Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 36 (1945)

Heft: 3

Artikel: Courbes d'égale vitesse à fréquence variable de la machine asynchrone polyphasée

Autor: Boegli, S.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1060200

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Courbes d'égale vitesse à fréquence variable de la machine asynchrone polyphasée

Par *S. Boegli*, Zurich-Oerlikon

621.313.33

L'auteur a été amené à étudier les conditions d'auto-excitation par batterie de condensateurs, de générateurs asynchrones polyphasés, tournant à une vitesse donnée. Pour cela il a étudié à fond la machine asynchrone polyphasée soumise à une fréquence variable. Il a trouvé une quantité de relations et de courbes intéressantes qui se trouvent publiées ici.

Der Verfasser hatte sich mit den Bedingungen für die Selbsterregung durch Kondensatoren von mehrphasigen Asynchron-Generatoren beim Betrieb mit gegebener Drehzahl zu befassen. Er untersuchte darum das Verhalten der mehrphasigen Asynchronmaschine bei veränderlicher Frequenz. Als Ergebnis dieser Studien werden hier interessante Gleichungen und Kurven veröffentlicht.

Pour bien comprendre les lignes qui suivent, nous nous trouvons dans l'obligation, de développer le diagramme de la machine asynchrone polyphasée, d'une manière exacte. C'est pour cette raison que nous employons la méthode graphique décrite dans l'ouvrage «Graphische Methoden zur Lösung von Wechselstromproblemen» de A. von Brunn [1]).

Partons du schéma de substitution bien connu (fig. 1) en négligeant pour le moment les pertes dans le fer.

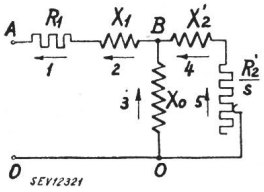

Fig. 1.
R_1 résistance ohmique primaire (stator).
X_1 réactance primaire (stator).
R_2' résistance ohmique secondaire réduite au côté primaire (rotor).
X_2' réactance secondaire réduite au côté primaire (rotor).
X_0 réactance du circuit magnétique.
s glissement.

La fig. 2 représente les diagrammes vectoriels individuels des admittances:

$$\frac{1}{R_1};\ \frac{1}{X_1};\ \frac{s}{R_2'};\ \frac{1}{X_2'}\ \text{et}\ \frac{1}{X_0}$$

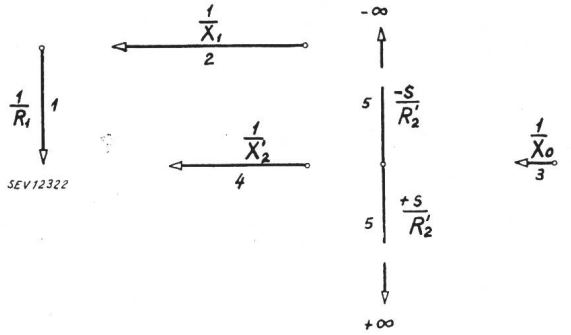

Fig. 2.

Pour commencer, occupons-nous du circuit secondaire fig. 3. Le glissement est supposé passer par toutes les valeurs entre:

$$-\infty \ldots 0 \ldots +\infty$$

Si le glissement est positif $\frac{R_2'}{s}$ sera aussi positif c'est-à-dire une résistance ohmique positive. Si par contre le glissement est négatif, $\frac{R_2'}{s}$ sera aussi négatif et nous aurons une résistance ohmique négative ou «expédance» [2]).

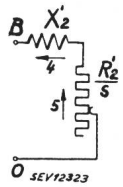

Fig. 3.

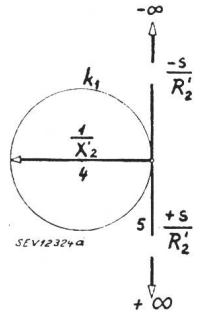

Fig. 4.

Cherchons le diagramme vectoriel de l'admittance du schéma représenté par la fig. 3. En vertu de la loi de la double inversion [3]) la courbe-lieu de cette admittance est un cercle qui a pour diamètre $\frac{1}{X_2'}$.

A présent nous pouvons ajouter sans autre le circuit de X_0 respectivement l'admittance $\frac{1}{X_0}$ (voir fig. 5 et 6).

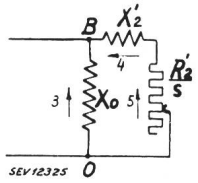

Fig. 5.

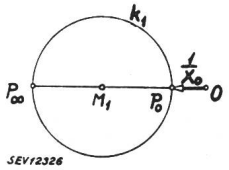

Fig. 6.

On continuera en prenant en considération la réactance primaire X_1 (fig. 7). L'échelle du dia-

[1]) Impr. Benno Schwabe & Co., Bâle, 1938.

[2]) Voir «Die Expedanz als Ursache der Selbsterregung und der allgemeinen Resonanz». A. von Brunn. Bull. ASE 1935, p. 137.

[3]) A. von Brunn: «Graphische Methoden zur Lösung von Wechselstromproblemen», p. 139.

gramme vectoriel d'admittance fig. 8 (ceci afin que la figure soit plus claire) a été doublée. La double inversion du cercle donne un nouveau cercle [4]). Le

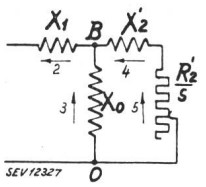

Fig. 7.

cercle k_1 précédemment trouvé se réduit au cercle k_2 dont il est facile de trouver le diamètre $\frac{1}{X'_D}$, ainsi que la nouvelle valeur de l'admittance de la marche à vide $\frac{1}{X'_0}$. Considérons la fig. 8; d'après la loi de la

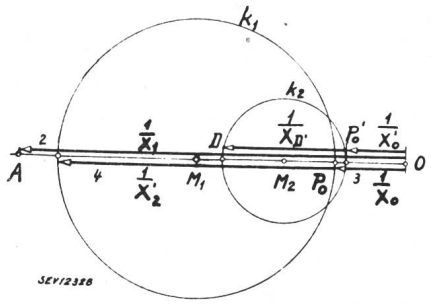

Fig. 8.

double inversion nous aurons:

$$\overline{AD} = \frac{\frac{1}{X_1^2}}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X'_2} + \frac{1}{X_0}}$$

$$\overline{AP'_0} = \frac{\frac{1}{X_1^2}}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_0}}$$

Pour simplifier posons:

$\tau_1 = \frac{X_1}{X_0}$ = coefficient de dispersion primaire.

$\tau_2 = \frac{X'_2}{X_0}$ = coefficient de dispersion secondaire.

donc:

$$\frac{1}{X_{D'}} = \overline{AP'_0} - \overline{AD} = \frac{\frac{1}{\tau_1^2 X_0^2}}{\frac{1}{\tau_1 X_0} + \frac{1}{X_0}} - \frac{\frac{1}{\tau_1^2 X_0^2}}{\frac{1}{\tau_1 X_0} + \frac{1}{\tau_2 X_0} + \frac{1}{X_0}}$$

qui, tous calculs faits, donne:

$$\frac{1}{X_{D'}} = \frac{1}{X_0\,(\tau_1 + \tau_2 + 2\,\tau_1\,\tau_2 + \tau_1^2\,\tau_2)}$$

[4]) A. von Brunn: «Graphische Methoden . . .», p. 141.

Pour $\frac{1}{X'_0}$ on aura:

$$\frac{1}{X'_0} = \frac{1}{X_1} - \frac{\frac{1}{\tau_1^2 X_0^2}}{\frac{1}{\tau_1 X_0} + \frac{1}{X_0}}$$

qui donne tous calculs faits:

$$\underline{\frac{1}{X'_0} = \frac{1}{X_0\,(1 + \tau_1)}} \qquad (1)$$

En outre posons:

$$\underline{\tau_{res} = \frac{X_{D'}}{X'_0}} = \text{coefficient de dispersion résultant.} \qquad (2)$$

En introduisant on a alors:

$$\tau_{res} = \tau = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_1^2 + 2\,\tau_1\,\tau_2 + \tau_1^2\,\tau_2}{1 + \tau_1} =$$

$$= \frac{\tau_1\,(1 + \tau_1) + \tau_2\,(1 + \tau_1)^2}{1 + \tau_1}$$

$$\underline{\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_1\,\tau_2} \qquad (3)$$

A présent il s'agit de prendre la résistance primaire R_1 en considération voir fig. 9. Le diagramme correspondant des admittances nous est donné par la fig. 10. En faisant la double inversion du cercle k_2 en prenant la résistance R_1 en considération, on ob-

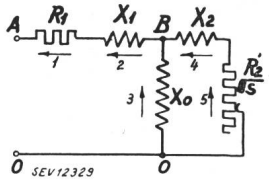

Fig. 9.

tient le cercle k_3. En observant la fig. 10 on voit que le cercle k_3 est plus petit et décalé, par rapport au cercle k_2, ceci d'autant plus que l'admittance $\frac{1}{R_1}$ est petite ou bien que la résistance ohmique primaire R_1 est grande. Donc il n'est pas à recommander, comme certains auteurs le prétendent de négliger la résistance ohmique primaire, surtout pour les petites machines. La fig. 10 nous montre que le point d'origine O, le point idéal de marche à vide P''_0, le point où le glissement est infini P''_∞ et l'extrémité du vecteur $\frac{1}{R_1}$ se trouvent sur le cercle c qui a comme centre un point M_{R1} se trouvant au milieu du vecteur $\frac{1}{R_1}$ et qui a comme rayon la valeur $\frac{1}{2R_1}$. En outre le vecteur de l'admittance du point P''_∞ passe par le point N qui se trouve à la même hauteur h que le centre M_3 du cercle k_3. Ces deux particularités sont

importantes pour la construction du diagramme vectoriel de la machine asynchrone polyphasée.

En se basant sur la loi de la double inversion on pourra facilement trouver les différentes valeurs des vecteurs, diamètres, angles, etc. de la fig. 10. En effet:

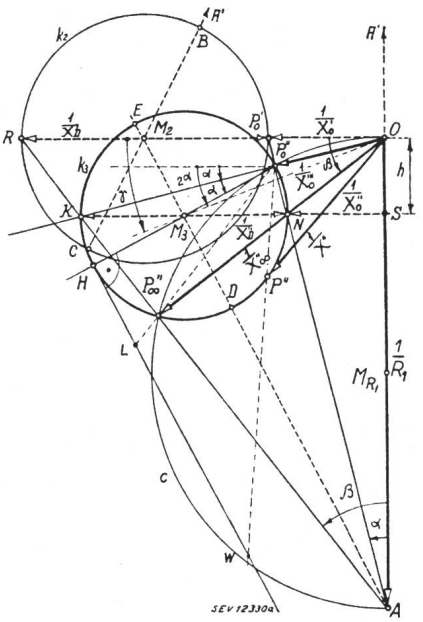

Fig. 10.

$$\overline{AD} = \frac{\frac{1}{R_1^2}}{\overline{A'M_2} + \frac{1}{2X_{D'}}} \quad \text{et} \quad \overline{AE} = \frac{\frac{1}{R_1^2}}{\overline{A'M_2} - \frac{1}{2X_{D'}}}$$

$$\underline{\frac{1}{X_{D''}}} = \overline{AE} - \overline{AD} =$$

$$= \frac{\frac{1}{R_1^2}\left(\overline{A'M_2} + \frac{1}{2X_{D'}}\right) - \frac{1}{R_1^2}\left(\overline{A'M_2} - \frac{1}{2X_{D'}}\right)}{(\overline{A'M_2})^2 - \left(\frac{1}{2X_{D'}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{R_1^2 X_{D'}}}{\left(\frac{1}{2X_{D'}} + \frac{1}{X_0'}\right) + \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{4X_{D'}^2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{R_1^2 X_{D'}}}{\frac{1}{4X_{D'}^2} + \frac{1}{X_{D'}X_0'} + \frac{1}{X_0'^2} + \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{4X_{D'}^2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{R_1^2 X_{D'}}}{\frac{1}{X_{D'}X_0'} + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{X_0'^2}}$$

En outre on a: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_1}{X_0'}$ (voir fig. 10) [5])

[5]) Voir J. Sumec, ETZ, Bd. 31(1910), p. 110.

$$\underline{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{X_{D'}} + \frac{1}{X_0'}}{\frac{1}{R_1}} = \frac{\frac{1}{\tau X_0'} + \frac{1}{X_0'}}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\, X_0'}} =$$

$$= \underline{\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)} = \underline{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sigma}} \tag{4}$$

donc

$$\underline{\sigma = \frac{\tau}{1+\tau}} \tag{5}$$

en introduisant on aura:

$$\frac{1}{X_{D''}} = \frac{\frac{1}{X_0'^2 \operatorname{tg}^2\alpha\, X_0'\tau}}{\frac{1}{X_0'\tau X_0'} + \frac{1}{X_0'^2 \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{X_0'^2}} = \frac{\frac{1}{X_0'\tau \operatorname{tg}^2\alpha}}{\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 1} =$$

$$= \frac{1}{X_0'(\operatorname{tg}^2\alpha + \tau + \tau\operatorname{tg}^2\alpha)} = \frac{1}{X_0'\left[\operatorname{tg}^2\alpha\left(1+\frac{1}{\tau}\right)+1\right]\tau} =$$

$$\text{donc } \underline{\frac{1}{X_{D''}} = \frac{1}{X_0'\tau(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}} \tag{6}$$

Considérons les triangles OSN et OAR qui sont semblables, alors on pourra poser:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{SN}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OA}} \quad \text{ou bien:} \quad h X_0'' = \left(\frac{1}{X_0'} + \frac{1}{X_{D'}}\right) R_1$$

d'où

$$X_0'' = \left(\frac{1}{X_0'} + \frac{1}{X_{D'}}\right)\frac{R_1}{h} \quad \text{et} \quad h = \left(\frac{1}{X_0'} + \frac{1}{X_{D'}}\right)\frac{R_1}{X_0''}$$

En outre

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{X_0''}}{\frac{1}{R_1} - h} = \frac{\frac{1}{X_0''}}{\frac{1}{X_0'\operatorname{tg}\alpha} - \left(\frac{1}{X_0'} + \frac{1}{\tau X_0'}\right)\frac{X_0'\operatorname{tg}\alpha}{X_0''}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{X_0''}}{\frac{1}{X_0'\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{X_0''} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\tau X_0''}}$$

d'où

$$\frac{1}{X_0'} - \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{X_0''}\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{X_0''}$$

d'où

$$\underline{\frac{1}{X_0''} = \frac{1}{X_0'(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} \tag{7}$$

Précédemment nous avions trouvé:

$$\underline{h} = \frac{R_1}{X_0''}\left(\frac{1}{X_0'} + \frac{1}{X_0'\tau}\right) = \frac{\operatorname{tg}\alpha\left(1+\frac{1}{\tau}\right)}{X_0'(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)} =$$

$$= \underline{\frac{\operatorname{tg}\beta}{X_0'(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}} \tag{8}$$

L'admittance de la marche à vide idéale est donnée par

$$\frac{1}{X_0''} = \frac{\cos\alpha}{X_0'} = \frac{1}{X_0'\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} \qquad (9)$$

Pour trouver l'admittance du point P_∞'', on procède comme suit:

$$\overline{AP_\infty''} = \frac{\frac{1}{R_1^2}}{\overline{AR}} \quad \text{qui tous calculs faits donne:}$$

$$\overline{AP_\infty''} = \frac{1}{X_0'\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\beta+1}}$$

D'après la similitude des triangles nous avons:

$$\frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{X_{D'}}+\frac{1}{X_0'}} = \frac{\overline{AP_\infty''}}{\frac{1}{X_\infty''}} \quad \text{et pour } \frac{1}{X_\infty''} \text{ on aura, tous calculs faits:}$$

$$\frac{1}{X_\infty''} = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{X_0'\,\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\beta}} = \frac{1}{X_0'\,\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\,\beta}}} \qquad (10)$$

L'angle γ sera déterminé par la relation:

$$\underline{\mathrm{tg}\,\gamma} = \frac{h}{M_3 S} =$$

$$= \frac{\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{X_0'(1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)}}{\frac{1}{2\,\tau\,X_0'(1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)}+\frac{1}{X_0'(1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)}} =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\frac{1}{2\,\tau}+1} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)}{1+\frac{1+\tau}{\tau}} = \underline{\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}} \qquad (11)$$

Considérons (fig. 10) la distance HL perpendiculaire sur le diamètre passant par le point P_0''. (La droite $\overline{P_0''L}$ passe par le point P_∞''.) On a le triangle rectangle P_0'', H, L. Donc:

$$\mathrm{tg}\,(\beta-\alpha) = \frac{\overline{HL}}{\overline{HP_0''}} = \frac{\overline{HL}}{\frac{1}{X_{D''}}} \quad \text{d'où:}$$

$$\underline{\overline{HL}} = \frac{\mathrm{tg}\,(\beta-\alpha)}{X_D''} = \frac{\frac{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}}{X_0'\,\tau\,(1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)} =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,\alpha\left(1+\frac{1}{\tau}-1\right)R_1}{X_0'\,\tau\,(1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)^2\,X_0'\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \underline{\frac{R_1}{X_{D''}^2}} \qquad (12)$$

Il est à remarquer que cette distance $\overline{HL}$ est directement proportionnelle à la résistance primaire R_1.

Pour la détermination du glissement nous devons avoir recours à la «Fehlspannungssatz» [6]). Considérons le point idéal de marche à vide P_0'' (fig. 10): le glissement sera 0 et $\frac{R_2'}{s} = \infty$. Le circuit secondaire peut être considéré ouvert. On aurait schématiquement la fig. 11a, en supposant que $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{X}_1$. Supposons (voir fig. 11a) que la tension U_0 appliquée entre les points OA, le circuit secondaire qui a une impédance infiniment grande à la marche à vide, sera soumis à la tension qui existe entre les points O et B_0. Faisons la même hypothèse pour la marche en charge, c'est-à-dire quand le circuit secondaire est fermé et qu'il y circule un courant [7]). Pour cela il faut introduire en vertu de la «Fehlspannungssatz» [6]) entre les points B_0 et B de la fig. 11b, une impédance auxiliaire Y, qui a pour valeur:

$$\mathfrak{Y} = \frac{\mathfrak{X}_0\,\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{X}_0+\mathfrak{Z}_1}$$

Réduisons les schémas 11a et b au schéma 11c. Le circuit secondaire de la fig. 11b est soumis main-

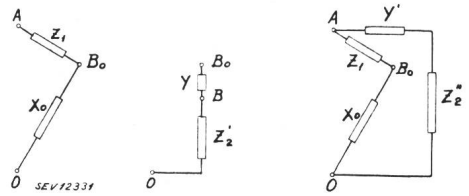

Fig. 11a. Fig. 11b. Fig. 11c.

tenant à la tension U_0. Pour cela il faut multiplier vectoriellement les 2 impédances

$$\mathfrak{Y} \text{ et } \mathfrak{Z}_2' = \frac{\mathfrak{R}_2'}{s} + \mathfrak{X}_2' \text{ par } \left(\frac{\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{X}_0}{\mathfrak{X}_0}\right)^2$$

On aura donc (fig. 11c):

$$\mathfrak{Y}' = \left(\frac{\mathfrak{X}_0\cdot\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{X}_0+\mathfrak{Z}_1}\right)\left(\frac{\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{X}_0}{\mathfrak{X}_0}\right)^2$$

$$\mathfrak{Z}_2'' = \left(\frac{\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{X}_0}{\mathfrak{X}_0}\right)^2\mathfrak{Z}_2'$$

entre les points O et A de la fig. 11c, on a deux circuits, qui ont comme impédances, le premier:

$$\mathfrak{X}_0+\mathfrak{Z}_1$$

et le second:

$$\mathfrak{Y}'+\mathfrak{Z}_2'' = \mathfrak{Z}_1\,\frac{\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{X}_0}{\mathfrak{X}_0} + \mathfrak{Z}_2'\left(\frac{\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{X}_0}{\mathfrak{X}_0}\right)^2 \qquad (13)$$

Construisons le diagramme des impédances de ces 2 circuits fig. 12a et b.

La fig. 12a est simple; quant à la fig. 12b il est nécessaire de donner quelques explications sur sa construction. Premièrement, occupons-nous du premier terme de l'équation (13). Portons du point U,

[6]) A. von Brunn: «Graphische Methoden...». Der Fehlspannungssatz, p. 100.

[7]) loc. cit. p. 143...148.

le vecteur: $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{X}_1$. Multiplions-le vectoriellement par $\frac{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{X}_0}{\mathfrak{X}_0}$. Donc $\mathfrak{Y}'$ se trouve décalé de l'angle α par rapport à $\frac{\mathfrak{X}_0}{\mathfrak{Z}_1}$. Portons à la suite de $\mathfrak{Y}'$, la réactance $\mathfrak{X}_2'$ que nous multiplierons vectoriellement par $\left(\frac{\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{X}_0}\right)^2$, donc $\mathfrak{X}_2' \left(\frac{\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{X}_0}\right)^2$ se trouve décalé de l'angle 2α par rapport à $\mathfrak{X}_2'$. Perpendiculairement à l'extrémité de $\mathfrak{X}_2' \left(\frac{\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{X}_0}\right)^2$ traçons la droite g sur laquelle nous porterons l'expression $\frac{R_2'}{s}\left(\frac{\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{X}_0}\right)^2$. Comme le glissement s est variable de $-\infty \ldots 0 \ldots +\infty$, la droite g se prolongera de part et d'autre du point P_∞ jusqu'à l'infini.

Pour avoir le diagramme vectoriel des admittances, nous devons faire l'inversion des fig. 12a et b par rapport à l'axe 0...0. La fig. 12a et b nous donnera le vecteur d'admittance $\overline{OP_0''}$ qui est l'admittance de marche à vide (voir fig. 12c).

L'inversion de la droite g donnera le cercle k_3 qui aura pour diamètre $\frac{1}{X_{D''}}$ (voir fig. 12c).

$$X_{D''} = a + c$$

$$\underline{\overline{O''B}} = \mathfrak{X}_1\left(\frac{\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{X}_0}\right) = X_1 \frac{\sqrt{X_0^2 + 2X_0X_1 + X_1^2 + R_1^2}}{X_0} =$$

$$= X_1 \sqrt{1 + \frac{2X_1}{X_0} + \frac{X_1^2}{X_0^2} + \frac{R_1^2}{X_0^2}} =$$

$$= X_1 \sqrt{1 + 2\tau_1 + \tau_1^2 + \frac{R_1^2(1+\tau_1)^2}{X_0^2(1+\tau_1)^2}} =$$

$$= X_1 \sqrt{(1+\tau_1)^2 + \mathrm{tg}^2\alpha\,(1+\tau_1)^2} =$$

$$= \underline{X_1(1+\tau_1)\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = X_1 \underline{\frac{1+\tau_1}{\cos\alpha}}$$

On voit en outre que:

$$\underline{\frac{\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{X}_0}} = \underline{(1+\tau_1)\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \underline{\frac{1+\tau_1}{\cos\alpha}}$$

$$\overline{BC} = R_1 \frac{1+\tau_1}{\cos\alpha} \text{ et } \overline{BE} = \overline{BC}\,\mathrm{tg}\,\alpha = R_1\left(\frac{1+\tau_1}{\cos\alpha}\right)\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$a = (\overline{O''B} + \overline{BE})\cos\alpha = (X_1 + R_1\,\mathrm{tg}\,\alpha)(1+\tau_1)$$

$$c = X_2'\left(\frac{1+\tau_1}{\cos\alpha}\right)^2$$

$$a + c = (1+\tau_1)[X_1 + R_1\,\mathrm{tg}\,\alpha + X_2'(1+\tau_1)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)] =$$

$$= (1+\tau_1)[X_0\tau_1 + X_0(1+\tau_1)\mathrm{tg}^2\alpha +$$
$$+ X_0\tau_2(1+\tau_1)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)] =$$

$$= (1+\tau_1)X_0[\tau_1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \tau_1\mathrm{tg}^2\alpha + \tau_2 +$$
$$+ \tau_1\tau_2 + \tau_2\mathrm{tg}^2\alpha + \tau_1\tau_2\mathrm{tg}^2\alpha] =$$

$$= X_0'[\tau + \mathrm{tg}^2\alpha(1+\tau)] = X_0'\tau(1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta) \text{ (voir 4)}$$

donc:

$$\underline{X_{D''} = X_0'\tau(1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)}$$

ce que nous avions trouvé sous (6) en employant l'inversion double.

Cherchons la valeur de $\overline{SY_\infty}$ (fig. 11b).

$$\overline{BE} = \overline{CB}\,\mathrm{tg}\,\alpha = R_1\frac{1+\tau_1}{\cos^2\alpha}\sin\alpha$$

$$\overline{CE} = \frac{\overline{BE}}{\sin\alpha} = R_1\frac{1+\tau_1}{\cos^2\alpha}$$

$$\overline{EF} = a\,\mathrm{tg}\,\alpha = X_1(1+\tau_1)\mathrm{tg}\,\alpha + R_1(1+\tau_1)\mathrm{tg}^2\alpha$$

$$\overline{CE} - \overline{EF} = (1+\tau_1)[R_1(1+\mathrm{tg}^2\alpha) - X_1\mathrm{tg}\,\alpha - R_1\mathrm{tg}^2\alpha] =$$
$$= (1+\tau_1)(R_1 - X_1\mathrm{tg}\,\alpha) = R_1 +$$
$$+ R_1\tau_1 - X_1\tau_1\mathrm{tg}\,\alpha - X_1\mathrm{tg}\,\alpha =$$
$$= R_1 - X_1\mathrm{tg}\,\alpha(1+\tau_1) + \tau_1R_1 = R_1 - \frac{R_1}{X_0}X_1 +$$
$$+ \tau_1R_1 = R_1 - \tau_1R_1 + \tau_1R_1 = R_1$$

donc $\underline{\overline{SY_\infty}} = \overline{CE} - \overline{EF} = \underline{R_1}$ **[14]**

On a aussi:

$$\frac{\overline{SY_\infty}}{X_{D''}} = \frac{\overline{HL}}{\frac{1}{X_{D''}}} \text{ d'où } \underline{\overline{HL} = \frac{R_1}{X_{D''}^2}} \text{ voir (12)}$$

La même valeur a été obtenue en nous servant de l'inversion double (voir 12).

A présent déterminons la valeur de:

$$\overline{Y_\infty K} = \frac{R_2'}{s}\left(\frac{\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{X}_0}\right)^2 = \frac{R_2'}{s}(1+\tau_1)^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha)$$

On peut aussi poser: $\frac{Y_\infty K}{X_{D''}} = \frac{LW}{\frac{1}{X_{D''}}}$ d'où

$$\underline{\overline{LW}} = \frac{\overline{Y_\infty K}}{X_{D''}^2} = \underline{\frac{R_2'(1+\tau_1)^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{s\,X_{D''}^2}} \quad (15)$$

Cette relation est très importante pour les constructions qui vont suivre.

Détermination des échelles du glissement

Le glissement peut en se servant d'artifices, directement se lire, sur le diagramme vectoriel d'admittance ou du courant (voir fig. 13).

On a: $\overline{LX} = R_2'(1+\tau_1)^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha) = c_1$

$$\overline{LW} = \frac{R_2'}{s}(1+\tau_1)^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha) = c_1\frac{1}{s}$$

$$\overline{L'X'} = \frac{s}{\overline{P_0''R}} = c_2 \text{ et } \overline{L'W'} = c_2\frac{1}{s}$$

d'après la similitude des triangles on a:

$$\frac{\overline{RV}}{\overline{P_0''R}} = \frac{\overline{RX'} - \overline{RV}}{\overline{L'W'} - \overline{L'X'}}$$ (La droite $\overline{RVX'}$ est parallèle à $\overline{P_0''P_\infty''L}$) voir fig. 13

d'où $\overline{RV}(\overline{L'W'} - \overline{L'X'}) = \overline{P_0''R}(\overline{RX'} - \overline{RV}) =$
$= \overline{L'X'}(\overline{RX'} - \overline{RV})$

$$\text{et } \overline{RV} = \frac{\overline{L'X'}\ \overline{RX'}}{\overline{L'W'}} = \frac{c_2\,\overline{RX'}}{c_2\,\dfrac{1}{s}} = s\,\overline{RX'} \qquad (16)$$

RX' étant une valeur constante, l'échelle des glissements sera proportionnelle. Si on choisit la distance RX' judicieusement par ex. $\overline{RX'} = 50$ mm, alors on pourra lire directement le glissement en %. Cette échelle des glissements n'est pas pratique si ceux-ci sont petits, c'est-à-dire jusqu'à 10 %; c'est pour cette raison que nous donnons une autre échelle qui se trouve sur la droite n qui passe par P_0'' et qui est perpendiculaire à la droite $\overline{P_0''P_\infty''}$. Relions $\overline{HP''}$ par une droite jusqu'à l'intersection T avec la

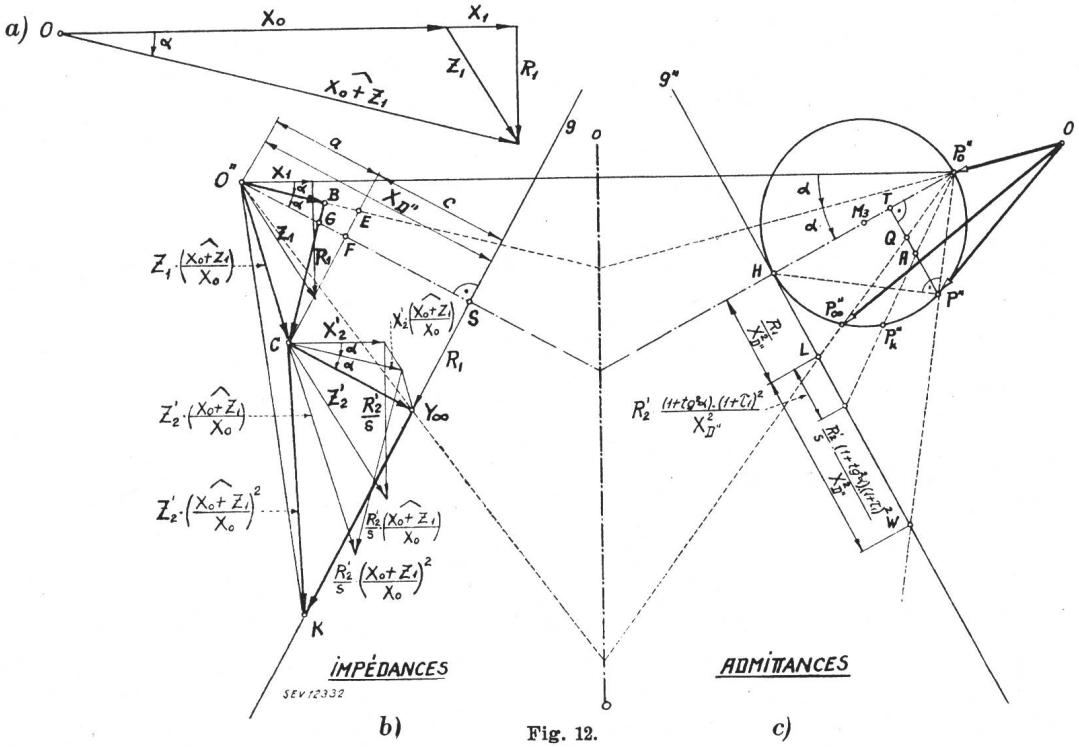

Fig. 12.

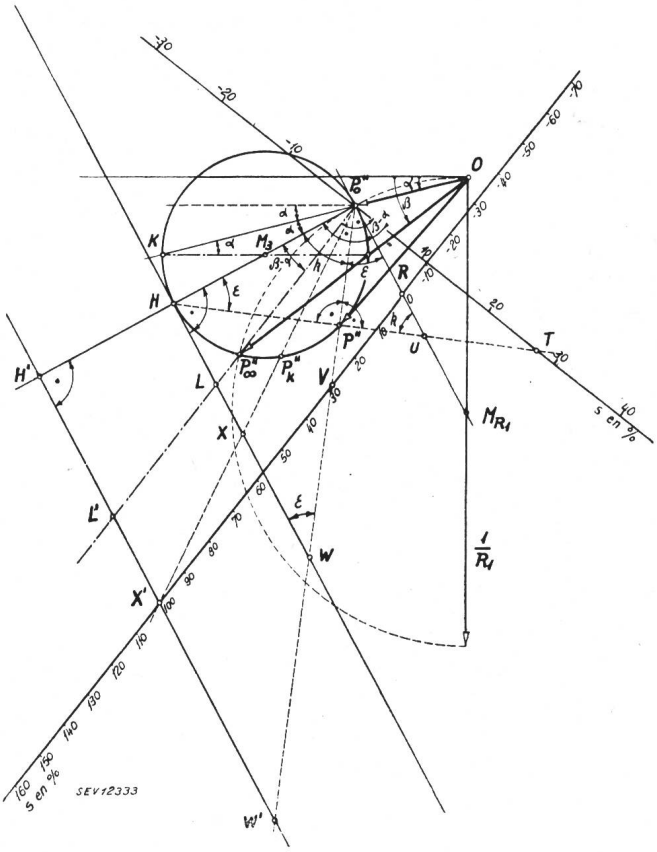

Fig. 13.

droite n. Calculons $P_0''T$:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{\overline{HW}\,X_{D''}} \quad \text{donc}$$

$$\sin\varepsilon = \frac{1}{\overline{HW}\,X_{D''}\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{\overline{HW}\,X_{D''}}\right)^2}}$$

$$\text{et } \cos\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{\overline{HW}\,X_{D''}}\right)^2}}$$

$$\overline{P_0''P''} = \frac{\sin\varepsilon}{X_{D''}} = \frac{1}{\overline{HW}\cdot X_{D''}^2\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{\overline{HW}\cdot X_{D''}}\right)^2}}$$

$$\frac{P_0''P''}{P_0''T} = \cos\left[\varepsilon+(\beta-\alpha)\right] \quad \text{d'où}$$

$$P_0''T = \frac{\overline{P_0''P''}}{\cos\left[\varepsilon+(\beta-\alpha)\right]} \quad \text{mais } \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \overline{HL}\cdot X_{D''}$$

$$\text{et } \cos\left[\varepsilon+(\beta-\alpha)\right] = \cos\varepsilon\cos(\beta-\alpha) - \sin\varepsilon\sin(\beta-\alpha) =$$

$$= \cos\varepsilon\,\frac{1}{\sqrt{1+(\overline{HL}\cdot X_{D''})^2}} - \sin\varepsilon\,\frac{\overline{HL}\cdot X_{D''}}{\sqrt{1+(\overline{HL}\cdot X_{D''})^2}} =$$

$$\text{posons } m = \frac{1}{\sqrt{1+(\overline{HL}\cdot X_{D''})^2}} \quad \text{alors on aura:}$$

$$\cos[\varepsilon+(\beta-\alpha)] = m\,(\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\,\overline{HL}\cdot X_{D''}) =$$

$$= m\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\overline{HW}\cdot X_{D''}}\right)^2}} - \frac{\frac{\overline{HL}}{\overline{HW}}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\overline{HW}\cdot X_{D''}}\right)^2}}\right]$$

d'où si on pose $n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\overline{HW}\cdot X_{D''}}\right)^2}}$

$$\overline{P_0''T} = \frac{\dfrac{n}{\overline{HW}\cdot X_{D''}^2}}{m\,n\left[1-\dfrac{\overline{HL}}{\overline{HW}}\right]} = \frac{1}{m\,X_{D''}^2\,(\overline{HW}-\overline{HL})} =$$

$$= \frac{1}{m\,X_{D''}^2\cdot\overline{LW}} = \frac{\sqrt{1+(\overline{HL}\cdot X_{D''})^2}}{X_{D''}^2\cdot\overline{LW}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\dfrac{1}{X_{D''}^2}+\overline{HL}^2}}{X_{D''}\cdot\overline{LW}} = \frac{\overline{P_0''L}}{X_{D''}\cdot\overline{LW}} \qquad \text{mais } \overline{LW} = \frac{\overline{LX}}{s}$$

donc $\overline{P_0''T} = \dfrac{s\cdot\overline{P_0''L}}{X_{D''}\cdot\overline{LX}}$ ou bien $s = \dfrac{\overline{P_0''T}\cdot\overline{LX}}{\overline{P_0''H}\cdot\overline{P_0''L}}$

$$\text{et } \overline{P_0''T} = \frac{s\cdot\overline{P_0''H}\cdot\overline{P_0''L}}{\overline{LX}} \qquad (17)$$

Cette deuxième échelle est très pratique pour les petits glissements.

Fréquence variable

Supposons maintenant que la fréquence soit variable. Donc restent constants:

$$\tau_1;\ \tau_2;\ \tau;\ L_0;\ L_1;\ L_2;\ R_1 \text{ et } R_2'$$

et sont variables:

f donc ω et par conséquent:

$$X_0 = \omega L_0;\ X_1 = \omega L_1;\ X_2' = \omega L_2'$$
$$\omega = 2\pi f$$

on aura donc: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{R_1}{X_0'}$; $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\left(\dfrac{1+\tau}{\tau}\right)$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$$

qui seront inversément proportionnel à la fréquence. Le cercle d'admittance aura pour diamètre (voir 6)

$$\frac{1}{X_{D''}} = \frac{1}{X_0'\,\tau\,(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)} =$$

$$= \frac{1}{X_0\,(1+\tau_1)\,\tau\left[1+\dfrac{R_1^2}{X_0^2\,(1+\tau_1)^2}\left(\dfrac{1+\tau}{\tau}\right)\right]} =$$

$$= \frac{1}{(1+\tau_1)\,\tau\left[X_0+\dfrac{R_1^2}{X_0\,(1+\tau_1)^2}\,\dfrac{1+\tau}{\tau}\right]}$$

$\dfrac{1}{X_{D''}}$ sera un maximum si $X_0+\dfrac{R_1^2}{X_0\,(1+\tau_1)^2}\cdot\dfrac{1+\tau}{\tau}$ est un minimum. Recherchons ce minimum en faisant la dérivée du terme par rapport à X_0

posons $y = X_0 + \dfrac{k}{X_0}$ où $k = \dfrac{R_1^2}{(1+\tau_1)^2\,\sigma}$ voir (5)

la 1ère dérivée vaudra $y' = 1 - \dfrac{k}{X_0^2}$

la 2ème dérivée vaudra $y'' = +\dfrac{k}{X_0^3}$

donc il s'agit d'un min.

Pour le minimum posons $1 - \dfrac{k}{X_{0m}^2} = 0$

$$\text{d'où } X_{0m} = \pm\sqrt{k} = \pm\frac{R_1}{1+\tau_1}\sqrt{\frac{1}{\sigma}} \qquad (18)$$

Marquons de l'indice m toutes les relations qui ont trait au diamètre maximum. On aura:

$$\operatorname{tg}\alpha_m = \pm\sqrt{\sigma} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}^2\alpha_m = \sigma \qquad (19)$$

$$\operatorname{tg}\beta_m = \pm\sqrt{\frac{1}{\sigma}} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}^2\beta_m = \frac{1}{\sigma} \qquad (20)$$

$$\text{donc} \quad \operatorname{tg}\alpha_m\operatorname{tg}\beta_m = 1 \qquad (21)$$

L'ordonnée du centre du cercle de diamètre maximum sera donc:

$$h_m = \frac{\operatorname{tg}\beta_m}{X_{0m}'\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha_m\operatorname{tg}\beta_m)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha_m\operatorname{tg}\beta_m}{R_1\,(1+\operatorname{tg}\alpha_m\operatorname{tg}\beta_m)} = \frac{1}{2\,R_1} \qquad (22)$$

Le diamètre de ce cercle maximum vaudra:

$$\frac{1}{X_{Dm}''} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_m}{R_1\,\tau\,(1+\operatorname{tg}\alpha_m\operatorname{tg}\beta_m)} = \pm\frac{1}{2\,R_1\,\tau}\cdot\sqrt{\sigma} \qquad (23)$$

Pour $\dfrac{1}{X_{0m}''}$ on aura (voir fig. 14):

$$\frac{1}{X_{0m}''} = \frac{1}{X_{0m}'\,(1+\operatorname{tg}\alpha_m\operatorname{tg}\beta_m)} = \pm\frac{1}{2\,R_1}\cdot\sqrt{\sigma} \qquad (24)$$

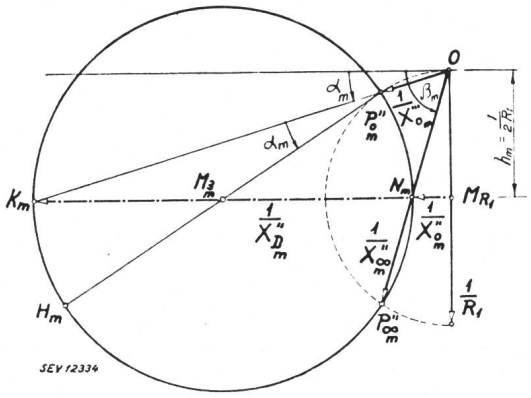

Fig. 14.

La plus grande composante (induct.,) de l'admittance sera où le cercle sera maximum et vaudra:

$$\frac{1}{X''_{0m}} + \frac{1}{X''_{Dm}} = \frac{\pm\sqrt{\sigma}}{2R_1}\left(1+\frac{1}{\tau}\right) = \pm\frac{1}{2R_1\sqrt{\sigma}} \qquad (25)$$

Cherchons maintenant sur quelle courbe se trouvent les centres des différents cercles d'admittance si la fréquence est variable. Pour cela, nous devons avoir recours au système des coordonnées cartésiennes, en supposant l'origine au milieu du vecteur $\frac{1}{R_1}$ au point M (fig. 15). On sait que:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\left(1+\frac{1}{\tau}\right) \qquad \text{d'où } \tau = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$$

on aura en introduisant (pour l'abscisse x) (voir fig. 15):

$$\underline{x} = \pm\left(\frac{1}{2X_{D''}} + \frac{1}{X''_0}\right) =$$

$$= \pm\left(\frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{2X'_0\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)} + \frac{1}{X'_0(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}\right) =$$

$$= \pm\left(\frac{1}{X'_0(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}\right)\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2\operatorname{tg}\alpha}\right) =$$

$$= \pm\underline{\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2R_1(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}}$$

pour l'ordonnée y on aura:

$$\underline{y} = -\frac{1}{2R_1} + h = -\frac{1}{2R_1} + \frac{\operatorname{tg}\beta}{X'_0(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)} =$$

$$= \underline{\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - 1}{2R_1(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}}$$

La plus grande abscisse se trouvera où $\frac{1}{X_{D''}}$ est maximum et vaudra:

$$\underline{a} = \frac{1}{2X''_{Dm}} + \frac{1}{X''_{0m}} = \pm\frac{\sqrt{\sigma}}{4R_1\cdot\tau} \pm \frac{\sqrt{\sigma}}{2R_1} =$$

$$= \pm\frac{\sqrt{\sigma}}{4R_1}\left(\frac{1}{\tau}+2\right) = \pm\frac{\sqrt{\sigma}}{4R_1}\left(\frac{1+\tau}{\tau}+1\right) =$$

$$= \pm\underline{\frac{1}{4R_1}\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} + \sqrt{\sigma}\right)} \qquad (26)$$

La plus grande ordonnée aura pour valeur:

$$\underline{b = \pm\frac{1}{2R_1}} \qquad (27)$$

en effet si on pousse $f = \infty$ on a $h = 0$ et si $f = 0$ on a $h = \frac{1}{R_1}$

Divisons x par a et y par b:

$$\frac{x}{a} = \frac{\pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2R_1(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}}{\pm\dfrac{1}{4R_1}\left(\sqrt{\dfrac{1}{\sigma}}+\sqrt{\sigma}\right)} =$$

$$= \frac{2(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{\sigma}}+\sqrt{\sigma}\right)(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - 1}{2R_1(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}}{\pm\dfrac{1}{2R_1}} = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - 1}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

élevons ces deux valeurs au carré et additionnons:

$$\underline{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} = \frac{4(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2}{\left(\dfrac{1}{\sigma}+2+\sigma\right)(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)^2} +$$

$$+ \frac{\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + 1}{(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)^2} =$$

$$= \frac{4\operatorname{tg}^2\alpha\left(1+\dfrac{1}{\sigma}\right)^2}{\sigma\left(\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{2}{\sigma}+1\right)(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)^2} +$$

$$+ \frac{\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + 1}{(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)^2} =$$

$$= \frac{4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + 1 - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}{(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)^2} = \underline{1}$$

Ce résultat démontre que les centres des cercles d'admittance de la machine asynchrone polyphasée sous fréquence variable, se déplacent sur une *ellipse* dont le grand axe est $2a$ et le petit $2b$.

Calculons maintenant la distance $2c$ qui sépare les 2 foyers de l'ellipse (voir fig. 15).

Nous savons que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\underline{c} = \sqrt{\frac{1}{(4R_1)^2}\left(\sigma+2+\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{4R_1^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4R_1^2}\left(\frac{\sigma+2+\dfrac{1}{\sigma}-4}{4}\right)} =$$

$$= \pm\underline{\frac{1}{4R_1}\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} - \sqrt{\sigma}\right)} \qquad (28)$$

Déterminons ensuite la valeur de l'expression: $\frac{c\cdot x}{a}$

$$\underline{\frac{c\cdot x}{a}} = \frac{\pm\dfrac{1}{4R_1}\left(\sqrt{\dfrac{1}{\sigma}}-\sqrt{\sigma}\right)\left(\pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2R_1(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}\right)}{\pm\dfrac{1}{4R_1}\left(\sqrt{\sigma}+\sqrt{\dfrac{1}{\sigma}}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{\sigma}-\sigma\right)\left(\pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\left(1+\dfrac{1+\tau}{\tau}\right)}{2R_1(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}\right)}{\sigma+2+\dfrac{1}{\sigma}} =$$

$$= \pm\frac{(1+2\tau)\operatorname{tg}\alpha(1+2\tau)}{(1+2\tau)^2\,2R_1\tau(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)} =$$

$$= \pm\frac{1}{2X'_0\cdot\tau\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)} = \pm\underline{\frac{1}{2X_{D''}}} \qquad (29)$$

La distance d'un foyer à un point quelconque de l'ellipse-courbe-lieu des centres des cercles d'admittance vaudra (voir fig. 15):

$$u = a - \frac{c\,x}{a} \quad \text{et} \quad v = a + \frac{c\,x}{a}$$

en introduisant on aura:

$$\underline{u = \pm \frac{1}{4 R_1}\left(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\frac{1}{\sigma}}\right) \mp \frac{1}{2 X_{D''}}} \qquad (30)$$

$$\underline{v = \pm \frac{1}{4 R_1}\left(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\frac{1}{\sigma}}\right) \pm \frac{1}{2 X_{D''}}} \qquad (31)$$

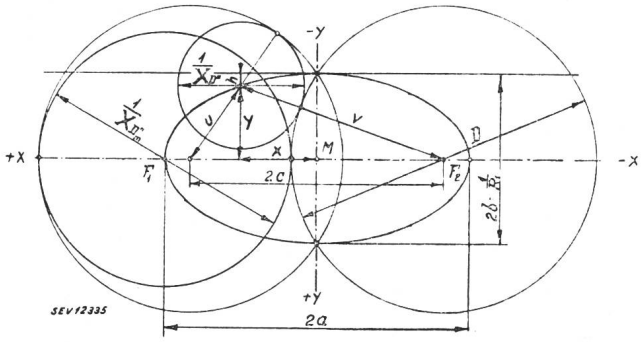

Fig. 15.

Ces deux résultats démontrent, si on prend soin d'observer la fig. 15, que les courbes enveloppantes des cercles d'admittance sont elles-mêmes des cercles de même grandeur, ayant comme diamètre la valeur:

$$D = \frac{1}{2 R_1}\left(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\frac{1}{\sigma}}\right) \qquad (32)$$

et pour centres les deux foyers de l'ellipse F_1 et F_2 (voir fig. 15).

Cherchons le diamètre du cercle d'admittance qui est tangent à l'axe des abscisses des coordonnées électriques, c. à. d. le diamètre du premier cercle qui est totalement moteur. (Les pertes dans le fer étant considérées nulles). Ce cercle est représenté (kc) f sur la fig. 16.

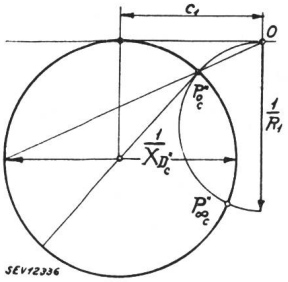

Fig. 16.

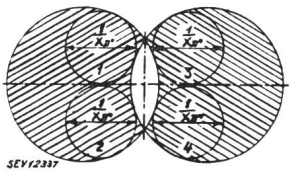

Fig. 17.

Pour trouver les caractéristiques de ce cercle kc, il faut poser:

$$h_c = \frac{1}{2 X_{D''c}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_c \cdot \operatorname{tg}\beta_c}{R_1\,(1 + \operatorname{tg}\alpha_c \operatorname{tg}\beta_c)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha_c}{2 R_1'\,\tau\,(1 + \operatorname{tg}\alpha_c \operatorname{tg}\beta_c)}$$

d'où $\operatorname{tg}\beta_c = \dfrac{1}{2\tau}$ et $\operatorname{tg}\alpha_c = \dfrac{1}{2(\tau+1)}$

La distance c_1 du point d'origine 0 au point de tangence est:

$$c_1 = \frac{1}{X''_{0c}} + \frac{1}{2 X_{D''c}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_c}{R_1\,(1 + \operatorname{tg}\alpha_c \operatorname{tg}\beta_c)} +$$

$$+ \frac{\operatorname{tg}\alpha_c}{2 R_1\,\tau\,(1 + \operatorname{tg}\alpha_c \operatorname{tg}\beta_c)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_c\left(1 + \frac{1+\tau}{1}\right)}{2 R_1\,(1 + \operatorname{tg}\alpha_c \operatorname{tg}\beta_c)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha_c + \operatorname{tg}\beta_c}{2 R_1\,(1 + \operatorname{tg}\alpha_c \operatorname{tg}\beta_c)}$$

en introduisant les valeurs $\operatorname{tg}\alpha_c$ et $\operatorname{tg}\beta_c$ on aura:

$$\underline{c_1} = \frac{\left(\frac{1}{2(\tau+1)} + \frac{1}{2\tau}\right)}{2 R_1\left(1 + \frac{1}{2(\tau+1)\,2\tau}\right)} =$$

$$= \frac{2\,(1 + 2\tau)}{2 R_1\,(4\tau^2 + 4\tau + 1)} = \underline{\frac{1}{R_1\,(1 + 2\tau)}}$$

Le diamètre du cercle kc vaudra:

$$\underline{\frac{1}{X_{D''c}}} = \frac{\frac{1}{2(\tau+1)}}{R_1\,\tau\left(1 + \frac{1}{2(\tau+1)\,2\tau}\right)} = \frac{2}{R_1\,(1 + 2\tau)^2} \qquad (33)$$

La fréquence de ce cercle vaudra si on pose:

$$X'_{0c} = \omega_c L_0\,(1 + \tau_1) = \omega_c L'_0$$

$$\operatorname{tg}\alpha_c = \frac{R_1}{\omega_c L'_0} \text{ d'où } \underline{\omega_c} = \frac{R_1}{L'_0 \frac{1}{2(\tau+1)}} = \underline{\frac{2 R_1\,(1+\tau)}{L'_0}} \qquad (34)$$

mais $\omega_c = 2\pi f_c$ et $f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ et en introduisant

$$\underline{f_c = \frac{R_1\,(1 + \tau)}{\pi\,L'_0}} \qquad (35)$$

A un cercle d'admittance k correspondront toujours, en raison de la symétrie, 3 autres de même grandeur (2 cercles à gauche, fréquences positives et deux cercles à droite fréquences négatives). Voyons par quelles relations sont liés ces 4 cercles (voir fig. 17).

Prenons le cas des deux mêmes cercles de la fréquence positive:
on avait plus haut:

$$\frac{1}{X_{D''}} = \frac{1}{(1 + \tau_1)\,\tau\left[X_0 + \frac{R_1^2}{X_0\,(1 + \tau_1)^2} \cdot \frac{1 + \tau}{\tau}\right]}$$

sachant que τ_1, τ et R_1 sont constants, il faut donc poser pour avoir le même résultat pour $\dfrac{1}{X_{D''}}$

$$X_{0s} = \frac{R_1^2\,(1 + \tau)}{X_0\,(1 + \tau_1)^2\,\tau} = \frac{R_1^2}{X_0\,(1 + \tau_1)^2\,\sigma} = 2\pi \cdot f_s \cdot L_0$$

$X_0 = 2\pi f L_0$. Divisons ces deux équations l'une par l'autre et on aura:

$$\frac{f_s}{f} = \frac{R_1^2}{X_0^2 (1+\tau_1)^2 \sigma} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$$

$$\text{d'où } f_s = f \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \qquad (36)$$

Les 4 cercles auront les fréquences suivantes:

$$f;\ f \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta;\ -f \text{ et } -f \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$$

($\operatorname{tg}\alpha$ et $\operatorname{tg}\beta$ se rapportant au cercle de fréquence f). Ces 4 cercles auront la même grandeur et seront situés symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées cartésiennes de l'ellipse des centres (voir fig. 17). D'après ce que nous avons vu plus haut (voir form. 32) toutes les extrémités des vecteurs d'admittance pour n'importe quelle fréquence doivent se trouver dans la partie hachurée de la fig. 17.

Construction au moyen de la méthode graphique, des courbes d'égale vitesse

En se basant sur les essais de marche à vide et de court-circuit d'une machine triphasée asynchrone, à 4 pôles, avec induit en court-circuit, et en construisant le diagramme, nous avons trouvé pour les différentes constantes, les valeurs suivantes:

$L_0' = 1{,}33$ Henry/Phase	d'où $\sigma = 0{,}0917$
$R_1 = 23\ \Omega$/Ph	$\sqrt{\sigma} = 0{,}303$
$R_2'(1+\tau_1)^2 = r_2 = 11{,}8\ \Omega$/Ph	$\frac{1}{\sigma} = 10{,}9$
$\tau = 0{,}101$	$\sqrt{\frac{1}{\sigma}} = 3{,}3$

En introduisant on aura donc:

Diamètres des 2 cercles enveloppants (voir formule 32)

$$D = \frac{1}{2R_1}\left(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\frac{1}{\sigma}}\right) = \frac{1}{2\cdot 23}(0{,}303 + 3{,}3) =$$
$$= \underline{0{,}0784} \text{ Siemens.}$$

Le demi grand axe de l'ellipse des centres des cercles d'admittance vaudra d'après la form. 26:

$$a = \pm\frac{1}{4R_1}\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} + \sqrt{\sigma}\right) = \pm\frac{1}{4\cdot 23}(3{,}3 + 0{,}303) =$$
$$= \underline{\pm 0{,}0392\ S}$$

Le demi petit axe de l'ellipse suiv. la form. 27:

$$b = \pm\frac{1}{2R_1} = \pm\frac{1}{2\cdot 23} = \underline{\pm 0{,}0217 \textit{ Siemens}}$$

La demi distance qui sépare les 2 foyers de l'ellipse vaudra suivant (28):

$$c = \pm\frac{1}{4R_1}\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} - \sqrt{\sigma}\right) = \pm\frac{1}{4\cdot 23}\cdot(3{,}3 - 0{,}303) =$$
$$= \underline{\pm 0{,}0326\ S}$$

Pour le cercle d'admittance de diamètre maximum on aura selon (23):

$$\underline{\frac{1}{X_{D''m}}} = \pm\frac{1}{2R_1\tau}\sqrt{\sigma} = \pm\frac{0{,}303}{2\cdot 23\cdot 0{,}101} =$$
$$= \underline{\pm 0{,}0652 \textit{ Siemens.}}$$

En outre on a (voir (19) et (20):

$$\underline{\operatorname{tg}\alpha_m} = \pm\sqrt{\sigma} = \underline{\pm 0{,}303} \text{ et } \underline{\operatorname{tg}\beta_m} = \pm\sqrt{\frac{1}{\sigma}} = \underline{\pm 3{,}3}$$

La plus grande composante inductive sera d'après (25)

$$\underline{\frac{1}{X_{0m}''} + \frac{1}{X_{D''m}}} = \pm\frac{1}{2R_1\sqrt{\sigma}} = \pm\frac{1}{2\cdot 23\cdot 0{,}303} =$$
$$= \underline{\pm 0{,}0718\ S}$$

Construisons les courbes d'égale vitesse pour: $n = 0$ (court-circuit), $n = 14{,}3$/min; 25,67/min et 750/min pour une fréquence variable de $+\infty \ldots 0 \ldots -\infty$ en se basant sur les développements précédents.

Nous donnons ici l'exemple pour le cercle d'admittance de fréquence $f = +25$/s.

Donc: $\underline{X_{0\,25}'} = L_0' \cdot 2\pi f = 1{,}33 \cdot 2\pi \cdot 25 = \underline{209\ \Omega \textit{ ind.}}$

$$\operatorname{tg}\alpha_{25} = \frac{R}{X_{0\,25}'} = \frac{23}{209} = 0{,}11;\ \operatorname{tg}\beta_{25} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_{25}}{\sigma} = \frac{0{,}11}{0{,}0917} = 1{,}2$$

$$\underline{\frac{1}{X_{D''\,25}}} = \frac{1}{X_{0\,25}'\,\tau\,(1 + \operatorname{tg}\alpha_{25}\operatorname{tg}\beta_{25})} =$$
$$= \frac{1}{209\cdot 0{,}101\,(1 + 0{,}11\cdot 1{,}2)} = \underline{0{,}0418\ S.}$$

La vitesse synchrone à 25 Hz vaudra pour notre machine à 4 pôles ($p = 2$):

$$n_{s\,25} = \frac{f\cdot 60}{2} = \frac{25\cdot 60}{2} = \underline{750 \textit{ min}}$$

à $n = 0$ $\quad s = 1$

à $n = 14{,}3$/min $\quad s_{14{,}3} = \frac{750 - 14{,}3}{750} = 0{,}981$

à $n = 25{,}67$ „ $\quad s_{25{,}67} = \frac{750 - 25{,}67}{750} = 0{,}965$

à $n = 750$ „ $\quad s_{750} = 0$

Cherchons maintenant la valeur $\overline{LW}$ (voir fig. 12b). D'après la formule (15) on a:

$$\underline{\overline{L_{25}W}_{25}} = \frac{R_2'\cdot(1+\tau_1)^2\cdot(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{s\cdot X_{D''}^2} =$$
$$= \frac{11{,}8\cdot(1+0{,}11^2)}{s\cdot\frac{1}{0.0418^2}} = \underline{\frac{0{,}02085 \text{ Siemens}}{s}}$$

pour $n = 0$

$$\overline{LW} = \frac{0{,}02085}{1} = +0{,}02085 \text{ Siemens}$$

pour $n = 14{,}3/\text{min}$

$$\overline{LW} = \frac{0{,}02085}{0{,}981} = +\,0{,}02126 \text{ Siemens}$$

pour $n = 25{,}67/\text{min}$

$$\overline{LW} = \frac{0{,}02085}{0{,}965} = +\,0{,}02160 \quad ,,$$

pour $n = 750/\text{min}$

$$\overline{LW} = \frac{0{,}02085}{0} = +\ \infty \quad ,,$$

Lorsqu'il y a un grand nombre de points à chercher, il est préférable d'employer les échelles de glissement, que nous avons données plus haut.

Au moyen des valeurs calculées ci-dessus, il est facile (en répétant la construction que nous avons faite pour 25 Hz de construire les courbes d'égale vitesse au moyen de la méthode graphique sans grandes connaissances en mathématiques.

Les 4 courbes de $n = 750/\text{min}$, 25,67/min, 14,3/min et 0 nous sont représentées par la sig. 18b.

Etude analytique des courbes d'égale vitesse

Partons de la fig. 1 et posons:

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1;\ X_0 = +j\omega L_0;\ Z_2' = \frac{R_2'}{s} + j\omega L_2'$$

L'impédance résultante du schéma de la fig. 1 vaudra:

$$Z = Z_1 \overset{\wedge}{+} \frac{X_0 Z_2'}{X_0 \overset{\wedge}{+} Z_2'} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{j\omega L_0\left(\frac{R_2'}{s} + j\omega L_2'\right)}{\frac{R_2'}{s} + j\omega L_2' + j\omega L_0} =$$

$$= R_1 + \frac{j\omega \frac{R_2'}{s}(L_0 + L_1) - \omega^2 (L_0 L_1 + L_0 L_2' + L_1 L_2')}{\frac{R_2'}{s} + j\omega L_2' + j\omega L_0}$$

nous avions posé plus haut: $\tau_1 = \frac{X_1}{X_0} = \frac{L_1}{L_0}$

et $\tau_2 = \frac{X_2'}{X_0} = \frac{L_2'}{L_0}$

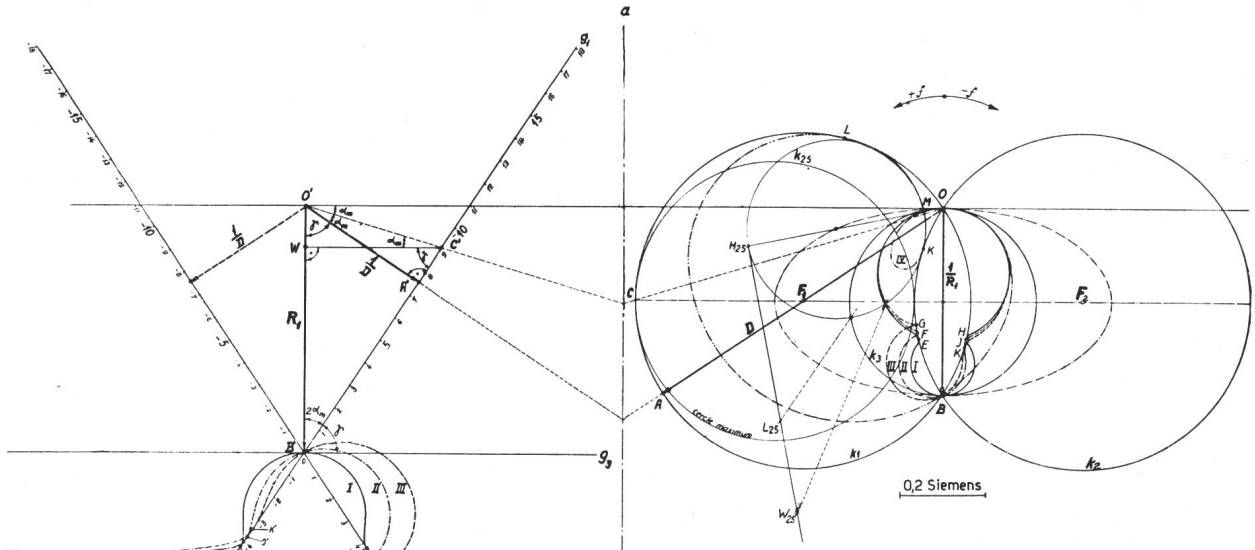

Fig. 18a.
$I = 0/\text{min}$ $III = 25{,}67/\text{min}$
$II = 14{,}3/\text{min}$ $IV = 750/\text{min}$

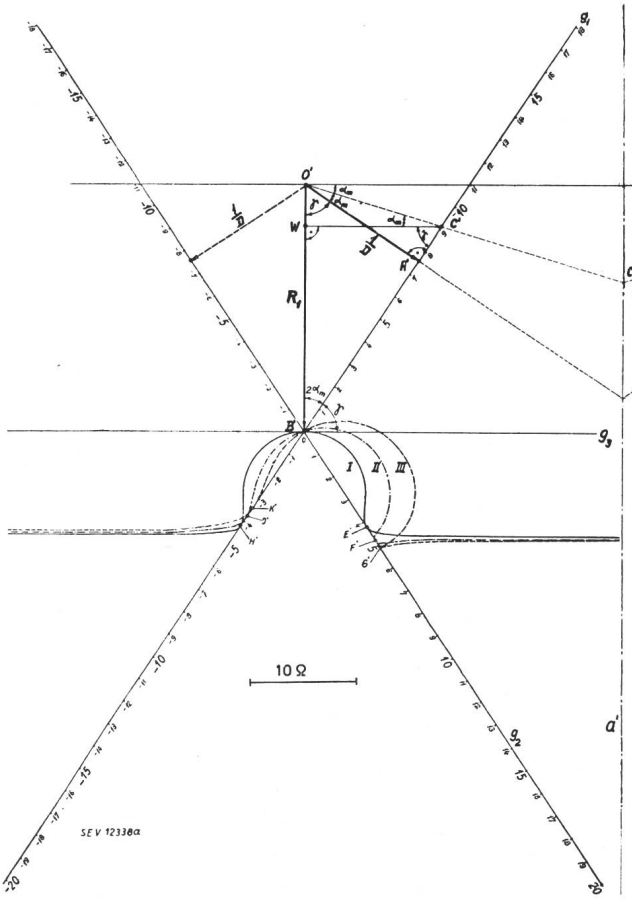

Fig. 18b.

En observant la fig. 18b on remarque que la courbe de 750/min se coupe au point M, la courbe de 25,67/min n'a plus de point de coupe, mais une pointe qui touche le cercle enveloppant k_2 au point G, la courbe de 14,3/min n'a ni pointe ni de point de coupe et ressemble à la courbe de 0/min, la symétrie mise à part.

d'où on peut tirer: $X_1 = X_0\,\tau_1$ et $X_2' = X_0\,\tau_2$
et $L_1 = L_0\,\tau_1$ et $L_2' = L_0\,\tau_2$

en introduisant ces 2 dernières relations on aura:

$$Z = R_1 + \frac{j\omega \frac{R_2'}{s} \cdot L_0 (1 + \tau_1) - \omega^2 L_0^2 (\tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2)}{\frac{R_2'}{s} + j\omega L_0 (1 + \tau_2)}$$

multiplions le numérateur et le dénominateur par $(1 + \tau_1)^2$. Nous savons aussi que $\tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2 = \tau$ (voir form. 3).

$$Z = R_1 + \frac{j\omega \frac{R_2'}{s} (1 + \tau_1)^2 \cdot L_0 (1 + \tau_1) - \omega^2 L_0^2 (1 + \tau_1)^2 \cdot \tau}{\frac{R_2'}{s} (1 + \tau_1)^2 + j\omega L_0 (1 + \tau_1)(1 + \tau_1)(1 + \tau_2)}$$

mais $L_0(1+\tau_1) = L_0'$ et posons $R_2'\,(1+\tau_1)^2 = r_2$ en introduisant nous aurons:

$$Z = R_1 + \frac{j\omega \frac{r_2}{s} L_0' - \omega^2 (L_0')^2 \tau}{\frac{r_2}{s} + j\omega L_0' (1+\tau)} \qquad (37)$$

il est à remarquer que tous les facteurs de la formule (37) peuvent être facilement déterminés, pour une machine existante, par les essais de marche à vide et de court-circuit et par la mesure de la résistance primaire R_1 et ensuite en construisant le diagramme, circulaire de l'admittance ou du courant.

En outre nous savons que le glissement s vaut:

$$s = \frac{n_s - n}{n_s}$$

$$n_s \text{ vitesse synchrone } = \frac{\omega \cdot 30}{\pi \cdot p}$$

$$n \text{ vitesse du rotor } = \frac{\omega_r \cdot 30}{\pi \cdot p}$$

où p nombre de paires de pôles
$\omega = 2\pi f$ vitesse angulaire du champ tournant
ω_r vitesse angulaire (électr.) du rotor.

En remplaçant on a:

$$s = \frac{\omega - \omega_r}{\omega}$$

Introduisons cette valeur dans l'équation (32):

$$Z = R_1 + \frac{j\omega \frac{r_2 \cdot \omega}{\omega - \omega_r} \cdot L_0' - \omega^2 (L_0')^2 \tau}{\frac{r_2 \cdot \omega}{\omega - \omega_r} + j\omega L_0' \cdot (1+\tau)} =$$

$$= R_1 + \frac{j\omega^2 L_0' r_2 \left(\frac{1}{\omega - \omega_r}\right) - \omega^2 (L_0')^2 \tau}{\frac{r_2 \cdot \omega}{\omega - \omega_r} + j\omega L_0' (1+\tau)} =$$

$$= R_1 + \frac{j\omega L_0' r_2 - \omega(\omega - \omega_r)(L_0')^2 \tau}{r_2 + j(\omega - \omega_r) L_0' (1+\tau)} =$$

$$Z = R_1 - \omega L_0' \frac{(\omega - \omega_r) L_0' \tau - j \cdot r_2}{r_2 + j \cdot (\omega - \omega_r) L_0' \cdot (1+\tau)} \qquad (38)$$

Nous avons vu sur la fig. 18 que certaines courbes d'égale vitesse se coupent. A ce point de coupe nous aurions la même admittance ou la même impédance pour 2 fréquences différentes. Nous pouvons donc poser:

$$R_1 - \omega_1 L_0' \frac{(\omega_1 - \omega_r) L_0' \cdot \tau - j \cdot r_2}{r_2 + j(\omega_1 - \omega_r) L_0' (1+\tau)} =$$

$$= R_1 - \omega_2 L_0' \frac{(\omega_2 - \omega_r) \cdot L_0' \cdot \tau - j \cdot r_2}{r_2 + j \cdot (\omega_2 - \omega_r) L_0' (1+\tau)}$$

$$(\omega_1^2 - \omega_1 \cdot \omega_r) L_0' \tau r_2 - j\,\omega_1 r_2^2 + \omega_1 (\omega_1 - \omega_r) L_0' \tau j L_0' \cdot$$
$$\cdot (\omega_2 - \omega_r)(1+\tau) + \omega_1 r_2 L_0' (\omega_2 - \omega_r)(1+\tau) =$$
$$= (\omega_2^2 - \omega_2 \omega_r) L_0' \tau r_2 - j\,\omega_2 r_2^2 + \omega_2 (\omega_2 - \omega_r) \cdot$$
$$\cdot L_0' \tau j L_0' \cdot (\omega_1 - \omega_r)(1+\tau) + \omega_2 r_2 L_0' (\omega_1 - \omega_r)(1+\tau)$$

$$L_0' \tau r_2 \cdot [(\omega_1 + \omega_2)(\omega_1 - \omega_2) - \omega_r (\omega_1 - \omega_2)] - j\,r_2^2 \cdot$$
$$(\omega_1 - \omega_2) + j (L_0')^2 \tau (1+\tau)(\omega_2 - \omega_r)(\omega_1 - \omega_r) \cdot$$
$$\cdot (\omega_1 - \omega_2) + L_0' r_2 (1+\tau)\,\omega_r (\omega_1 - \omega_2) = 0$$

$$L_0' \tau r_2 (\omega_1 + \omega_2 - \omega_r) - j\,r_2^2 + j (L_0')^2 \tau (1+\tau) \cdot$$
$$\cdot (\omega_2 - \omega_r)(\omega_1 - \omega_r) - L_0' r_2 (1+\tau)\,\omega_r = 0$$

Prenons pour commencer les termes réels:

$$L_0' \tau r_2 (\omega_1 + \omega_2 - \omega_r) - L_0' r_2 (1+\tau)\,\omega_r = 0$$
$$\tau\,\omega_1 + \tau\,\omega_2 - \tau\,\omega_r - \omega_r - \tau\,\omega_r = 0$$
$$\tau(\omega_1 + \omega_2) = \omega_r \cdot (1 + 2\tau) \text{ d'où}$$
$$\underline{\omega_1 + \omega_2} = \omega_r \cdot \frac{1+2\tau}{\tau} = \underline{\omega_r \cdot \frac{1+\sigma}{\sigma}}$$

Maintenant occupons-nous des termes imaginaires:

$$j (L_0')^2 \tau (1+\tau)\,\omega_1 \cdot \omega_2 - \omega_2 \omega_r - \omega_1 \omega_r + \omega_r^2) = j\,r_2^2$$

$$(L_0')^2 \tau (1+\tau) \left[\omega_2 \left(\omega_r \frac{1+2\tau}{\tau} - \omega_2\right) - \omega_r^2 \frac{1+2\tau}{\tau} + \right.$$
$$\left. + \omega_r^2\right] = r_2^2$$

$$(L_0')^2 \tau (1+\tau)\,\omega_2 \omega_r \frac{1+2\tau}{\tau} - \omega_2^2 (L_0')^2 \tau (1+\tau) -$$
$$- \frac{\omega_r^2 (1+\tau)}{\tau} (L_0')^2 \tau (1+\tau) - r_2^2 = 0$$

$$-\omega_2^2 \cdot (L_0')^2 \cdot \tau (1+\tau) + \omega_2 \cdot \omega_r \cdot (L_0')^2 (1+\tau)(1+2\tau) -$$
$$- \omega_r^2 \cdot (1+\tau)^2 (L_0')^2 - r_2^2 = 0$$

d'où

$$\omega_2 = \frac{-\omega_r (L_0')^2 (1+\tau)(1+2\tau) \pm \sqrt{\omega_r^2 (L_0')^4 (1+\tau)^2 (1+2\tau)^2 - 4 (L_0')^2 \tau (1+\tau) [\omega_r^2 (1+\tau)^2 (L_0')^2 - r_2^2]}}{-2 (L_0')^2 \tau (1+\tau)} =$$

$$= \omega_r \cdot \frac{1+2\tau}{2\tau} \mp \sqrt{\frac{\omega_r^2 (1+2\tau)^2}{4\tau^2} - \frac{\omega_r^2 \cdot (1+\tau)}{\tau} - \frac{r_2^2}{(L_0')^2 (1+\tau)\tau}} =$$

$$= \omega_r \cdot \frac{1+2\tau}{2\tau} \mp \sqrt{\frac{\omega_r^2 (1+4\tau+4\tau^2-4\tau-4\tau^2)}{4\tau^2} - \frac{r_2^2}{(L_0')^2 (1+\tau)\tau}} =$$

$$= \omega_r \cdot \frac{1+2\tau}{2\tau} \mp \sqrt{\frac{\omega_r^2}{4\tau^2} - \frac{r_2^2}{(L_0')^2 (1+\tau)\tau}} = \underline{\omega_2 = \frac{\omega_r}{2} \cdot \frac{1+\sigma}{\sigma} \mp \frac{1}{2\tau} \sqrt{\omega_r^2 - \left(\frac{2 r_2}{L_0'}\right)^2 \cdot \sigma}} \qquad (39)$$

$$\text{et} \quad \underline{\omega_1 = \frac{\omega_r}{2} \cdot \frac{1+\sigma}{\sigma} \pm \frac{1}{2\tau} \sqrt{\omega_r^2 - \left(\frac{2 r_2}{L_0'}\right)^2 \cdot \sigma}} \qquad (40)$$

Si le terme sous la racine est positif on aura un point de coupe de la courbe d'égale vitesse, si ce terme est négatif, il n'y aura pas de point de coupe et si ce terme est égal à zéro, la courbe aura une pointe (cas de courbe de $n = 25{,}67$/min de la fig. 18). Cette courbe sera celle dont la vitesse angulaire ω_{rk} vaudra:

$$\omega_{rk} = \pm \frac{2\, r_2}{L_0'} \cdot \sqrt{\sigma} \qquad (41)$$

donc

$$n_k = \pm \frac{60}{\pi p} \cdot \frac{r_2}{L_0'} \cdot \sqrt{\sigma} \qquad (42)$$

Nous avons démontré que n'importe quelle extrémité des vecteurs d'admittance devait se trouver dans la surface hachurée de la fig. 17 qui est limitée par les cercles k_1 et k_2 (courbes enveloppantes).

Considérons la fig. 18a qui nous montre ces deux cercles. Nous supposons que cette fig. 18a est l'inversion de la fig. 18b par rapport à l'axe a—a'.

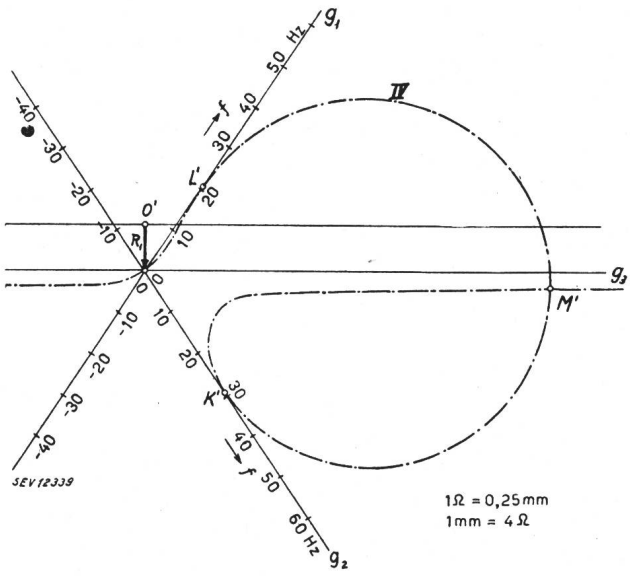

Fig. 18c.

Le cercle k_1 est l'inversion de la droite g_1 qui passe par l'extrémité du vecteur de la résistance R_1 et qui fait un angle de 90° —γ avec lui. Le cercle k_2 est l'inversion de la droite g_2.

Cherchons les équations de ces deux droites g_1 et g_2.

$$\overline{O'H'} = \frac{1}{D_1} = \frac{2\, R_1}{\sqrt{\sigma} + \sqrt{\frac{1}{\sigma}}}$$

En observant la fig. 18b on voit que le triangle $O'\,B'\,C'$ est isocèle, donc:

$$\overline{O'B'} = \overline{B'C'} = R_1$$

$$\overline{C'W} = \overline{O'A'} = \frac{1}{D_1} \quad \text{et} \quad \overline{A'B'} = \overline{B'W} = \frac{R_1\,(1-\sigma)}{1+\sigma}$$

$$\text{donc } \underline{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\dfrac{R_1\,(1-\sigma)}{1+\sigma}}{\dfrac{2\,R_1}{\sqrt{\sigma}+\sqrt{\frac{1}{\sigma}}}} = \frac{(1-\sigma)\left(\sqrt{\sigma}+\sqrt{\frac{1}{\sigma}}\right)}{2\,(1+\sigma)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\sigma}+\sqrt{\frac{1}{\sigma}}\right)(1+\sqrt{\sigma})\,(1-\sqrt{\sigma})}{2\,(1+\sigma)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\sigma}+\sqrt{\frac{1}{\sigma}}+\sigma+1\right)(1-\sqrt{\sigma})}{2\,(1+\sigma)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma}+\sqrt{\frac{1}{\sigma}}+\sigma+1-\sigma-1-\sigma\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma}}{2\,(1+\sigma)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{\sigma}}-\sigma\sqrt{\sigma}}{2\,(1+\sigma)} = \frac{1-\sigma^2}{2\sqrt{\sigma}\,(1+\sigma)} =$$

$$= \frac{1-\sigma}{2\sqrt{\sigma}} = \underline{\frac{\sqrt{\frac{1}{\sigma}}-\sqrt{\sigma}}{2}}$$

$$\text{et} \quad \operatorname{ctg}\gamma = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{\sigma}}-\sqrt{\sigma}}$$

Le cercle de diamètre maximum sera tangent au cercle D_1 au point C (fig. 18b). Le point qui correspond au point C dans le diagramme des impédances est le point C'.

Calculons les coordonnées du point C':

$$\overline{O'W} = R_1 - \overline{B'W}$$

$$\overline{C'W} = \frac{1}{D_1}$$

La fréquence pour le cercle de diamètre maximum vaudra en partant de:

$$\operatorname{tg}\alpha_m = \frac{R_1}{X_0'} = \frac{R_1}{\omega_m\, L_0'} = \sqrt{\sigma}$$

$$\text{d'où } \omega_m = \frac{R_1}{L_0' \cdot \sqrt{\sigma}}$$

Supposons que la distance $\overline{B'C'}$ soit proportionnelle à la fréquence.

Pour $\omega = 1$ on aurait symboliquement:

$$Z_{D\,max} = R_1 - \frac{R_1\,(1-\sigma)}{(1+\sigma)\cdot\dfrac{R_1}{L_0'\sqrt{\sigma}}} + j\,\frac{2\,R_1}{\dfrac{\sqrt{\sigma}+\sqrt{\frac{1}{\sigma}}}{\dfrac{R_1}{L_0'\sqrt{\sigma}}}} =$$

$$= R_1 - \frac{L_o' \cdot \sqrt{\sigma} \cdot (1-\sigma)}{1+\sigma} + j \frac{2 L_o' \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma} + \sqrt{\frac{1}{\sigma}}} =$$

$$= R_1 - L_o' \left(\frac{\sqrt{\sigma} \cdot (1-\sigma) - 2 j \sigma}{1+\sigma} \right) =$$

$$= R_1 - \frac{L_o'}{1+\sigma} (\sqrt{\sigma}(1-\sigma) - 2 j \sigma)$$

Pour une valeur quelconque d'ω on aurait donc pour la droite g_1

$$Z_{D1} = R_1 - \frac{\omega L_o'}{1+\sigma} [\sqrt{\sigma}(1-\sigma) - 2 j \sigma] \quad (43)$$

et pour la droite g_2

$$Z_{D2} = R_1 + \frac{\omega \cdot L_o'}{1+\sigma} [\sqrt{\sigma}(1-\sigma) - 2 j \sigma] \quad (44)$$

Voyons maintenant à quelle fréquence les courbes de vitesse constante sont tangentes aux cercles k_1 et k_2. La tangence est aussi réalisée dans le diagramme d'impédance avec les droites g_1 et g_2.

Pour cela il faut donc poser (pour le cas de g_1 resp. k_1):

$$R_1 - \frac{\omega L_o'}{1+\sigma} [\sqrt{\sigma}(1-\sigma) - 2 j \sigma] =$$

$$= R_1 - \omega L_o' \frac{(\omega - \omega_r) L_o' \cdot \tau - j r_2}{r_2 + j (\omega - \omega_r) L_o' (1+\tau)} -$$

$$- \sqrt{\sigma} \frac{1-\sigma}{1+\sigma} + \frac{2 j \sigma}{1+\sigma} = \frac{j r_2 - (\omega - \omega_r) L_o' \tau}{r_2 + j (\omega - \omega_r) L_o' (1+\tau)} -$$

$$- \sqrt{\sigma} \frac{1-\sigma}{1+\sigma} r_2 - \sqrt{\sigma} \frac{1-\sigma}{1+\sigma} j (\omega - \omega_r) L_o' (1+\tau) +$$

$$+ \frac{2 j \sigma r_2}{1+\sigma} - \frac{2 \sigma}{1+\sigma} (\omega - \omega_r) L_o' (1+\tau) =$$

$$= j r_2 - (\omega - \omega_r) L_o' \tau$$

d'où $$- \sqrt{\sigma} \cdot \frac{1-\sigma}{1+\sigma} j (\omega - \omega_r) L_o' (1+\tau) + \frac{2 j \sigma r_2}{1+\sigma} = j r_2$$

$$(\omega - \omega_r) L_o' (1+\tau) \sqrt{\sigma} \cdot \frac{1-\sigma}{1+\sigma} = r_2 \left(\frac{2 \sigma}{1+\sigma} - 1 \right) =$$

$$= r_2 \frac{\sigma - 1}{1+\sigma}$$

$$\omega - \omega_r = \frac{r_2}{L_o'} \left[\frac{(\sigma-1)(1+\sigma)}{(1+\tau) \sqrt{\sigma} (1-\sigma)(1+\sigma)} \right] =$$

$$= - \frac{r_2}{L_o'} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma}(1+\tau)}$$

ou $$\omega - \omega_r = - \frac{r_2}{L_o'} \cdot \frac{1-\sigma}{\sqrt{\sigma}} \text{ (pour le cercle } k_1) \quad (45)$$

en partant des termes réels on trouve le même résultat, en effet:

$$- \sqrt{\sigma} \frac{1-\sigma}{1+\sigma} r_2 - \frac{2 \sigma}{1+\sigma} (\omega - \omega_r) L_o' (1+\tau) =$$

$$= - (\omega - \omega_r) L_o' \tau$$

$$(\omega - \omega_r) L_o' \cdot \left[\tau - \frac{2 \sigma}{1+\sigma} (1+\tau) \right] = \sqrt{\sigma} \cdot \frac{1-\sigma}{1+\sigma} r_2$$

$$(\omega - \omega_r) L_o' \cdot \left[\frac{\tau + \sigma \tau - 2 \sigma - 2 \sigma \tau}{1+\sigma} \right] = \sqrt{\sigma} \frac{1-\sigma}{1+\sigma} r_2$$

$$(\omega - \omega_r) L_o' [\tau - \sigma (2+\tau)] = \sqrt{\sigma} (1-\sigma) r_2$$

$$(\omega - \omega_r) = \frac{r_2}{L_o'} \cdot \frac{\sqrt{\sigma}(1-\sigma)}{\tau - \sigma(2+\tau)} = \frac{r_2}{L_o'} \frac{\sqrt{\sigma}(1-\sigma)}{\tau - \frac{2\tau}{1+\tau} - \frac{\tau^2}{1+\tau}} =$$

$$= \frac{r_2}{L_o'} \frac{\sqrt{\sigma}(1-\sigma)}{\frac{\tau + \tau_2 - 2\tau - \tau^2}{1+\tau}} = \frac{r_2}{L_o'} \frac{(1-\sigma)\sqrt{\sigma}}{-\sigma} =$$

$$= - \frac{r_2}{L_o'} \frac{1-\sigma}{\sqrt{\sigma}}$$

$$\omega - \omega_r = - \frac{r_2}{L_o'} \frac{1-\sigma}{\sqrt{\sigma}}$$

ce que nous avions trouvé avec les termes imaginaires.

Pour le cercle k_2 respectivement la droite g_2 on trouve:

$$\omega - \omega_r = \frac{r_2}{L_o'} \frac{1-\sigma}{\sqrt{\sigma}} \text{ (pour le cercle } k_2) \quad (46)$$

La fig. 18a nous montre la courbe k ($n = 25{,}67$/min) qui est pointue. La pointe doit être située sur le cercle k_2. Cette pointe peut être considérée comme un point de coupe, donc on peut poser

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_k = \frac{\omega_{rk}}{2} \cdot \frac{1+\sigma}{\sigma}$$

[voir (39) et (40)] d'où

$$\omega_k - \omega_{rk} = \frac{\omega_{rk}}{2} \cdot \frac{1+\sigma}{\sigma} - \omega_{rk} = \frac{r_2}{L_o'} \cdot \frac{1-\sigma}{\sqrt{\sigma}}$$

$$\omega_{rk} = + \frac{2 r_2}{L_o'} \cdot \sqrt{\sigma}$$

valeur que nous avions trouvée [voir formule (41)].

D'après ce résultat le choix du paramètre ω pour l'équation des droites g_1 et g_2 (fig. 19b) peut être considéré comme juste.

Calculons pour nos 4 courbes les fréquences auxquelles elles sont tangentes aux cercles k_1 et k_2 (fig. 18a), respectivement g_1 *et* g_2 (fig. 18b)

Cercle k_1 et droite g_1:

$$\omega_1 - \omega_r = - \frac{r_2}{L_o'} \cdot \frac{1-\sigma}{\sqrt{\sigma}} = - \frac{11{,}8}{1{,}33} \cdot \frac{1 - 0{,}0917}{0{,}303} =$$

$$= \omega_1 - \omega_r = -26{,}6 \text{ d'où } \omega_1 = \omega_r - 26{,}6$$

cercle k_2 et droite g_2:

$$\omega_2 - \omega_r = +26{,}6 \qquad \omega_2 = \omega_r + 26{,}6$$

Pour la courbe I, ($n = 0$) on a $\omega_r = 0$ donc

$$\omega_1 = -26{,}6$$
$$\omega_2 = +26{,}6$$

d'où $f_1 = \dfrac{-26{,}6}{2\pi} = -4{,}23$ Hz et $f_2 = +4{,}23$ Hz

Pour la courbe II ($n = 14{,}3$/min) on a $\omega_r = 3$ donc

$\omega_1 = 3 - 26{,}6 = -23{,}6$ d'où $f_1 = -3{,}76$ Hz
$\omega_2 = 3 + 26{,}6 = +29{,}6$ d'où $f_2 = +4{,}72$ Hz

Pour la courbe III, ($n = 25{,}67$/min) on a $\omega_r = 5{,}38$

$\omega_1 = 5{,}38 - 26{,}6 = -21{,}22$ d'où $f_1 = -3{,}38$ Hz
$\omega_2 = 5{,}38 + 26{,}6 = +31{,}98$ d'où $f_2 = +5{,}09$ Hz

Pour la courbe IV, ($n = 750$/min) on a $\omega_r = 157$

$\omega_1 = 157 - 26{,}6 = +130{,}4$ d'où $f_1 = +20{,}75$ Hz
$\omega_2 = 157 + 26{,}6 = +183{,}6$ d'où $f_2 = +29{,}20$ Hz

Cherchons la courbe qui possède la pointe [voir (44)]: $\omega_{rk} = +\dfrac{2\,r_2}{L'_o} \cdot \sqrt{\sigma} = \dfrac{2 \cdot 11{,}8}{1{,}33} \cdot 0{,}303 = 5{,}38$

d'où $n_k = 25{,}67$, cette courbe est représentée sous III (voir fig. 18a, b). La courbe d'impédance de $n = 750$/min est représentée par la fig. 18c (à cause de l'échelle). Nous remarquons que cette courbe se croise au point M', resp. M. Calculons les fréquences qui se trouvent en M', resp. M [voir (39) et (40)].

$$\omega_1 = \frac{\omega_r}{2} \cdot \frac{1+\sigma}{\sigma} + \frac{1}{2\tau}\sqrt{\omega_r^2 - \left(\frac{2\,r_2}{L'_o}\right)^2 \cdot \sigma} =$$

$$= \frac{157}{2} \cdot \frac{1{,}0917}{0{,}0917} +$$

$$+ \frac{1}{0{,}202}\sqrt{157^2 - \left(\frac{2 \cdot 11{,}8}{1{,}33}\right)^2 \cdot 0{,}0917} = +1713$$

d'où $f_1 = 273$

$\omega_2 = 159$ d'où $f_2 = 25{,}3$.

Il serait intéressant de faire intervenir les pertes dans le fer, ainsi que d'analyser le cercle d'admittance pour de très basses fréquences où le courant en charge peut être inférieur au courant à vide.

Littérature:

Dr. *M. Krondl.* O Heavisideove počtu. Elektrotechnický Obzor 22—XXIX, 31. V. 40.

Adresse des Autors:
S. Boegli, El.-Ing., Binzmühlestr. 64, Zürich-Oerlikon.

Die Akkumulatoren-Triebwagen der Kraftwerke Oberhasli A.-G.

Von *P. Gaibrois*, Genf.

621.335.4—835

Es werden die Hauptdaten von zwei Akkumulatorentriebwagen, die auf dem Verbindungsgeleise Meiringen-Innertkirchen und auf der Stollenbahn Handeck-Guttannen verkehren, mitgeteilt und deren elektrische Ausrüstungen beschrieben. Der Aufsatz ist ergänzt durch Angaben der Kraftwerke Oberhasli A.-G. über den Verwendungszweck der beiden Fahrzeuge und die damit gemachten Erfahrungen.

L'article donne les caractéristiques principales des tracteurs à accumulateurs en service sur la ligne de raccordement «Meiringen-Innertkirchen» et dans le tunnel conduisant à la Centrale de Handeck et décrit sommairement leur équipement électrique. Des indications des Forces Motrices de l'Oberhasli sur la destination et les résultats d'exploitation de ces tracteurs complètent cet article.

Zur Erleichterung der Transporte in der Gegend ihrer Kraftwerke Handeck und Innertkirchen haben die Kraftwerke Oberhasli A.-G. zwei Bahnlinien im oberen Aaregebiet errichtet. Eine dieser Bahnlinien mit einer Spurweite von 1 m verbindet die SBB-Station Meiringen mit Innertkirchen, wo ein neues Kraftwerk im Jahre 1943 in Betrieb gesetzt wurde [1]). Die andere Strecke, mit 50 cm Spur, führt vom Dorfe Guttannen an der Grimselstrasse nach dem Kraftwerk Handeck [2]).

A. Verbindungsgeleise Meiringen—Innertkirchen

Diese Strecke wurde in den Jahren 1925...1926 gebaut als Anschlussgeleise der Kraftwerke Oberhasli an die Brüniglinie der Schweiz. Bundesbahnen. Sie ist daher mit der gleichen Spurweite wie diese ausgeführt, d. h. mit Meterspur, und auch das Rollmaterial entspricht vollständig den Normen der Brünigbahn.

Das Tracé (Fig. 1) führt in einer Länge von etwa 5 km vom Bahnhof Meiringen längs der Aare nach dem Güterbahnhof der Kraftwerke Oberhasli A.-G. in Innertkirchen, mit Geleiseanschluss bis in die unterirdische Maschinenanlage Innertkirchen. Etwa 1,8 km der Strecke verlaufen in einem Tunnel längs der Aareschlucht. Die Steigung beträgt im Mittel 8 ‰, im Maximum 20 ‰.

Die Lichtraum-Profile der Tunnel sind so dimensioniert, dass alle Ladungen, welche für den Lichtraum der Normalspurstrecken der Schweiz. Bundesbahnen zulässig sind, mit Hilfe von Rollschemeln, ohne Umlad, auch auf der Strecke Meiringen—Innertkirchen transportiert werden können. Nachdem die Bahn ursprünglich mit Dampf betrieben worden war, wurde sie nach Abschluss der Bauarbeiten des Kraftwerkes Handeck im Jahre 1932 auf elektrischen Akkumulatorenbetrieb umgestellt, wozu sie sich wegen ihrer geringen Länge vorzüglich eignet.

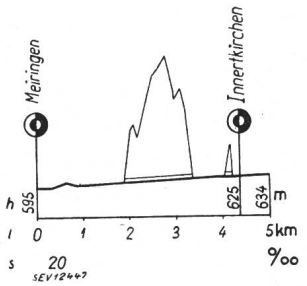

Fig. 1.
Streckenprofil
Meiringen - Innertkirchen
h Stationshöhen in m ü. M.
l Längen in km
s Neigungen in ‰.

Im Jahre 1939 haben die Kraftwerke Oberhasli für diese Strecke, als Ersatz für den bis anhin ver-

[1]) Bull. SEV 1942, Nr. 20, S. 529, und 1943, Nr. 10, S. 276.
[2]) Bull. SEV 1929, Nr. 22, S. 753, und 1933, Nr. 24, S. 639.