

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 36 (1945)  
**Heft:** 9

**Artikel:** Der Einfluss von Dämpfungs- und Phasenverzerrungen auf frequenzmodulierte Wellen  
**Autor:** Güttinger, P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1060214>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SCHWEIZERISCHER ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

# BULLETIN

## REDAKTION:

Sekretariat des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
Zürich 8, Seefeldstrasse 301

## ADMINISTRATION:

Zürich, Stauffacherquai 36 ♦ Telefon 25 17 42  
Postcheck-Konto VIII 8481

Nachdruck von Text oder Figuren ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit Quellenangabe gestattet

XXXVI. Jahrgang

N° 9

Mittwoch, 2. Mai 1945

## Der Einfluss von Dämpfungs- und Phasenverzerrungen auf frequenzmodulierte Wellen

Von P. Güttinger, Baden

621.396.619.13

Die Dämpfungs- und Phasenverzerrungen werden nach einer exakten Methode behandelt, welche vom Frequenzspektrum bei Frequenzmodulation ausgeht. Es wird gezeigt, dass die Dämpfungsstörungen gegenüber denjenigen infolge Phasenverzerrungen normalerweise wesentlich kleiner sind. Ferner liess sich der Beweis erbringen, dass zur rechnerischen Behandlung der Phasenverzerrungen die sogenannte «quasistationäre» Berechnungsmethode in den meisten praktisch vorkommenden Fällen genügt. Bei grossen Phasenverzerrungen muss allerdings die in dieser Arbeit entwickelte genauere Methode verwendet werden.

L'auteur étudie les distorsions dues à l'affaiblissement et au déphasage, à l'aide d'une méthode précise, basée sur le spectre des fréquences résultant de la modulation. Il démontre que les perturbations dues à l'affaiblissement sont normalement beaucoup moins importantes que les distorsions dues au déphasage, et que, dans la plupart des cas pratiques, on peut fort bien appliquer au calcul des distorsions dues au déphasage la méthode dite quasistationnaire. Toutefois, lorsqu'il s'agit de très fortes distorsions, il est nécessaire de recourir à la méthode plus précise préconisée par l'auteur.

### Einleitung

Die Entwicklung der theoretischen Grundlagen für die Behandlung frequenzmodulierter Vorgänge ist eng verbunden mit bekannten Namen, z. B. Armstrong, Carson, Crosby, Fry, Murray, Roder u. a.<sup>1)</sup>. Zum Teil auf diese grundlegenden Arbeiten aufbauend hat sich eine Reihe von Autoren mit den Störverhältnissen bei Frequenzmodulation befasst. Es sei hier erinnert an die Untersuchungen von Fränz, Hölzler, Kulp, Plump, Vellat u. a.<sup>1)</sup>. Im Zusammenhang mit den folgenden Ausführungen sind vor allem wichtig die Arbeiten von Hölzler (I) und Kulp (II).

Wie bekannt, ergibt die spektrale Auflösung (Frequenzspektrum) einer frequenz- oder phasenmodulierten Welle nicht nur Träger und einfache Seitenbänder wie bei Amplitudenmodulation, sondern ein theoretisch unendlich breites Spektrum von Seitenbandkomponenten. Praktisch allerdings ist das Frequenzband begrenzt, da ausserhalb dieses ziemlich scharf definierten Bandes die Komponenten sehr rasch abnehmen. Es ist klar, dass im Empfänger (nach Demodulation) Verzerrungen auftreten, wenn die einzelnen Komponenten in bezug auf Amplitude und Phase nicht gleich übertragen werden. Grösse und Art dieser Verzerrungen zu bestimmen, war das Ziel der erwähnten Arbeiten von Hölzler und Kulp. Hölzler hat in seinen Rechnungen über Phasenverzerrungen die stationäre Methode verwendet, welche er durch Messungen mit einer zweifellos sehr sauberen Versuchsanordnung legitimiert hat. Die stationäre Berechnungsmethode besteht darin, dass man

mit der Momentanfrequenz (zeitliche Ableitung der Phase) operiert. Diese Methode ist zwar nur eine Näherung, gibt aber praktisch die richtige Grössenordnung.

Die Grundlagen für eine exakte Behandlung (spektrale Methode) sind z. B. in den sehr eingehenden Studien von Kulp (II) gelegt worden. Hier werden die einzelnen Komponenten separat in ihren Veränderungen betrachtet und das demodulierte Bild des veränderten (linear verzerrten) Frequenzspektrums untersucht. Kulp<sup>2)</sup> gibt eine originelle Methode zur Berechnung der einzelnen Störfaktoren. Zweifellos lässt sich damit in vielen Fällen das genaue Resultat berechnen. Für andere Aufgaben hingegen erfordert diese Methode viel zu grossen Aufwand; es ist dann wohl möglich, mit umfangreicher Rechenarbeit bestimmte numerisch vorgegebene Fälle zu berechnen. Besonders der Einfluss der Phasenverzerrungen scheint einer mathematischen Behandlung unüberwindliche Schwierigkeiten zu bereiten. Kulp selbst schreibt in der erwähnten Arbeit:

«Es zeigte sich, dass selbst in dem vereinfachten Fall  $f(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2$  [Anmerkung:  $f(n)$  bedeutet hier das Phasenmass] keine Klirrfaktorberechnung durchführbar ist, ...»

Der Zweck unserer Arbeit soll es sein, ebenfalls mit Hilfe der exakten Methode (spektrale Zerlegung), aber auf einem ganz anderen Wege, zum Ziele zu gelangen. Es sollte dabei nicht nur der Einfluss der Phasenverzerrung untersucht werden, sondern allgemein die Störungen infolge linearer Verzerrungen, auch der Dämpfungsverzerrungen.

<sup>1)</sup> Siehe Literaturverzeichnis am Schluss.

<sup>2)</sup> Vgl. ENT Juni 1942, S. 98, Gl. (17) bis Gl. (20).

### A. Einfluss der Dämpfungsverzerrungen

In der Literatur findet man hin und wieder die Auffassung vertreten, dass die Dämpfungsverzerrungen lediglich eine Amplitudenmodulation verursachen, hingegen keine störende Frequenzmodulation. Dies ist nur in gewissen Fällen richtig und auch da nur unter bestimmten Voraussetzungen (z. B. genaue Resonanz- oder Symmetrielage des Trägers). Es kann allerdings gesagt werden, dass die «Dämpfungsstörungen» in der Regel um etwa eine Grössenordnung kleiner sind als die «Phasenstörungen». Immerhin ist es wichtig, einmal die Grösse dieser Störungen rechnerisch festzustellen.

Für die meisten Bandfilteranordnungen kann die Dämpfungskurve im Durchlassbereich mit ausreichender Genauigkeit durch ein Polynom 5. Grades:

$$G(\Omega) = G_0 + G_1\Omega + G_2\Omega^2 + G_3\Omega^3 + G_4\Omega^4 + G_5\Omega^5 \quad (1)$$

dargestellt werden. Damit kann im allgemeinsten Falle eine unsymmetrische Dämpfungskurve nach Fig. 1 wiedergegeben werden.  $\Omega$  stellt dabei die Fre-

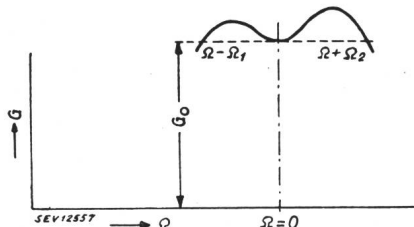


Fig. 1.  
Dämpfungskurve

quenzabweichung vom Arbeitspunkt (Trägerlage)  $\Omega = 0$  dar. Wir wollen nun der Einfachheit halber annehmen, die unverzerrte frequenzmodulierte Welle

$$y_e = \sin(\Omega_0 t + m \sin \omega t) \quad (2)$$

sei mit einem einzigen Sinus-Ton von der Frequenz  $\frac{\omega}{2\pi}$  moduliert. Am Eingang des ersten Bandfilters haben wir dann ein Frequenzspektrum von der Form:

$$y_e = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} J_\mu(m) \cdot \sin\{\Omega_0 t + \mu \omega t\} \quad (3)$$

Wenn wir zunächst die Phasenverzerrungen gleich Null setzen, haben wir am Ausgang des Filters folgendes Spektrum:

$$\left. \begin{aligned} y_a &= G_0 \sum_{\mu} J_\mu(m) \cdot \sin\{\Omega_0 t + \mu \omega t\} \\ &+ G_1 \sum_{\mu} (\mu \omega) J_\mu(m) \cdot \sin\{\Omega_0 t + \mu \omega t\} \\ &+ G_2 \sum_{\mu} (\mu \omega)^2 J_\mu(m) \cdot \sin\{\Omega_0 t + \mu \omega t\} \\ &+ G_3 \sum_{\mu} (\mu \omega)^3 J_\mu(m) \cdot \sin\{\Omega_0 t + \mu \omega t\} \\ &+ G_4 \sum_{\mu} (\mu \omega)^4 J_\mu(m) \cdot \sin\{\Omega_0 t + \mu \omega t\} \\ &+ G_5 \sum_{\mu} (\mu \omega)^5 J_\mu(m) \cdot \sin\{\Omega_0 t + \mu \omega t\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Es ist nämlich  $\Omega = \mu \omega$  zu setzen; ferner können wir  $G_0$  zu 1 normieren, so dass die Grössen  $G_K$  die relativen Verzerrungskoeffizienten bedeuten. Sum-

men, wie sie unter Gl. (4) auftreten, lassen sich exakt in geschlossener Form darstellen, wobei wir folgende Beziehungen für die Besselfunktionen  $J_\mu(m)$  benützen:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \mu \cdot J_\mu(m) \cdot e^{i\mu\omega t} = m \cdot \cos \omega t \cdot e^{im \sin \omega t} \quad (5)$$

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \mu^2 \cdot J_\mu(m) \cdot e^{i\mu\omega t} = \left\{ \frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} \cos 2\omega t + im \sin \omega t \right\} e^{im \sin \omega t} \quad (6)$$

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \mu^3 \cdot J_\mu(m) \cdot e^{i\mu\omega t} = \left\{ \left( m + \frac{3m^3}{4} \right) \cos \omega t + \frac{3im^2}{2} \sin 2\omega t + \frac{m^3}{4} \cos 3\omega t \right\} e^{im \sin \omega t} \quad (7)$$

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \mu^4 \cdot J_\mu(m) \cdot e^{i\mu\omega t} = \left\{ \frac{m}{2} \left( m + \frac{3m^3}{4} \right) + i \left( m + \frac{3m^3}{2} \right) \sin \omega t + \frac{m^2}{2} (7+m^2) \cos 2\omega t + \frac{3im^3}{2} \sin 3\omega t + \frac{m^4}{8} \cos 4\omega t \right\} e^{im \sin \omega t} \quad (8)$$

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \mu^5 \cdot J_\mu(m) \cdot e^{i\mu\omega t} = \left\{ \left( m + \frac{15m^3}{4} + \frac{5m^5}{8} \right) \cdot \cos \omega t + i \left( \frac{15m^2}{2} + \frac{5m^4}{2} \right) \sin 2\omega t + \left( \frac{25m^3}{4} + \frac{5m^5}{16} \right) \cos 3\omega t + i \cdot \frac{5m^4}{4} \sin 4\omega t + \frac{m^5}{16} \cos 5\omega t \right\} e^{im \sin \omega t} \quad (9)$$

Wenn wir diese Beziehungen (5) bis (9) zum Aufsummieren von Gl. (4) verwenden, erhalten wir schliesslich:

$$y_a = A \cdot \sin(\Omega_0 t + m \sin \omega t) + B \cdot \cos(\Omega_0 t + m \sin \omega t) \quad (10)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= 1 + \left\{ G_2 \cdot \frac{\omega^2 m^2}{2} + G_4 \cdot \frac{\omega^4 m}{2} \left( m + \frac{3m^3}{4} \right) \right\} + \\ &+ \left\{ G_1 \cdot \omega m + G_3 \omega^3 \left( m + \frac{3m^3}{4} \right) + G_5 \omega^5 \left( m + \frac{15m^3}{4} + \frac{5m^5}{8} \right) \right\} \cos \omega t + \\ &+ \left\{ G_2 \omega^2 \frac{m^2}{2} + G_4 \omega^4 \cdot \frac{m^2}{2} (7+m^2) \right\} \cos 2\omega t + \\ &+ \left\{ G_3 \omega^3 \frac{m^3}{4} + G_5 \omega^5 \left( \frac{25m^3}{4} + \frac{5m^5}{16} \right) \right\} \cos 3\omega t + \\ &+ G_4 \omega^4 \frac{m^4}{8} \cos 4\omega t + \\ &+ G_5 \omega^5 \frac{m^5}{16} \cos 5\omega t \end{aligned} \quad (11)$$

und

$$B = \left\{ G_2 \omega^2 m + G_4 \cdot \omega^4 \left( m + \frac{3m^3}{2} \right) \right\} \sin \omega t + \\ + \left\{ G_3 \omega^3 \frac{3m^2}{2} + G_5 \omega^5 \left( \frac{15m^2}{2} + \frac{5m^4}{2} \right) \right\} \sin 2\omega t + \\ + G_4 \omega^4 \cdot \frac{3m^3}{2} \sin 3\omega t + \\ + G_5 \omega^5 \cdot \frac{5m^4}{4} \sin 4\omega t \quad (12)$$

Wir können Gl. (10) auch in folgender Form schreiben:

$$y_a = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(\Omega_0 t + m \sin \omega t + \Phi) \quad (13)$$

$$\text{wo} \quad \text{tg } \Phi = \frac{B}{A} \quad (14)$$

Da normalerweise die Dämpfungsverzerrungen klein gehalten werden können, ist  $\Phi$  und  $B$  klein und  $A \sim 1$ ; sodass

$$\Phi \sim B \quad (15)$$

gesetzt werden kann. Das in der Phase enthaltene Störglied wird im wesentlichen

$$\Phi_{st} = \left\{ G_3 \omega^3 \cdot \frac{3m^2}{2} + G_5 \omega^5 \left( \frac{15m^2}{2} + \frac{5m^4}{2} \right) \right\} \sin 2\omega t + \\ + G_4 \cdot \omega^4 \cdot \frac{3m^3}{2} \sin 3\omega t + \\ + G_5 \cdot \omega^5 \cdot \frac{5m^4}{4} \sin 4\omega t \quad (16)$$

Die Klirrfaktoren werden somit:

a) bei Phasenmodulation

$$k_2 = G_3 \omega^3 \frac{3m}{2} + G_5 \omega^5 \left( \frac{15m}{2} + \frac{5m^3}{2} \right) \\ k_3 = G_4 \omega^4 \frac{3m^2}{2} \\ k_4 = G_5 \omega^5 \frac{5m^3}{4} \quad (17)$$

b) bei Frequenzmodulation

$$\bar{k}_2 = 2 k_2 \\ \bar{k}_3 = 3 k_3 \\ \bar{k}_4 = 4 k_4 \quad (18)$$

Auf Grund dieser Resultate können wir folgende interessante Feststellungen machen:

Das lineare und quadratische Glied in der Dämpfungskurve  $G(\Omega)$  nach Gl. (1) hat praktisch keinen Anteil an den Dämpfungsstörungen. Diese Tatsache ist von Wichtigkeit, wenn das Filter ein einfacher Resonanzkreis ist, weil dort die Dämpfungskurve im wesentlichen nur das quadratische Glied enthält. Man kann also sagen, dass die Dämpfungsverzerrungen am einfachen Resonanzkreis praktisch keine störende Phasen- oder Frequenzmodulation erzeugen. Wir wollen nun die Störungsverhältnisse be-

trachten unter Annahme eines Dämpfungsverlaufes nach Fig. 1.

Als Beispiel nehmen wir eine Kurve, welche bezüglich der Geraden  $\Omega = 0$  symmetrisch ist (Fig. 2).

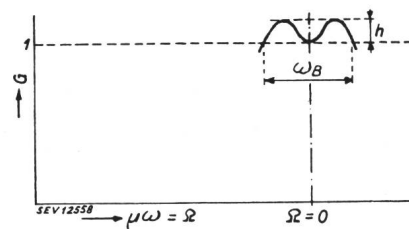


Fig. 2.

Eine derartige Kurve ist gegeben durch:

$$G = 1 + 16h \cdot \frac{\Omega^2}{\omega_B^2} - 64h \cdot \frac{\Omega^4}{\omega_B^4} \quad (19)$$

Bei symmetrischer Lage des Trägers ( $\Omega = 0$ ) ist demnach:

$$G_2 = \frac{16h}{\omega_B^2} \\ G_3 = 0 \\ G_4 = -\frac{64h}{\omega_B^4} \\ G_5 = 0$$

Damit erhält man für (17) bei Frequenzmodulation

$$\bar{k}_2 = 0 \\ \bar{k}_3 = 288h \cdot m^2 \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_B} \right)^4 \\ \bar{k}_4 = 0.$$

Als Zahlenbeispiel nehmen wir folgendes:

$$h = 0,05 \text{ (5 \%)}$$

$$\omega = \omega_g \text{ (Grenzfrequenz), Frequenzhub } f_h = \frac{5 \omega_g}{2\pi}$$

$$\text{Bandbreite } \omega_B = 2 \cdot 8 \cdot \omega = 16 \omega$$

$$\text{Damit ist } m = 5 \text{ und } k_3 = 0,0055 \text{ (5,5 \%)}.$$

Diese 3. Störharmonische fällt aber ausserhalb des Hörbereiches. Wenn wir im Empfänger die demodulierte Spannung ein Tiefpassfilter für den Bereich  $0 \dots \omega_g$  durchlaufen lassen, hören wir nur dann den Störton, wenn  $\omega < \frac{\omega_g}{3}$ ;  $\bar{k}_3$  wird in diesem Falle maximal ( $m = 15$ ):

$$\bar{k}_3 = 288 \cdot 0,05 \cdot 225 \cdot \left( \frac{1}{48} \right)^4 = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ (0,6 \%)}.$$

Als weiteres Beispiel wollen wir annehmen, dass der Träger nicht auf den Symmetriepunkt eingestellt sei, sondern um 10 % der Gesamtbandbreite  $\omega_B$  verschoben ist. Wir können dann Gl. (19) verwenden, wenn wir  $\Omega$  durch  $\Omega - 0,1 \omega_B$  ersetzen. Man findet in diesem Falle:

$$G = 1 + 0,1536 \cdot h - 2,944 \cdot h \cdot \frac{\Omega}{\omega_B} + 12,16 \cdot h \cdot \frac{\Omega^2}{\omega_B^2} + \\ + 25,6 \cdot h \cdot \frac{\Omega^3}{\omega_B^3} - 64 \cdot h \cdot \frac{\Omega^4}{\omega_B^4} \quad (20)$$

Wir erhalten also:

$$G_3 = 25,6 \cdot h \cdot \frac{1}{\omega_B^3}$$

$$G_4 = -64 \cdot h \cdot \frac{1}{\omega_B^4}$$

und:

$$\bar{k}_2 = 76,8 \cdot h \cdot m \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_B}\right)^3$$

$$\bar{k}_3 = 288 \cdot h \cdot m^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_B}\right)^4$$

Für  $\omega = \omega_g = \frac{\omega_B}{16}$  und  $m = 5$  mit  $h = 0,05$  findet man:

$$\bar{k}_2 = 0,0047 \text{ und } \bar{k}_3 = 0,0055$$

Für  $\omega = \frac{\omega_g}{3} = \frac{\omega_B}{48}$ ;  $m = 15$  und  $h = 0,05$  entsprechend:

$$\bar{k}_2 = 0,0005 \text{ und } \bar{k}_3 = 0,0006$$

Trotz dieser verhältnismässig kleinen Verstimmung von nur  $1/10$  der Bandbreite ist der totale Klirrfaktor ziemlich grösser geworden. Ebenso erhält man wesentlich höhere Klirrfaktorwerte, wenn die Dämpfungskurve bezüglich der Achse  $\Omega = 0$  (Fig. 2) nicht mehr symmetrisch ist.

Immerhin kann man diesen Zahlenbeispielen entnehmen, dass die Störfaktoren infolge Dämpfungsverzerrungen verhältnismässig klein bleiben, jedenfalls viel kleiner als diejenigen, welche durch Phasenverzerrungen entstehen.

### B. Einfluss der Phasenverzerrungen

So wie man jedem Filter eine Dämpfungskurve zuordnen kann, so lässt sich auch das Phasenmass als Funktion einer «stationären» Frequenz  $\Omega$  darstellen (Fig. 3).

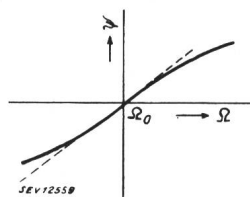


Fig. 3.  
Phasenmass  $\psi$ , Durchlassbereich.

Für feste Frequenzen ist die Anwendung einer solchen Kurve klar, auch bei langsam veränderlichen Frequenzen. Anders liegen die Verhältnisse hingegen, wenn die Frequenz sich sehr rasch ändert, was z. B. bei der Frequenzmodulation der Fall ist. Nun lässt sich bei einer frequenzmodulierten Spannung

$$y_e = \sin \int \Omega dt \quad (21)$$

in jedem Zeitpunkt durch Differenzieren der Phase die *Momentanfrequenz*  $\Omega(t)$  eindeutig definieren. Es liegt nahe, die vom Filter erzeugte Phasenverschiebung  $\psi$  direkt als Funktion der zeitlich veränderlichen Frequenz  $\Omega(t)$  anzusetzen. Wir erhalten dann am Ausgang des Filters eine Spannung (oder Strom) von der Form:

$$y_a = \sin \left\{ \int \Omega dt + \psi[\Omega(t)] \right\} \quad (22)$$

Dieses «quasistationäre» Verfahren ist sehr einfach und führt in den meisten praktisch vorkommenden Fällen zur richtigen Grössenordnung. Es muss aber betont werden, dass es sich dabei nur um eine Näherung handelt. Das Phasenmass  $\psi$  lässt sich grundsätzlich als eindeutige Funktion der «Frequenz»  $\Omega$  nur definieren, wenn es sich um zeitlich konstante Frequenzen handelt. Das prinzipiell richtige Verfahren bei Frequenzmodulation besteht daher darin, dass man die frequenzmodulierte Welle zunächst spektral in die einzelnen Seitenbänder zerlegt. Diese Seitenbänder ändern sich nämlich nicht schneller als die *Dynamik* des Tonbildes resp. der Modulationsspannung. Man kann daher diese einzelnen Seitenbänder unbedenklich nach der «stationären» Methode behandeln.

Wir wollen annehmen, die Modulationsspannung könne dargestellt werden durch

$$M = \sum_{v=1}^n a_v \cdot \cos(\omega_v t + \varphi_v) \quad (23)$$

Die damit frequenzmodulierte Hochfrequenzspannung ist dann gegeben mit:

$$y_e = \sin \left\{ \Omega_0 t + k \sum_{v=1}^n \frac{a_v}{\omega_v} \cdot \sin(\omega_v t + \varphi_v) \right\} \quad (24)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$k \cdot \frac{a_v}{\omega_v} = m_v \quad (25)$$

Dann lässt sich die unverzerrte Hochfrequenzspannung in ein Frequenzspektrum nach der Formel:

$$y_e = \sum_{\mu_1}^{+\infty} \sum_{\mu_2}^{-\infty} \dots \sum_{\mu_n} J_{\mu_1}(m_1) \cdot J_{\mu_2}(m_2) \dots J_{\mu_n}(m_n) \sin \xi_\mu \quad (26)$$

zerlegen, wobei wir unter dem Symbol  $\xi_\mu$  die Summe

$$\xi_\mu = [\Omega_0 + \mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2 + \dots + \mu_n \omega_n] t + [\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \dots + \mu_n \varphi_n] \quad (27)$$

verstehen. Beim Durchlaufen eines Filters geht nun die Grösse  $\xi_\mu$  über in

$$\xi_\mu + \psi = [\Omega_0 + \mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2 + \dots + \mu_n \omega_n] t + [\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \dots + \mu_n \varphi_n] + \psi(\Delta + \mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2 + \dots + \mu_n \omega_n) \quad (28)$$

wobei  $\psi$  die Phasenmasskurve gemäss Fig. 3 ist. Wenn der Träger in die Bandmitte  $\Omega = \Omega_0$  fällt, ist die Verstimmung  $\Delta = 0$ . Es ist klar, dass durch die ungleichmässigen Phasenverschiebungen  $\psi$  Verzerrungen entstehen. Wir wollen im folgenden die Rechnung weiterführen unter der Annahme, dass die Modulation nur in einem einzigen Ton von der

Frequenz  $\frac{\omega}{2\pi}$  besteht. Wir haben dann am Ausgang

des Bandfilters eine Spannung von der Form:

$$y_a = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} J_{\mu}(m) \sin \{\Omega_0 t + \mu \omega t + \psi(\mu \omega)\} \quad (29')$$

$$y_a = A \cdot \sin \{\Omega_0 t + \Phi\} \quad (29'')$$

Uns interessiert nur die Phasenmodulation  $\Phi$ , welche gegeben ist durch

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{\sum_{\mu} J_{\mu}(m) \sin \{\mu \omega t + \psi(\mu \omega)\}}{\sum_{\mu} J_{\mu}(m) \cos \{\mu \omega t + \psi(\mu \omega)\}} \quad (30)$$

Für  $\psi = 0$  wird  $\Phi = m \cdot \sin \omega t$  und  $A = 1$ , wie es ja auch sein muss.

Interessant ist der Spezialfall, wenn  $\psi$  eine lineare Funktion ist:

$$\psi = T_0 \cdot \mu \omega \quad (31)$$

Wie man leicht nachrechnen kann, findet man dann

$$\Phi = m \cdot \sin \omega \tau \quad \text{mit} \quad \tau = t + T_0 \quad (32)$$

Man muss sich aber klar sein, dass  $T_0$  nicht die hochfrequente Laufzeit ist, sondern eine «Modulationsverzögerung».

Wir wollen auch noch den Fall betrachten, wo  $\psi$  ein konstantes Glied enthält:

$$\psi = \psi_0 + T_0 \mu \omega \quad (33)$$

Dabei greifen wir auf Formel (29') zurück und erhalten für (29'')

$$y_a = A \sin \{\Omega_0 t + \psi_0 + m \sin \omega(t + T_0)\} \quad (34)$$

Man kann dafür auch schreiben:

$$y_a = A \sin \{\Omega_0(t + t') + m \sin \omega(t + t' + T_1)\} \quad (35)$$

wenn wir

$$\psi_0 = \Omega_0 t' \quad \text{d. h.} \quad t' = \frac{\psi_0}{\Omega_0} \quad (36)$$

und

$$T_1 = T_0 - t' \quad (37)$$

setzen.

Wir haben also eine Laufzeit  $t'$  für alle Komponenten (und Träger), sowie eine Modulationsverzögerung, welche durch  $T_1$  gegeben ist. Da  $\Omega_0$  gegen  $\omega$  sehr gross ist, wird  $t'$  in der Regel viel kleiner sein als  $T_0$ .

Dem Vorstehenden ist zu entnehmen, dass eine lineare Funktion  $\psi$  zu keinen nichtlinearen Verzerrungen am Ausgang des Empfängers Anlass gibt. Solche treten erst auf, wenn  $\psi$  noch Glieder höheren Grades enthält. Um in diesem Falle die Verzerrungen zu berechnen, gehen wir von Gl. (30) aus. Die Entwicklung von  $\Phi$  als Arcus-Tangens eines ziemlich komplizierten Quotienten scheint eine aussichtslose Sache zu sein. Einfacher ist es, die Frequenzmodulation  $\frac{d\Phi}{dt}$  zu berechnen.

Eine elementare goniometrische Umrechnung führt zu:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega \cdot \quad (38)$$

$$\frac{\sum_{\lambda} \sum_{\mu} \mu \cdot J_{\mu}(m) \cdot J_{\mu-\lambda}(m) \cos \{\lambda \omega \tau + \psi(\mu \omega) - \psi([\mu-\lambda]\omega)\}}{\sum_{\lambda'} \sum_{\mu'} J_{\mu'}'(m) \cdot J_{\mu'-\lambda'}'(m) \cos \{\lambda' \omega \tau + \psi(\mu' \omega) - \psi([\mu'-\lambda']\omega)\}}$$

Vorgängig dieser Umrechnung wurde das lineare Glied in  $\psi$  abgetrennt, so dass  $\psi$  gegeben ist durch

$$\psi = a_2(\mu \omega)^2 + a_3(\mu \omega)^3 + \dots \quad (39)$$

Wir gehen nun so vor, dass wir für  $\frac{d\Phi}{dt}$  den Ansatz:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_k (A_k + B_k) e^{ik\omega\tau} \quad (40)$$

machen. Der Grund der Aufteilung in zwei Bestandteile  $A_k$  und  $B_k$  wird später ersichtlich. Durch Gleichsetzung von (38) und (40) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \omega \cdot \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \mu \cdot J_{\mu}(m) \cdot J_{\mu-\lambda}(m) \cdot \cos \{\lambda \omega \tau + \\ + \psi(\mu \omega) - \psi([\mu-\lambda]\omega)\} = \\ = \sum_k (A_k + B_k) e^{ik\omega\tau} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} J_{\mu}'(m) \cdot J_{\mu-\lambda}'(m) \cos \cdot \\ \cdot \{\lambda' \omega \tau + \psi(\mu' \omega) - \psi([\mu'-\lambda']\omega)\} \end{aligned} \quad (41)$$

Nach Durchführung verschiedener Substitutionen und Umformungen, welche in ihren Details an dieser Stelle übersprungen werden sollen, gelangt man schliesslich zu folgender Darstellung:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} (\mu + \lambda) J_{\mu}(m) \cdot J_{\mu+\lambda}(m) \cdot \\ \cdot e^{i\lambda\omega\tau - i\psi(\mu\omega) + i\psi([\mu+\lambda]\omega)} + \\ + \frac{\omega}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} (\mu - \lambda) J_{\mu}(m) \cdot J_{\mu-\lambda}(m) \cdot \\ \cdot e^{i\lambda\omega\tau + i\psi(\mu\omega) - i\psi([\mu-\lambda]\omega)} = \\ = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_k A_k \cdot J_{\mu}(m) \cdot J_{\mu-\lambda+k}(m) \cdot \\ \cdot e^{i\lambda\omega\tau + i\psi(\mu\omega) - i\psi([\mu-\lambda+k]\omega)} + \\ + \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_k B_k \cdot J_{\mu}(m) \cdot J_{\mu+\lambda-k}(m) \cdot \\ \cdot e^{i\lambda\omega\tau - i\psi(\mu\omega) + i\psi([\mu+\lambda-k]\omega)} \end{aligned} \quad (42)$$

Hierzu ist zu bemerken, dass diese Gl. (42) identisch für jeden einzelnen Wert von  $\lambda$  erfüllt sein muss. Wir spalten nun Gl. (42) in zwei Teile auf:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2} \sum_{\mu} (\mu - \lambda) J_{\mu}(m) \cdot J_{\mu-\lambda}(m) \cdot e^{i\psi(\mu\omega) - i\psi([\mu-\lambda]\omega)} = \\ = \sum_k A_k \sum_{\mu} J_{\mu}(m) \cdot J_{\mu-\lambda+k}(m) \cdot e^{i\psi(\mu\omega) - i\psi([\mu-\lambda+k]\omega)} \end{aligned} \quad (43)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2} \sum_{\mu} (\mu + \lambda) J_{\mu}(m) \cdot J_{\mu+\lambda}(m) \cdot e^{-i\psi(\mu\omega) + i\psi([\mu+\lambda]\omega)} = \\ = \sum_k B_k \sum_{\mu} J_{\mu}(m) \cdot J_{\mu+\lambda-k}(m) \cdot e^{-i\psi(\mu\omega) + i\psi([\mu+\lambda-k]\omega)} \end{aligned} \quad (44)$$

Die Summationen über  $\mu$  lassen sich für jedes  $\lambda$  resp.  $\lambda-k$  ausführen, wobei man feststellen kann,



dass für grössere  $\lambda$  diese Summen praktisch verschwinden. Wir erhalten dadurch ein rein algebraisches Gleichungssystem mit praktisch nur endlich vielen Gleichungen und nur endlich vielen Unbekannten  $A_k$  und  $B_k$ , die wesentlich von Null verschieden sind.

Diese Gl. (43) und (44) gestatten also für eine beliebige Phasenkurve  $\psi$  die genauen Werte von  $A_k$  und  $B_k$  zu berechnen. Die rechnerische Arbeit ist aber ziemlich zeitraubend und gestattet nur, Resultate für zahlenmässig feste Werte von  $m$  und  $\omega$  zu erhalten.

Wir wollen nun einen Weg zeigen, wie man zu allgemeinen Resultaten gelangt. Man kann nämlich feststellen, dass die Gl. (43) und Gl. (44) erfüllt sind, wenn

für jedes  $\gamma = \mu - \lambda$  (45)

$$\frac{\omega}{2} \cdot \gamma \cdot J_\gamma(m) e^{-i\psi(\gamma\omega)} = \sum_k A_k \cdot J_{\gamma+k}(m) \cdot e^{-i\psi([\gamma+k]\omega)}$$

für jedes  $\gamma = \mu + \lambda$  (46)

$$\frac{\omega}{2} \cdot \gamma \cdot J_\gamma(m) e^{+i\psi(\gamma\omega)} = \sum_k B_k \cdot J_{\gamma-k}(m) \cdot e^{+i\psi([\gamma-k]\omega)}$$

Wir haben damit zwei Gleichungssysteme gefunden, welche wesentlich einfacher sind. Wichtiger ist jedoch die Tatsache, dass man einen Ausdruck von der Form

$$\frac{\omega}{2} \cdot \gamma \cdot J_\gamma(m) e^{-i\psi(\gamma\omega)}$$

verhältnismässig leicht in eine Reihe

$$\sum_k A_k \cdot J_{\gamma+k}(m) e^{-i\psi([\gamma+k]\omega)}$$

entwickeln kann. Wenn wir nämlich folgende Beziehung für Besselfunktionen verwenden:

$$\gamma \cdot J_\gamma(m) = \frac{m}{2} \left\{ J_{\gamma-1}(m) + J_{\gamma+1}(m) \right\} \quad (47)$$

können wir Gl. (45) in der Form:

$$\begin{aligned} \frac{m\omega}{4} J_{\gamma-1}(m) e^{-i\psi(\gamma\omega)} + \frac{m\omega}{4} J_{\gamma+1}(m) e^{-i\psi(\gamma\omega)} = \\ = \sum_k A_k \cdot J_{\gamma+k}(m) e^{-i\psi([\gamma+k]\omega)} \end{aligned} \quad (48)$$

anschreiben. Nun haben wir die linke Seite von (48) «beinahe» in der gewünschten Form, nur dass

statt  $e^{-i\psi([\gamma-1]\omega)}$  der Ausdruck  $e^{-i\psi(\gamma\omega)}$

und

statt  $e^{-i\psi([\gamma+1]\omega)}$  auch  $e^{-i\psi(\gamma\omega)}$  steht.

Die linke Seite von (48) werden wir daher folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{m\omega}{4} J_{\gamma-1}(m) e^{-i\psi([\gamma-1]\omega)} \cdot e^{-i\psi(\gamma\omega) + i\psi([\gamma-1]\omega)} + \\ + \frac{m\omega}{4} J_{\gamma+1}(m) e^{-i\psi([\gamma+1]\omega)} \cdot e^{-i\psi(\gamma\omega) + i\psi([\gamma+1]\omega)} \end{aligned}$$

Da  $\psi(\gamma\omega) - \psi([\gamma-1]\omega) \ll 1$  ist, können wir in folgende Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned} \frac{m\omega}{4} J_{\gamma-1}(m) e^{-i\psi([\gamma-1]\omega)} \left\{ 1 - i[\psi(\gamma\omega) - \right. \\ \left. - \psi([\gamma-1]\omega)] - \frac{1}{2} [\dots]^2 - \dots \right\} + \\ + \frac{m\omega}{4} J_{\gamma+1}(m) e^{-i\psi([\gamma+1]\omega)} \left\{ 1 - i[\psi(\gamma\omega) - \right. \\ \left. - \psi([\gamma+1]\omega)] - \frac{1}{2} [\dots]^2 - \dots \right\} \end{aligned}$$

Die Taylorreihen in den geschweiften Klammern können in Potenzreihen nach  $\gamma$  umgeformt werden. Wenn wir wieder die Beziehung (47) verwenden und unsere Entwicklungsmethode in analoger Weise weiterführen, wächst die gesuchte Reihe

$$\sum_k A_k \cdot J_{\gamma+k}(m) e^{-i\psi([\gamma+k]\omega)}$$

allmählich heraus. Dieses Verfahren hat den grossen Vorteil, dass man die Grössen  $A_k$  und  $B_k$  direkt als Funktionen von  $m$  und  $\omega$  erhält, womit man sich eine umständliche Zahlenrechnung ersparen kann.

Wir wollen mit unserer Betrachtung wieder zu den wichtigen Formeln (45) und (46) zurückkehren.

Zwischen den Grössen  $A_k$  und  $B_k$  bestehen gewisse Beziehungen. Wenn wir z. B. die konjugiert-komplexe Form von Gl. (45) nehmen und  $k$  durch  $-k$  ersetzen, finden wir zunächst, dass allgemein:

$$B_k = A_{-k}^*$$

d. h. auch

$$A_k = B_{-k}^*$$

$$A_{-k} = B_k^*$$

$$A_k^* = B_{-k}$$

ist.

Wenn  $\psi$  speziell eine symmetrische Funktion ist, d. h. darstellbar durch

$$\psi = a_3(\mu\omega)^3 + a_5(\mu\omega)^5 + \dots \quad (49)$$

sind noch weitere Bedingungen erfüllt:

$$A_{-k} = (-1)^{k+1} A_k^*$$

$$B_{-k} = (-1)^{k+1} B_k^*$$

$$A_k = (-1)^{k+1} B_k$$

$$A_k^* = (-1)^{k+1} B_k^*$$

Also in dem Falle, wo  $\psi$  eine ungerade (symmetrische) Funktion ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = \sum_k [1 + (-1)^{k+1}] A_k e^{ik\omega\tau} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} [1 + (-1)^{k+1}] [(A_k + A_{-k}) \cos k\omega\tau + \\ + i(A_k - A_{-k}) \sin k\omega\tau] \end{aligned} \quad (50)$$

Die Störtöne gerader Ordnung verschwinden dann, da für diese

$$[1 + (-1)^{k+1}] = 0$$

Dies gilt aber nur, wenn die Phasenkurve (Fig. 3) bezüglich der Lage des Trägers symmetrisch ist.

In diesem Falle kann  $\psi$  in genügender Näherung durch eine Parabel 3. Grades dargestellt werden.

Wenn wir:

$$\psi = a_3 (\mu\omega)^3 \quad (51)$$

setzen und die beschriebene Entwicklungsmethode anwenden, gelangen wir zu folgendem Ergebnis [vgl. Formel (29'')]:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \omega m \cdot \cos \omega\tau - \\ &- \omega m (a_3 \omega^3) \left\{ 1 + \frac{3}{4} m^2 \right\} \sin \omega\tau - \\ &- \omega m (a_3 \omega^3) \cdot \frac{3 m^2}{4} \cdot \sin 3 \omega\tau - \\ &- \omega m (a_3 \omega^3)^2 \left\{ \frac{1}{2} + 3 m^2 + \frac{9}{16} m^4 \right\} \cos \omega\tau - \\ &- \omega m (a_3 \omega^3)^2 \left\{ \frac{63}{2} m^2 + \frac{81}{32} m^4 \right\} \cos 3 \omega\tau - \\ &- \omega m (a_3 \omega^3)^2 \frac{45}{32} m^4 \cdot \cos 5 \omega\tau \end{aligned} \quad (52)$$

Die höheren Potenzen von  $a_3$  sind hier vernachlässigt. Die analoge Formel für *Phasenmodulation* erhält man durch zeitliche Integration von  $\frac{d\Phi}{dt}$ , d. h.

durch eine sehr einfache Rechnung. Es mag interessant sein, dieses Ergebnis demjenigen gegenüberzustellen, welches die «quasistationäre» Methode ergibt. Diese liefert nämlich folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \omega m \cdot \cos \omega\tau - \\ &- \omega m (a_3 \omega^3) \cdot \frac{3 m^2}{4} \cdot \sin \omega\tau - \\ &- \omega m (a_3 \omega^3) \cdot \frac{3 m^2}{4} \cdot \sin 3 \omega\tau \end{aligned} \quad (53)$$

Um ein Bild von der Grösse der Abweichung zwischen (52) und (53) zu erhalten, wollen wir ein konkretes Beispiel betrachten.

*Beispiel.* Zunächst müssen wir Annahmen treffen über die Grösse der Koeffizienten in

$$\psi = a_2 (\mu\omega)^2 + a_3 (\mu\omega)^3 + \dots \quad (39)$$

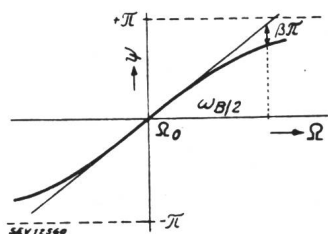


Fig. 4.  
Phasenkurve für ein Bandfilter.

In Fig. 4 ist die Kurve für das Phasenmass eines Bandfilters dargestellt, wobei  $\frac{\omega_B}{2\pi}$  die gesamte Bandbreite sein soll. Für ein ausgeführtes Filter waren die Daten etwa folgende:

Der Frequenzhub  $f_h = 5 \cdot \frac{\omega_g}{2\pi}$ , die halbe Bandbreite  $\frac{\omega_B}{2} = 8 \cdot \omega_g$  ( $\omega_g$  Grenzfrequenz), die Abweichung  $\beta\pi$  von der Geraden ergab für  $\beta$  einen Wert von etwa 0,2. Der Träger konnte so eingestellt werden, dass  $a_2 = 0$  war. (Wendepunkt; symmetrische Kurve.) Für 5 hintereinandergeschaltete Bandfilter hat man somit:

$$a_3 \left( \frac{\omega_B}{2} \right)^3 = 5 \cdot 0,2 \pi = \pi$$

oder

$$a_3 = \frac{\pi}{(8 \omega_g)^3}$$

Da bei dieser symmetrischen Einstellung nur ungerade Obertöne auftreten, ist die höchste Tonfrequenz, für welche die 3. Harmonische in den Bereich  $0 \dots \omega_g$  fällt,  $\omega = \frac{\omega_g}{3}$  mit  $m = 15$ . Wenn wir

nun diese Daten in Formel (52) einsetzen, erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= 2\pi f_h \cdot \cos \omega\tau - 2\pi f_h \cdot 0,0015 \cdot \cos \omega\tau \\ &- 2\pi f_h \cdot 0,0385 \cdot \sin \omega\tau \\ &- 2\pi f_h \cdot 0,0070 \cdot \cos 3 \omega\tau \\ &- 2\pi f_h \cdot 0,0384 \cdot \sin 3 \omega\tau \\ &- 2\pi f_h \cdot 0,0037 \cdot \cos 5 \omega\tau \end{aligned} \quad (54)$$

wogegen die «stationäre» Methode folgendes Resultat ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= 2\pi f_h \cdot \cos \omega\tau - 2\pi f_h \cdot 0,0384 \cdot \sin \omega\tau \\ &- 2\pi f_h \cdot 0,0384 \cdot \sin 3 \omega\tau \end{aligned} \quad (55)$$

Die Amplitude der 3. Harmonischen nach der genaueren Rechnung von Gl. (54) ist:

$$\sqrt{(0,0384)^2 + (0,0070)^2} = 0,0390$$

Amplitudenmässig besteht also zwischen der genauen und der einfachen «stationären» Rechnung nur ein sehr kleiner Unterschied; der Unterschied liegt im wesentlichen darin, dass die Phase des störenden 3. Obertones um ca.  $10^\circ$  abweicht.

Wir glauben, damit gezeigt zu haben, dass die einfache «stationäre» Methode in den meisten Fällen genügt. Man muss sich jedoch klar sein, dass bei sehr langen Uebertragungswegen mit vielen Filtern auch die Amplitudenabweichungen erheblich werden.

Die Legitimierung dieser Rechnungsmethode ist deshalb von grosser Wichtigkeit, weil nach der einfacheren Methode ohne Bedenken auch *Mehrtonprobleme* behandelt werden können. Die Ausführung der genauen Rechnung, z. B. für das Zweitontproblem zeigte sogar, dass bei einem Tongemisch (Mehrton-Modulation) die Abweichungen noch wesentlich kleiner sind als beim Eintontproblem.



Wenn die Abweichungen zwischen der Rechnung und den Messungen von Hölzler (I) grösser sind, so liegt dies zweifellos darin, dass für eine genauere analytische Angleichung seiner Phasenkurve auch noch ein Glied 5. Grades verwendet werden müsste.

### Literatur-Verzeichnis

- Armstrong: Proc. Inst. Radio Engrs. N. Y., Bd. 24 (1936), Mai.  
 Carson und Fry: Bell System Techn. J., Bd. 16 (1937).  
 Crosby: Proc. Inst. Radio Engrs. N. Y., Bd. 25 (1937).  
 Proc. Inst. Radio Engrs. N. Y., Februar 1939.

- Fränz und Vellat: Elektr. Nachr. Technik, August 1943.  
 (I) Hölzler: Elektr. Nachr. Technik, Mai 1941.  
 (II) Kulp: Elektr. Nachr. Technik, Bd. 19 (1942), S. 72, H. 5.  
 Elektr. Nachr. Technik, Bd. 19 (1942), S. 96, Heft 6.  
 Elektr. Nachr. Technik, Bd. 19 (1942), S. 126, Heft 7.  
 Murray und Crosby: Proc. Inst. Radio Engrs. N. Y., Juni 1936.  
 Proc. Inst. Radio Engrs. N. Y., April 1937.  
 RCA-Review, Nr. 3, Januar 1940.  
 RCA-Review, Nr. 3, Januar 1941.  
 Plump: Hochfr. und Elektro-Akustik, Bd. 52 (1938).  
 Roder: Proc. Inst. Radio Engrs., Mai 1932.  
 Proc. Inst. Radio Engrs., Dezember 1937.  
 Vellat: Elektr. Nachr. Technik, April 1941

### Adresse des Autors:

Dr. P. Güttinger, A.-G. Brown Boveri & Cie., Baden.

## Präzisionswandler für Hochspannungsnetze

Vortrag, gehalten an der Diskussionsversammlung des SEV vom 7. Oktober 1944 in Luzern,  
 von J. Fischer, Basel

621.314.22.08

Der Einfluss von Spannungs- und Stromwandlerfehlern auf die Genauigkeit der Messung der Energieabgabe wird untersucht; es geht daraus hervor, wie wichtig es ist, nicht nur die prozentualen Fehler, sondern auch die absoluten Messfehler, in kWh, zu betrachten. Dann werden Möglichkeiten besprochen, Spannungswandler und Stromwandler zu verbessern; es wird auch auf den Einfluss der Betriebsbedingungen hingewiesen.

Etude de l'influence des erreurs dues aux transformateurs de tension et d'intensité sur la précision de mesure de la fourniture d'énergie. L'auteur constate qu'il est très important de considérer non seulement les erreurs en pour cent, mais aussi les erreurs absolues, en kWh. Il examine ensuite les moyens aptes à améliorer à cet égard les transformateurs de tension et d'intensité et attire l'attention sur l'influence exercée par les conditions d'exploitation.

Die folgenden Ausführungen richten sich an den Betriebsingenieur, der wegen seiner vielseitigen Beanspruchung kaum Zeit findet, in die Feinheiten eines Spezialgebietes einzudringen. Ein Eingehen in Grundlagen blieb dabei unvermeidlich; absichtlich wird aber auf die allgemein bekannten Darstellungen über Leistungstransformatoren Bezug genommen. In der Messwandler-Theorie werden nämlich Diagramme benützt, welche infolge ihrer knappen Darstellung den Zusammenhang mit den Verhältnissen bei Leistungstransformatoren nicht so leicht erkennen lassen. Es schien mir deshalb angezeigt, jene knappen Darstellungen hier nicht zu benützen.

### Allgemeines

Entwurf und Fabrikation von genauen Hochspannungswandlern haben mit einer Reihe von Schwierigkeiten zu kämpfen. Diese sind zum Teil durch die verhältnismässig grossen Isolationsabstände bedingt, welche zu grossen Magnetkörpern führen. Dazu kommen noch Forderungen wirtschaftlicher Natur; auch eine organische Eingliederung in eine Schaltanlage ist zu berücksichtigen.

Um die Bedeutung genauer Messwandler abschätzen zu können, seien zunächst einige allgemeine Begriffe in Erinnerung gerufen.

Durch Einschalten von Strom- und Spannungswandlern in einen Messkreis werden folgende Fehlergrössen in die Messung eingefügt (Fig. 1):

1. Durch Strom- und Spannungsfehler: Messfehler von gleicher Grösse und gleichem Vorzeichen.
2. Durch Winkelfehler: Veränderung des Phasenwinkels zwischen Strom und Spannung im Messkreis.

Fig. 2 zeigt, mit welchen Grössenordnungen von Messfehlern etwa gerechnet werden muss, wenn beispielsweise Wandler benützt würden, welche die

Bestimmungen der Eidg. Verkehrsprüfung erfüllen und in üblicher Weise abgestimmt sind. Die eingetragenen Werte stellen die Summe der Einzelfehler dar, die bei einer Einphasenmessung auftreten, jedoch ohne Berücksichtigung allfälliger

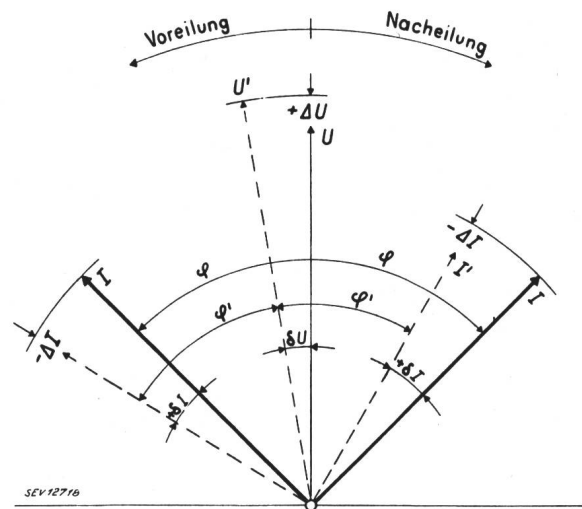


Fig. 1.

### Wirkung der Messwandlerfehler

$U, I, \varphi, P$  Sollwerte, wobei  $P = U I \cos \varphi$   
 $U', I', \varphi', P'$  Istwerte  $P' = U' I' \cos \varphi'$

Gesamte Messfehler in % bei einer Einphasenmessung:

bei Nacheilung  $\approx \Delta U \% + \Delta I \% - 0,0291 (\delta U - \delta I) \tan \varphi$

bei Voreilung  $\approx \Delta U \% + \Delta I \% + 0,0291 (\delta U - \delta I) \tan \varphi$

Sämtliche Einzelfehler sind einschliesslich ihres Vorzeichens einzusetzen, wobei  $\delta_{\text{vor}} = +$ ,  $\delta_{\text{nach}} = -$  gilt.

Fehler der angeschlossenen Messinstrumente. Sie sind auch gültig für Messungen im symmetrischen Dreiphasennetz, wenn zugleich genau gleichartige Messwandlerpaare benützt werden.

Bei Wahl von Wandlern nach Klasse 0,2 sinken die Fehler auf rund 40 %, bei Klasse 0,1 auf rund 20 % der Werte nach Fig. 2.