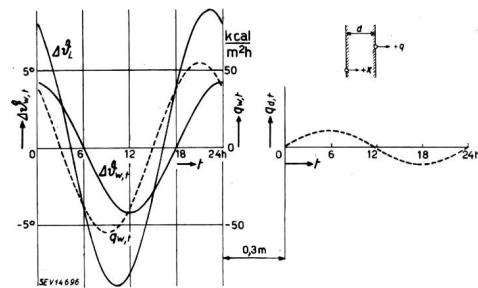


Fig. 31

auftritt in bezug auf die Temperaturschwingung an der Maueraussenfläche, ebenfalls in Abhängigkeit von der Mauerdicke und der Temperaturleitfähigkeit, und beides für eine Tagesperiodizität.

Fig. 31 zeigt eine Temperaturschwingung $\Delta\theta_{w,t}$ mit Tagesperiodizität an der Maueraussenfläche, den Wärmefluss q_{Wt} am gleichen Ort, die entsprechende Lufttemperatur $\Delta\theta_L$, sowie den Wärmefluss q_{dt} an der Innenfläche der 30 cm dicken Mauer mit Temperaturleitfähigkeit $a = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$.

Fig. 32 stellt für dieselbe Mauer den Wärmefluss q_{dt} dar, der an ihrer Innenfläche, bei konstanter Temperatur derselbe in Abhängigkeit von einer Schwingung der Aussenlufttemperatur $\Delta\theta_L$ auftritt.

Fig. 32

flächen, bei konstanter Temperatur derselbe in Abhängigkeit von einer Schwingung der Aussenlufttemperatur $\Delta\theta_L$ auftritt.

(Fortsetzung folgt)

Adresse des Autors:

E. Runte, Ingenieur, 4, rue Mail, Neuchâtel.