

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 35 (1944)
Heft: 25

Artikel: Elektrodynamische Beanspruchung von parallelen Leitern
Autor: Baltensperger, P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1061625>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

lichen Umstände für die Schutzerdung oder Nullung ungünstig sind, am Platze sein. Ueber die Wirkungsweise der Schutzschaltung und ihre Anwendung sei auf die Anforderungen an Berührungsschalter mit unverzögerter Auslösung des SEV (Bulletin SEV 1938, Nr. 15, und Publikation Nr. 143), sowie auf den nachfolgenden Literaturnachweis verwiesen.

Literaturnachweis

- Oskar Löbl; Erdung, Nullung und Schutzschaltung; Verlag Springer, Berlin, 1933.
 M. Wettstein; Schutzmaßnahmen zur Vermeidung elektrischer Unfälle in den Hausinstallationen; Bull. SEV 1934, Nr. 23...26.
 W. Schrank; Schutz gegen Berührungsspannungen; Verlag R. Oldenbourg, München, 1942.

Elektrodynamische Beanspruchung von parallelen Leitern

Von P. Baltensperger, Baden

621.3.019.6

Zwischen zwei parallelen, von Wechselstrom durchflossenen Leitern wirkt eine periodische Kraft, welche die Leiter in Schwingungen versetzt. Resonanz tritt auf, wenn die kleinste Eigenfrequenz eines Leiterstückes zwischen zwei Abstützungen gleich ist der doppelten Stromfrequenz. Vorübergehendes Aufschaukeln tritt bei asymmetrischem Einschaltstrom auf, falls die Leitereigenfrequenz gleich der Stromfrequenz ist.

Der Vergleich mit der statischen Belastung, d. h. mit der Belastung bei stationärem Gleichstrom von der Grösse des maximalen Wechselstromscheitelwertes, ergibt:

Ist die Leitereigenfrequenz viel grösser als die Stromfrequenz, so ist die Beanspruchung bei symmetrischem Wechselstrom gleich der einfachen bis doppelten statischen Beanspruchung, je nachdem der Strom im Einschaltmoment den Wert Null oder den Scheitelwert hat. Ist die Leitereigenfrequenz viel kleiner als die Stromfrequenz, so ist die Beanspruchung bei symmetrischem Wechselstrom höchstens gleich der statischen Beanspruchung. Bei asymmetrischem Kurzschlussstrom ist die Beanspruchung gleich der statischen, falls die Leitereigenfrequenz sehr gross, und kleiner als die statische, falls die Leitereigenfrequenz sehr klein (d. h. viel kleiner als die Strom-Kreisfrequenz) ist.

Anwendungsgebiet: Sammelschienen, Trenner von Schaltern, sinngemäss auch Transformatorenwicklungen, Drosselspulen usw.

Einleitung

M. F. Aebi hat das vorliegende Problem für Gleichstromstöße gelöst.¹⁾ Er fand, dass die Beanspruchung bei plötzlich auftretendem Gleichstrom höchstens die doppelte Beanspruchung bei ruhendem Gleichstrom erreichen kann. In der vorliegenden Arbeit wird nun das Problem auch für Wechselstrom gelöst.

Die Kraftwirkung zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern lässt sich nach den Gesetzen von Biot-Savart und Laplace berechnen. Für zwei unendlich lange parallele Leiter im Abstand d ergibt sich bei in beiden Leitern gleichem Strom $i(t)$ die folgende Kraft F pro cm Stablänge:

$$F_{(t)} = \frac{2,04}{d} 10^{-8} i_{(t)}^2 \text{ kg/cm} \quad (1)$$

d in cm, i in A.

Die Leiter, die als elastisch, d. h. dem Hookeschen Gesetz gehorchen, angenommen werden, unterliegen den Gesetzen des schwingenden Stabes, deren Herleitung wir als bekannt voraussetzen. Die

¹⁾ M. F. Aebi: «Untersuchungen über elektrodynamische Beanspruchung.» Schweizer Archiv für angewandte Wissenschaft und Technik, Juli 1941.

Lorsque deux conducteurs parallèles sont parcourus par du courant alternatif, ils sont soumis à une force périodique qui les fait osciller. L'état de résonance se présente lorsque la plus petite fréquence propre d'un tronçon de conducteur entre deux points d'appui est égale au double de la fréquence du courant. Si la fréquence propre est égale à la fréquence du courant, des oscillations passagères sont engendrées lors de l'enclenchement d'un courant dissymétrique.

Une comparaison avec la charge statique, c'est-à-dire sous courant continu stationnaire de même valeur que l'amplitude maximum du courant alternatif, permet de faire les constatations suivantes:

Si la fréquence propre des conducteurs est sensiblement plus élevée que la fréquence du courant, la sollicitation sous courant alternatif symétrique sera égale à une ou deux fois la sollicitation statique, selon que le courant au moment de l'enclenchement est nulle ou qu'elle atteint la valeur de crête. Si la fréquence propre des conducteurs est nettement inférieure à la fréquence du courant, la sollicitation sous courant alternatif symétrique sera égale à la sollicitation statique. Lorsqu'il s'agit d'un courant de court-circuit dissymétrique, la sollicitation est égale à la sollicitation statique si la fréquence propre des conducteurs est très élevée; elle est inférieure à la sollicitation statique si la fréquence propre est très faible, c'est-à-dire inférieure à la fréquence du circuit de courant.

Ces considérations s'appliquent notamment aux barres omnibus, aux sectionneurs, aux interrupteurs et, par analogie, aux bobinages de transformateurs, aux bobines de self, etc.

Gleichung des schwingenden Stabes lautet in unserem Falle:

$$m \frac{\partial_y^2}{\partial_t^2} + \lambda \frac{\partial_y}{\partial_t} + \Theta E \frac{\partial_y^4}{\partial_x^4} = F_{(t)} \quad (2)$$

Dabei bedeuten:

- m die Leitermasse pro cm Länge.
- Θ das axiale Flächenträgheitsmoment.
- E den Elastizitätsmodul.
- x den Abstand des variablen Stabpunktes von einer festen Stabstütze.
- y die Abweichung eines Stabpunktes von seiner Ruhelage, senkrecht zur x -Achse.
- t die Zeit.
- λ die Materialdämpfungskonstante des Leiters.

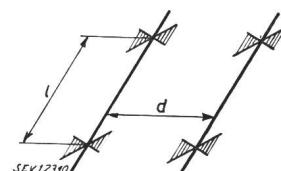


Fig. 1.

Wir betrachten nun ein Leiterstück zwischen zwei Abstützungen von der Stützweite l , wobei wir uns vorläufig nicht darum kümmern, ob der Leiter an den Stützen eingespannt oder nur gehalten ist.

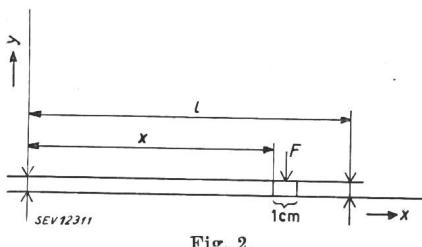


Fig. 2.

Lösung des Problems für verschiedene Wechselstrombelastungen

Wir führen den Gang der Lösung wegen Raumangels nicht aus. Die Lösungen sind stets von der Form

$$y = C \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(x) \cdot f_k(t) \quad (3)$$

wo $\xi_k(x)$ nur von x und $f_k(t)$ nur von t abhängt. C ist eine Konstante. Die Funktionen $\xi_k(x)$ sind durch die Art der Befestigung der Stabenden eindeutig bestimmt. Wir geben nachstehend $\xi_k(x)$ für 2 Fälle von Stabbefestigungen.

A. Stab an beiden Enden eingespannt

Randbedingungen: $x = 0: y = 0, \frac{\partial y}{\partial x} = 0$ (Tangente)

$$x = l: y = 0, \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Man erhält:

$$\xi_k(x) = \frac{(\cosh s_k - \cos s_k) l}{(\sinh s_k - \sin s_k)^2 s_k} \left\{ \left(\cosh s_k \frac{x}{l} - \cos s_k \frac{x}{l} \right) (\sinh s_k - \sin s_k) - \left(\sinh s_k \frac{x}{l} - \sin s_k \frac{x}{l} \right) (\cosh s_k - \cos s_k) \right\} \quad (4)$$

Dabei ist $s_1 = 4,73$; $s_2 = 10,996$ und für $k \geq 3$ gilt mit guter Annäherung:

$$s_k \approx (4k-1) \frac{\pi}{2}; k = 3, 4, 5, \dots \quad (4a)$$

B. Stab an beiden Enden gehalten

Randbedingungen:

$$x = 0: y = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{Krümmung})$$

$$x = l: y = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Man erhält:

$$\xi_k(x) = \frac{l}{s_k} \sin s_k \frac{x}{l} \quad (5)$$

$$\text{mit } s_k = \pi (2k+1) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5a)$$

Die Zeitfunktionen $f_k(t)$ sind grundsätzlich gleich aufgebaut wie die Lösung eines analogen Problems, bei welchem die störende Kraft $F(t)$ auf einen an einer Feder befestigten Massenpunkt wirkt. Man löst also zuerst diese vereinfachte Aufgabe, wobei man sich vorteilhaft der Heavisideschen Operatorenrechnung (Laplace-Transformation) bedient, und verwendet die gefundene Lösung, mit allgemeinen Konstanten versehen, als Ansatz für

die Zeitfunktionen $f_k(t)$. Die Bestimmung der Konstanten erfolgt dann unter Berücksichtigung der Orthogonalität der Ortsfunktionen $\xi_k(x)$, wie dies z. B von Rayleigh²⁾ beschrieben wurde.

Jedes Stabstück zwischen 2 Befestigungsstellen hat ∞ viele Eigenschwingungszahlen ν_k . Aus der Theorie des schwingenden Stabes geht hervor, dass die k -te Eigenkreisfrequenz n_k des Stabes:

$$n_k = 2 \pi \nu_k = \frac{s_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{\Theta E}{m}} \quad (6)$$

wo s_k nur von der Art der Befestigung der Stabenden abhängt und z. B. nach den Formeln (4a) resp. (5a) berechnet werden kann.

I. Symmetrischer Einschaltstrom

Materialdämpfung des Stabes nicht berücksichtigt

Strom im Leiter 1: $i_1 = \hat{i}_1 \cos(\omega t + \eta)$

Strom im Leiter 2: $i_2 = \hat{i}_2 \cos(\omega t + \vartheta)$

Dämpfungskonstante $\lambda = 0$.

η und ϑ bedeuten die Phasenlagen der Ströme i_1 und i_2 zur Zeit $t = 0$. \hat{i}_1 , \hat{i}_2 sind die Wechselstromscheitelwerte. ω ist die Kreisfrequenz des Stromes.

Differentialgleichung:

$$m \cdot \ddot{y} + \Theta E y^{(4)} = \frac{2 \hat{i}_1 \hat{i}_2 \cdot 10^{-8}}{d} \cos(\omega t + \eta) \cos(\omega t + \vartheta) \quad (7)$$

Lösung: $y = C \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(x) \cdot f_k(t)$ wo

$$C = \frac{4 \hat{i}_1 \hat{i}_2 \cdot 10^{-8}}{d m l} \quad (8)$$

$$f_k(t) = \frac{\cos(\eta - \vartheta)}{n_k^2} + \frac{\cos(2\omega t + \eta + \vartheta)}{n_k^2 - 4\omega^2} - \frac{2 S_k \cos(n_k t + \varepsilon_k)}{n_k^2 (n_k^2 - 4\omega^2)} \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_k = \frac{\omega \cdot n_k \sin(\eta + \vartheta)}{n_k^2 \cos \eta \cos \vartheta - 2\omega^2 \cdot \cos(\eta - \vartheta)} \quad (10)$$

$$S_k = \sqrt{\frac{n_k^2 \omega^2 \sin^2(\eta + \vartheta) + n_k^4 \cos^2 \eta \cos^2 \vartheta - 4 n_k^2 \omega^2}{\cos \eta \cos \vartheta \cos(\eta - \vartheta) + 4 \omega^4 \cdot \cos^2(\eta - \vartheta)}} \quad (11)$$

Handelt es sich um einen Kurzschlußstrom, der durch beide Leiter fliesst, so wird $\eta = \vartheta = \frac{\pi}{2}$, weil der Kurzschlußstrom stets mit dem Wert 0 beginnt; in diesem Fall wird nach (9):

$$f_k(t) = \frac{1}{n_k^2} - \frac{\cos 2\omega t}{n_k^2 - 4\omega^2} + \frac{4\omega^2 \cos n_k t}{n_k^2 (n_k^2 - 4\omega^2)} \quad (9a)$$

II. Asymmetrischer Kurzschlußstrom mit abklingender Gleichstromkomponente Materialdämpfung nicht berücksichtigt

Der Kurzschlußstrom, welcher stets mit dem Wert Null beginnt, hat im Falle eines asymmetrischen Einschwingens die Form:

$$i = \hat{i} (e^{-\alpha t} \cdot \cos \omega t)$$

²⁾ Rayleigh: «Theorie des Schalles», Bd. 1.

α ist die Dämpfungskonstante des elektrischen Stromkreises.

Durch beide Leiter fliesset der gleiche Strom.

Differentialgleichung:

$$m \cdot \ddot{y} + \Theta E y^{(4)} = \frac{2 i^2 \cdot 10^{-8}}{d} (e^{-\alpha t} - \cos \omega t)^2 \quad (12)$$

Lösung:

$$y = C \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(x) \cdot f_k(t) \quad \text{wo}$$

$$C = \frac{4 i^2 \cdot 10^{-8}}{d m l} \quad (13)$$

$$f_k(t) = \frac{1}{n_k^2} + \frac{2 e^{-2\alpha t}}{4 \alpha^2 + n_k^2} + \frac{\cos 2 \omega t}{n_k^2 - 4 \omega^2} - \frac{4 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varepsilon_{1k})}{\sqrt{(a^2 - \omega^2 + n_k^2)^2 + 4 \alpha^2 \omega^2} - 4 \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \cos(n_k t + \varepsilon_{2k})} \quad (14)$$

$$A_k = \frac{\{-\alpha^2 n_k^6 + n_k^4 (12 \alpha^2 \omega^2 + \alpha^4 + 3 \omega^4) + n_k^2 (2 \alpha^6 - 3 \omega^6)\}}{n_k^2 (n_k^2 - 4 \omega^2) (4 \alpha^2 + n_k^2) [(a^2 + \omega^2 - n_k^2)^2 + 4 \alpha^2 n_k^2]} \quad (15)$$

$$B_k = \frac{\alpha \cdot n_k [-3 n_k^4 (\alpha^2 + \omega^2) + n_k^2 (13 \omega^4 - 3 \alpha^4 + 10 \alpha^2 \omega^2) + 4 \omega^2 (3 \alpha^4 + 2 \alpha^2 \omega^2 - \omega^4)]}{n_k^2 (n_k^2 - 4 \omega^2) \cdot (4 \alpha^2 + n_k^2) \cdot [(a^2 + \omega^2 - n_k^2)^2 + 4 \alpha^2 \cdot n_k^2]} \quad (16)$$

$$\tan \varepsilon_{1k} = \frac{2 \alpha \omega}{a^2 - \omega^2 + n_k^2} \quad (17)$$

$$\tan \varepsilon_{2k} = \frac{B_k}{A_k} \quad (18)$$

III. Symmetrischer Einschaltstrom

Berücksichtigung der Materialdämpfung

Wir betrachten hier einen Einschaltstrom, der mit dem Scheitelwert beginnt, d. h. $\eta = \vartheta = 0$. Dieser Fall kommt bei Kurzschlußstrom nicht vor, ist aber beim Einschalten eines rein ohmschen Stromkreises möglich.

Durch beide Leiter fliesset der gleiche Strom:

$$i_1 = i_2 = \hat{i} \cos \omega t$$

Differentialgleichung:

$$m \cdot \ddot{y} + \lambda \cdot \dot{y} + \Theta E y^{(4)} = \frac{2 \hat{i}^2 \cdot 10^{-8}}{d} \cos^2 \omega t \quad (19)$$

Lösung:

$$y = C \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \cdot f_k(t), \quad \text{wo } C = \frac{4 \hat{i}^2 \cdot 10^{-8}}{d m l}$$

$$f_k(t) = \frac{1}{n_k^2} - R_k \cdot e^{-\frac{\lambda}{2m}} \cdot \sin \left[\sqrt{\left(n_k^2 - \frac{\lambda^2}{4m^2} \right)} t + \varepsilon_{1k} \right] + S_k \cdot \sin(2 \omega t + \varepsilon_{2k}) \quad (20)$$

$$R_k = \frac{\sqrt{\left\{ (4 m^2 n_k^2 - \lambda^2) [(2 n_k^2 - 4 \omega^2) (n_k^2 - 4 \omega^2)^2 + 4 \lambda^2 \omega^2] + \lambda^2 [2 m^2 n_k^4 - 4 m^2 n_k^2 \omega^2]^2 \right\}}}{n_k^2 [(n_k^2 - 4 \omega^2)^2 m^2 + 4 \lambda^2 \omega^2] \sqrt{4 m^2 n_k^2 - \lambda^2}} \quad (21)$$

$$S_k = \frac{m \sqrt{m^2 (n_k^2 - 4 \omega^2)^2 + 4 \lambda^2 \omega^2}}{(n_k^2 - 4 \omega^2)^2 m^2 + 4 \lambda^2 \omega^2} \quad (22)$$

$$\tan \varepsilon_{1k} = \frac{[m^2 (2 n_k^2 - 4 \omega^2) (n_k^2 - 4 \omega^2) + 4 \lambda^2 \omega^2]}{\sqrt{4 m^2 n_k^2 - \lambda^2}} \quad (23)$$

$$\tan \varepsilon_{2k} = \frac{m (n_k^2 - 4 \omega^2)}{2 \lambda \omega} \quad (24)$$

IV. Resonanz

Wir betrachten das Beispiel eines durch beide Leiter fliessenden symmetrischen Einschaltstromes, der im Einschaltmoment gerade den Scheitelwert habe ($\eta = \vartheta = 0$).

Also

$$F_{(t)} = a \cos^2 \omega t; \quad a = \frac{2 \hat{i}^2 \cdot 10^{-8}}{d}$$

Resonanz entsteht, wenn die k -te Eigenfrequenz des Leiters gleich der doppelten Stromfrequenz ist. Also $n_k = 2\omega$.

a) Die Materialdämpfung soll nicht berücksichtigt werden, d. h. $\lambda = 0$.

Aus Formel (9), welche zunächst beim Einsetzen von $n_k = 2\omega$ einen unbestimmten Wert annimmt, erhält man durch Grenzübergang ($n_k \rightarrow 2\omega$):

$$f_k(t) = \frac{1}{4 \omega^2} + t \frac{\sin 2 \omega t}{4 \omega} - \frac{\cos 2 \omega t}{4 \omega^2} \quad (9b)$$

b) Berücksichtigung der Materialdämpfung.

Analog folgt aus (20) durch Grenzübergang:

$$f_k(t) = \frac{1}{4 \omega^2} + \frac{m}{2 \lambda \omega} \left[\sin 2 \omega t - e^{-\frac{\lambda}{2m} t} \sin(2 \omega t + \varepsilon) \right] \quad (20a)$$

$$\tan \varepsilon = \frac{m}{2 \lambda \omega}$$

Formel (20a) geht für kleine Werte von t wieder in Formel (9b) über.

c) Bei asymmetrischem Kurzschlußstrom

ist sowohl bei $n_k = \omega$, als auch bei $n_k = 2\omega$ Resonanz möglich, wobei allerdings bei $n_k = \omega$ nicht eigentliche Resonanz, sondern nur ein vorübergehendes Aufschaukeln am Anfang auftritt.

Diskussion der Lösungen

Berechnung der Biegebeanspruchungen

In der Praxis interessiert man sich meistens nicht um die Grösse der Stabaußenschläge, sondern in erster

Linie um die Beanspruchungen, d. h. im vorliegenden Fall um die Biegespannungen σ .

Es ist:

$$\sigma = \frac{\Theta E}{W} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (25)$$

W bedeutet das Widerstandsmoment des Leiters. also wegen (3):

$$\sigma = \frac{\Theta E C}{W} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k'(x) \cdot f_k(t) \quad (26)$$

Die Konvergenz der Summe (26) ist befriedigend. Durch Weglassen des 2. und aller folgenden Glieder macht man beim beidseitig eingeklemmten Stab einen Fehler von ca. 12 %, und beim beidseitig gehaltenen Stab einen Fehler von ca. 3 %. Es ist statthaft, in (26) nur das erste Glied der Summe zu berücksichtigen und es dafür mit einem Korrekturfaktor p zu multiplizieren. ($p = 1,12$ im Falle «eingespannt — eingespannt»; $p = 0,97$ im Falle «gehalten — gehalten»).

Es ist also:

$$\sigma = \frac{\Theta E C}{W} p \xi_1'(x) \cdot f_1(t) \quad (27)$$

Das Maximum von σ zu einer gegebenen Zeit t ist nach (27)

$$\sigma_{max}(t) = \frac{\Theta E C}{W} p \xi_1'(x)_{max} \cdot f_1(t) \quad (28)$$

Nun findet man nach 2maliger Differentiation von $\xi(x)$ nach x :

$$\xi_1''(x)_{max} = \varphi \frac{s_1}{l}, \quad (29)$$

wo φ eine konstante, d. h. von x und l unabhängige Grösse ist. φ ist also nur von der Art der Befestigung der Enden abhängig.

Es wird somit:

$$\sigma_{max}(t) = \frac{\Theta E C}{W} p \varphi \frac{s_1}{l} \cdot f_1(t) \quad (30)$$

Z. B. ist $\varphi = 1,93$ beim beidseitig eingespannten Stab $\varphi = 1$ beim beidseitig gehaltenen Stab.

Wir begnügen uns nun mit der Betrachtung der örtlichen Maxima von σ als Funktion der Zeit, nach Formel (30).

Da das Rechnen mit unseren Lösungsformeln $f_1(t)$ umständlich ist, wollen wir die elektrodynamischen Beanspruchungen mit leicht berechenbaren ruhenden Beanspruchungen vergleichen.

Wir bezeichnen als *statische Beanspruchung* (Belastung) jene Beanspruchung, die entsteht, wenn konstanter stationärer Gleichstrom von der Grösse des maximalen Wechselstromscheitelwertes durch die Leiter fliesst. Ist \hat{i}_{max} dieser Scheitelwert, so ist die statische Beanspruchung bekanntlich:

$$(\sigma_{stat})_{max} = \frac{2 \hat{i}_{max} \cdot 10^{-8} l^2}{d q W} \quad (31)$$

q ist eine nur von der Art der Befestigung der Stabenden abhängige Konstante.

Z. B. ist $q = 12$ beim beidseitig eingeklemmten Stab $q = 8$ beim beidseitig gehaltenen Stab.

Anderseits wird aus (30), da in allen Fällen

$$C = \frac{4 \hat{i}^2 \cdot 10^{-8}}{d m l} \text{ ist,} \quad (13)$$

(\hat{i} = Scheitelwert des symmetrischen Stromes).

$$(\sigma_{dyn})_{max} = \frac{4 \hat{i}^2 \cdot 10^{-8} \Theta E}{W d m l^2} p \varphi s_1 \cdot f_1(t)_{max} \quad (32)$$

(dyn. = dynamisch)

Nach (6) ist nun:

$$2 \pi r_1 = n_1 = \frac{s_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{\Theta E}{m}}, \text{ woraus}$$

$$l^2 = \frac{s_1^2}{n_1} \sqrt{\frac{\Theta E}{m}}; \quad (33)$$

in (32) eingesetzt:

$$(\sigma_{dyn})_{max} = \frac{4 \hat{i}^2 \cdot 10^{-8} p \varphi}{W d s_1} \sqrt{\frac{\Theta E}{m}} n_1 \cdot f_1(t)_{max} \quad (34)$$

Analog wird aus (31) durch Einsetzen von l^2 nach (33)

$$(\sigma_{stat})_{max} = \frac{2 \cdot \hat{i}_{max}^2 \cdot 10^{-8} s_1^2}{W d q} \sqrt{\frac{\Theta E}{m}} \frac{1}{n_1} \quad (35)$$

Es ist somit:

$$(\sigma_{dyn})_{max} = \left(\frac{\hat{i}}{\hat{i}_{max}} \right)^2 \frac{2 q p \varphi}{s_1^3} n_1^2 f_1(t)_{max} (\sigma_{stat})_{max} \quad (36)$$

Beim symmetrischen Kurzschlußstrom ist $\hat{i}_{max} = \hat{i}$; beim asymmetrischen Kurzschlußstrom nimmt man $\hat{i}_{max} = 1,8 \hat{i}$ an.

In Fig. 3 ist nun $(\sigma_{dyn})_{max}$ und $(\sigma_{stat})_{max}$ in Funktion der Grundeigenkreisfrequenz n_1 des Stabes dargestellt. Im Falle des asymmetrischen Kurzschlußstromes ist angenommen, dass die Gleichstromkomponente nach 0,1 s auf ca. 10 % ihres Anfangswertes abgeklungen ist; also eine verhältnismässig strenge Annahme (Kurve 1). Die Kurve lehrt dass bei $n_1 = \omega$ und $n_1 = 2 \omega$, sowie in der Umgebung dieser Werte wegen Resonanz Vielfache der statischen Beanspruchung auftreten. Für $n_1 = 3 \omega$ ist die dynamische Belastung ca. 40 % grösser als die statische; die dynamische Beanspruchung nähert sich dann mit zunehmender Eigenkreisfrequenz n_1 dem Wert der statischen Beanspruchung.

Zum Vergleich mit der massgebenden Kurve 1 (asymmetrischer Kurzschlußstrom) ist in Kurve 2 die Biegespannung in Funktion von n_1 , bei symmetrischem Kurzschlußstrom dargestellt. Wie zu erwarten, sind diese Werte oberhalb der Resonanzzonen 1,8² mal kleiner als die Werte der Kurve 1. Auf dem gleichen Kurvenblatt ist ferner noch die Beanspruchung bei symmetrischem Einschaltstrom dargestellt, wobei dieser Strom im Einschaltmoment seinen Scheitelwert \hat{i} hat (Kurve 3). Bemerkens-

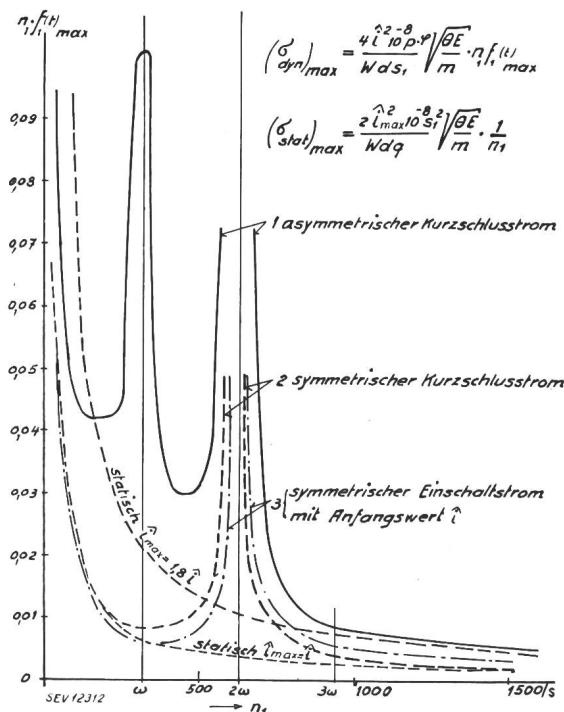


Fig. 3.

Maximale dynamische und statische Biegespannungen σ in Funktion der Grundeigenkreisfrequenz n_1 des Stabes, bei asymmetrischem und symmetrischem Kurzschlußstrom, und bei symmetrischem Einschaltstrom mit Anfangswert i . Kurven gültig für alle Befestigungsarten der Stabenden

wert ist dabei, dass die auftretende Beanspruchung bei grossen Werten n_1 gleich der doppelten statischen Beanspruchung ist. Dieser Fall ($n_1 \gg \omega$) kommt einer elektrodynamischen Beanspruchung bei plötzlich auftretendem Gleichstrom gleich. Tat-

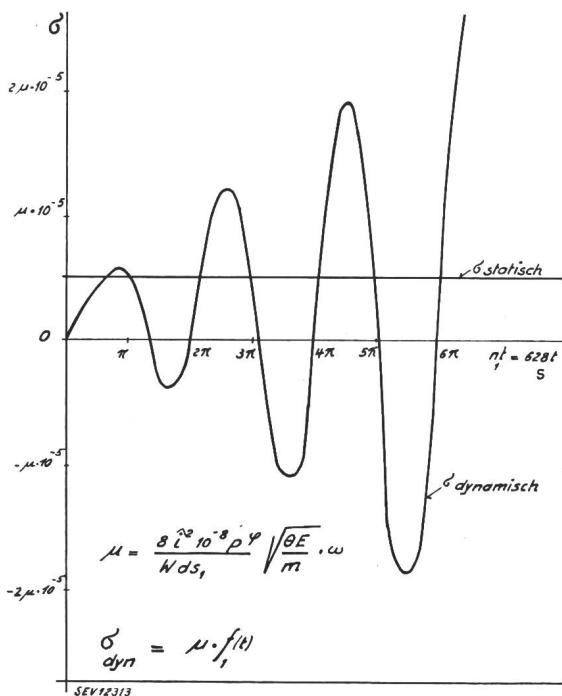


Fig. 4.

Anfänglicher zeitlicher Verlauf der Biegespannung σ bei Resonanz

Symmetrischer Einschaltstrom mit maximalem Anfangswert i
Vergleich mit der statischen Beanspruchung
Kurven gültig für alle Befestigungsarten der Stabenden

sächlich deckt sich unsere Formel (9), wenn $\eta = \vartheta = 0$ und $\frac{\omega}{n_1} = 0$ gesetzt wird, mit der von M. F. Aebi¹⁾ gefundenen Lösung für plötzlich auftretende Gleichstrombelastung.

Der zeitliche Verlauf der Biegespannung bei Resonanz ist in Fig. 4 für symmetrischen Einschaltstrom mit maximalem Anfangswert i dargestellt (Formel 9b). Man sieht daraus, dass die statische Beanspruchung schon während der ersten Halbwelle ein wenig und während der dritten Halbwelle wesentlich überschritten wird. Bei symmetrischem Einschaltstrom mit anderem Anfangswert und bei asymmetrischem Einschaltstrom verlaufen die Resonanzkurven beinahe gleich wie die dargestellte. Die Materialdämpfung hat im allgemeinen wenig Einfluss auf die elektrodynamische Beanspruchung.

Das logarithmische Dekrement $\frac{\lambda}{2m}$ liegt nach unseren Messungen ungefähr zwischen 0,1 und 10. Man

sieht daher leicht aus den Formeln (20) bis (24) durch Einsetzen der ungefähren Zahlenwerte, dass die Materialdämpfung mit Ausnahme des Resonanzfallen unwesentlich ist. Bei Resonanz wiederum beginnt die Dämpfung erst nach einer gewissen Zeit wirksam zu werden, wie dies aus Formel (20a) und deren graphischen Darstellung in Fig. 5 ersichtlich ist. Bei Kurzschlüssen von 0,1 s Dauer kann man noch nicht auf eine Dämpfungswirkung zählen.

Es folgt also, dass man Resonanzfälle $n_1 = \omega$ und $n_1 = 2\omega$ unter allen Umständen vermeiden muss.

Resonanz mit den höheren Eigenfrequenzen des

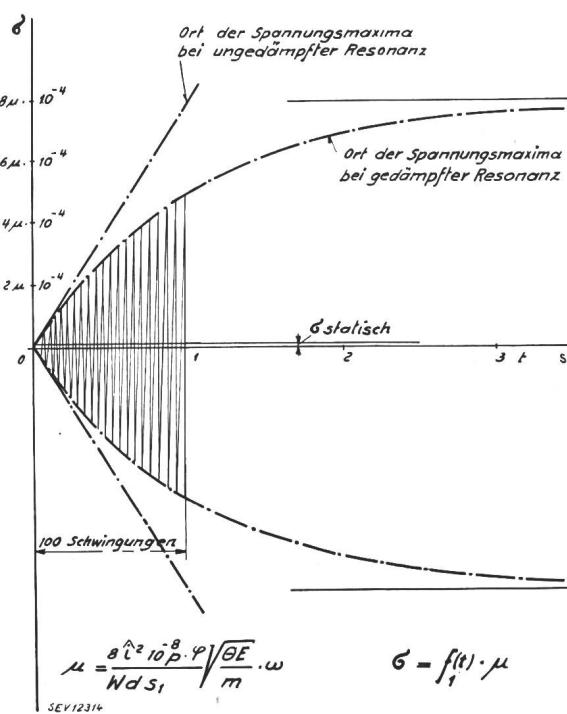


Fig. 5.

Zeitlicher Verlauf der Biegespannung σ bei gedämpfter und ungedämpfter Resonanz

Symmetrischer Kurzschlußstrom
Vergleich mit der statischen Beanspruchung
Kurven gültig für alle Befestigungsarten der Stabenden

Stabes sind infolge der Materialdämpfung ungefährlich, was leicht aus unseren Formeln folgt.

Ist $n_1 \ll \omega$, so ist bei symmetrischem Wechselstrom die dynamische Beanspruchung der statischen Beanspruchung gleich, oder evtl. kleiner als diese, falls der Strom nur ganz kurze Zeit, z. B. 1 bis 2 Strom-Halbwellen lang fliessst. Bei asymmetrischem Kurzschlussstrom ist die dynamische Beanspruchung bei $n_1 \ll \omega$ stets kleiner als die statische, weil der grösste nur einmal auftretende Scheitelwert den Leiter nicht gleich stark beanspruchen kann, wie wenn ruhender Gleichstrom von der Grösse dieses Scheitelwertes fliessen würde.

Schlussfolgerungen

Für die Konstruktion ergeben sich 2 Vorschriften:

1. Die kleinste Eigenfrequenz $n_1 = \frac{s_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{\Theta E}{m}}$ muss genügend weit unterhalb ω und oberhalb 2ω liegen.
2. $\sigma = \varrho \frac{2i_{max}^2 \cdot 10^{-8} s_1^2}{W d q n_1} \sqrt{\frac{\Theta E}{m}} \leq \sigma_{zul}$

Darin bedeuten:

ϱ ist das Verhältnis zwischen dynamischer und statischer Beanspruchung, welches bei gegebenem n_1 aus den Kurven von Fig. 3 gelesen werden kann. Z. B. für $n_1 = 3\omega$ ist $\varrho = 1,4$; und für $n = \infty$ ist $\varrho = 1$.

ω die Kreisfrequenz des Stromes (z. B. = 314/s)

Θ das axiale Flächenträgheitsmoment (cm^4)

E das Elastizitätsmodul (kg/cm^2)

m die Stabmasse pro cm Länge =

$= \frac{\text{Stabquerschnitt} (\text{cm}^2)}{981000} \times \text{spez. Gewicht}$

W das Widerstandsmoment (cm^3)

l die Stützweite des Leiters = Stablänge (cm)

d den Abstand der beiden Leiter voneinander (cm)

n_1 die Kreisfrequenz der Stab-Grundschwingung

i_{max} den maximal vorkommenden Kurzschlussstromscheitelwert (A)

q und s_1 können aus Tabelle I gelesen werden:

Tabelle I

Befestigung der Stabenden	q	s_1
eingespannt – eingespannt	12	4,73
eingespannt – gehalten	8	3,927
gehalten – gehalten	8	π

Bei der üblichen Dreiphasen-Anordnung sind die maximalen Kurzschlussbeanspruchungen höchstens 50 % grösser als bei Zweiphasen-Anordnung.

Beispiele

1. *Kupferschiene, 1 × 6 cm, an beiden Enden «gehalten».*

$$l = 35 \text{ cm}; d = 22 \text{ cm}; W = 1 \text{ cm}^3;$$

$$m = \frac{6 \cdot 8,9}{981000}; \Theta = 0,5 \text{ cm}^4; E = 10^6 \text{ kg/cm}^2;$$

$$n_1 = \frac{\pi^2}{35^2} \sqrt{\frac{0,5 \cdot 10^6 \cdot 981000}{6 \cdot 8,9}} = 770 = 2,45 \omega$$

Aus Fig. 3 folgt $\varrho = 2$

Bei $\sigma_{zul} = 800 \text{ kg/cm}^2$ berechnet sich der zulässige Kurzschlussstrom-Scheitelwert zu

$$i = \sqrt{\frac{800 \cdot 22 \cdot 8 \cdot 770 \cdot 10^8}{2 \cdot 2 \cdot \pi^2}} \sqrt{\frac{6 \cdot 8,9}{0,5 \cdot 10^6 \cdot 981000}} = 53500 \text{ A.}$$

2. *Kupferschiene 0,8 × 8 cm, beidseitig eingespannt.*

$$l = 150 \text{ cm}; d = 31 \text{ cm}; W = 0,85 \text{ cm}^3;$$

$$m = \frac{6,4 \cdot 8,9}{981000}; \Theta = 0,342 \text{ cm}^4; E = 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

Verlangter Kurzschlussstrom-Scheitelwert

$$i = 30000 \text{ A}$$

Man erhält $n_1 = 76 = 0,24 \omega$. Die Kurve Fig. 3 ist in diesem Gebiet nicht mehr zuverlässig. Aus

Formel (34) folgt, wenn $i = \frac{i_{max}}{1,8}$ gesetzt wird (in der Praxis nimmt man an, dass der maximale Scheitelwert bei asymmetrischem Kurzschlussstrom den 1,8fachen Scheitelwert des symmetrischen Kurzschlussstromes erreicht):

$$\sigma = \frac{4 \cdot \left(\frac{30000}{1,8}\right)^2 \cdot 10^{-8} \cdot 1,12 \cdot 1,93 \cdot 4}{0,85 \cdot 31 \cdot 4,73 \cdot 76} \cdot \sqrt{\frac{0,342 \cdot 10^6 \cdot 981000}{8 \cdot 0,8 \cdot 8,9}} = 790 \text{ kg/cm}^2$$

Bei Flachmetallschienen kann eine Vergrösserung der Eigenfrequenz, resp. eine Verstärkung um ein Vielfaches dadurch erreicht werden, dass man die Schienen nicht hochkant, sondern flachkant nebeneinander anordnet. Die dabei auftretenden zusätzlichen (Cu-) Verluste spielen praktisch keine Rolle. Hingegen muss die Strombelastung infolge grösserer Erwärmung (ungünstigere Wärmeströmung) um ca. 10 % herabgesetzt werden.

Anwendungsgebiet

Sammelschienen, Trenner von Schaltern, sinngemäß auch Transformatorkwicklungen, Drosselspulen usw.

Bezeichnungen

x variabler Abstand des Stabpunktes.

t Zeit.

y Abweichung eines Stabpunktes von der Ruhelage (in Richtung senkrecht zur Stabaxe).

l Stablänge zwischen 2 Abstützungen.

d Abstand der beiden Leiter voneinander.

m Stabmasse pro cm Länge.

W Widerstandsmoment.

Θ axiales Flächenträgheitsmoment.

E Elastizitätsmodul.

i_1 Momentanwert des Stromes im Leiter 1.

i_2 Momentanwert des Stromes im Leiter 2.

i Scheitelwert des symmetrischen Wechselstromes.

i_{max} maximal auftretender Stromscheitelwert (Asymmetrie).

ν_k kte Stabeigenfrequenz (in Hz).

n_k	kte Stabeigenkreisfrequenz $= 2\pi\nu_k$.
s_k	ist durch die Gleichung $n_k = \frac{s_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{\Theta E}{m}}$ definiert.
λ	Materialdämpfungskonstante des Stabes.
α	Dämpfungskonstante des elektrischen Stromkreises.
ω	Wechselstrom-Kreisfrequenz.
η	Anfangs-Phasenlage des Stromes i_1 .
ϑ	Anfangs-Phasenlage des Stromes i_2 .
σ	Biegespannung im Stab.
P	Wert der max. Biegespannung
p	Wert des ersten Summengliedes der Formel für die Biegespannung
φ	ist definiert durch die Gleichung $\xi''_1(x)_{\max} = \varphi \frac{s_1}{l}$
q	ist definiert durch die Gleichung $\sigma_{\text{stat}} = \frac{a l^2}{q W}$
	q und φ sind nur von der Befestigungsart der Enden abhängig.
a	statische Kraft pro cm Stablänge.
$\sigma = \frac{\sigma_{\text{dynamisch}}}{\sigma_{\text{statisch}}}$	

Literatur

- 1) M. F. Aebi: «Untersuchungen über elektrodynamische Beanspruchungen.» Schweiz. Archiv für angew. Wiss. und Techn. 1941, Nr. 7. Aebi löst das Problem für Gleichstromstöße.
- 2) Rayleigh: «Theorie des Schalles», Bd. 1. Grundlegende Theorie des schwingenden Stabes.
- 3) O. R. Schurig and M. F. Sayre: «Mechanical stresses in busbar supports during short circuits.» J. Amer. Inst. electr. engrs., 1925, Nr. 4. Problem als gekoppeltes Schwingungssystem aufgefasst, wobei Leiter und Isolator elastisch sind, und sowohl die Leitermasse als auch die Isolatormasse je in einem Punkt konzentriert gedacht sind.
- 4) H. Holzer: «Biegungsschwingungen mit Berücksichtigung der Stabmasse und der äusseren und inneren Dämpfung.» Z. f. angew. Math. und Mechanik Bd. 8(1928), Heft 4.
- 5) K. Muto: Idem, Bd. 10(1930), Heft 4.
- 6) «Hütte», Bd. I und II.

Technische Mitteilungen — Communications de nature technique

Der Wechselstromwiderstand von Stahlleitungen

621.315.52

[Nach E. Grünwald, Elektr. Wirtsch., Bd. 42(1943), Nr. 1, S. 7]

Der kriegsbedingte Mangel an Kupfer und Aluminium führte zur Verwendung von Stahldrähten und Stahlseilen als Leitermaterial für elektrische Leitungen. Da bisher Projektierungsunterlagen für dieses Gebiet nur in ungenügendem Umfange vorhanden waren, wurden diese durch Versuche beschafft.

a) Umfang der Messungen und Versuchsbedingungen

Die Messungen über die Grösse des Wirk- und Blindwiderstandes von Stahldrähten und Stahlseilen sind für Drahtdurchmesser von 2...4 mm, für mechanische Festigkeiten des Stahls von 40...130 kg/mm² sowohl für einfache Massivdrähte, als auch für einlagige Seile und zweilagige Kreuzschlagseile bis zu höchstens 19 Drähten pro Seil durchgeführt worden. Mit Rücksicht auf die praktische Auswer-

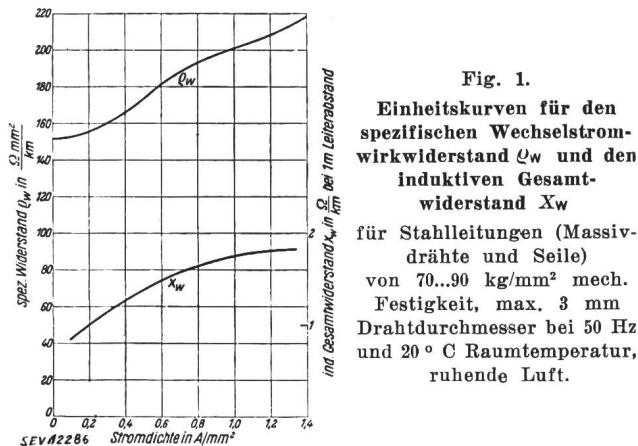


Fig. 1.

Einheitskurven für den spezifischen Wechselstromwirkwiderstand Q_w und den induktiven Gesamtwiderstand X_w für Stahlleitungen (Massivdrähte und Seile) von 70...90 kg/mm² mech. Festigkeit, max. 3 mm Drahtdurchmesser bei 50 Hz und 20 °C Raumtemperatur, ruhende Luft.

tung wurden für alle Versuche nur die Wechselstromfrequenz 50 Hz und ein Leiterabstand von 1 Meter verwendet. Eine durch das Mastbild nötige Änderung des Leiterabstandes auf einen von 1 m abweichenden Wert hat nur geringen Einfluss auf den Wechselstromwiderstand der Stahlleitung, da die Induktivität im wesentlichen durch die magnetische Eigenschaft des Stahls bestimmt wird. Bei allen Messungen war die Raumtemperatur ca. 20° C und der zu messende Leiter hatte dabei die durch den jeweiligen Dauerstrom in ruhender Luft bedingte Uebertemperatur. Für die Messung des Wechselstromwiderstandes wurde eine abgeschirmte Brückenschaltung mit einem Vibrationsgalvanometer als Nullinstrument verwendet.

b) Messergebnisse

Der Gleichstromwiderstand und das Verhältnis zwischen Gleichstrom- und Wechselstromwiderstand ist sehr stark von der mechanischen Festigkeit des Leitermaterials abhängig. Drähte und Seile aus Stahl mit ca. 40 kg/mm² eignen sich trotz dem verhältnismässig kleinen spezifischen Gleichstromwiderstand für den Leitungsbau nicht, da der induktive Widerstand dieser Stahlsorten bei Stromdichten zwischen 0,5 und 1 A/mm² sehr stark ansteigt. Leitermaterial mit Festigkeiten über 120 kg/mm² ist sowohl wegen dem grossen spezifischen Gleichstromwiderstand und den dadurch bedingten hohen Energieverlust schon bei kleiner Stromdichte, als auch wegen der schwierigen Verlegung dieses harten Materials für elektrische Leitungen ungeeignet. Für den Leitungsbau verhalten sich am günstigsten Drähte und Seile aus Stahl mit 70...90 kg/mm² Festigkeit. Drahtdurchmesser von 2...3 mm sowohl für Massivdrähte, als auch Seile sollen nicht überschritten werden.

Für die Projektierung von Stahlleitungen wurden auf Grund der Versuche Einheitskurven aufgestellt, welche Höchstwerte darstellen und eine sichere Bemessung der Leitung mit einer für die technische Praxis ausreichenden Genauigkeit erlauben.

P. T.

Die Uebertragungsmöglichkeiten von Wechselstrom-Freileitungen für 50 Hz mit Stahlseilen

[Nach Fr. Wienken, Elektr. Wirtsch., Bd. 42(1943), Nr. 1, S. 9]

621.315.52

Der spezifische Wirkwiderstand von Stahlleitungen ist 3- bis 12mal grösser als derjenige einer sonst gleichen Kupferleitung, d. h. bei gleicher Uebertragungsleistung und Spannung und gleichem Querschnitt ist die zulässige Uebertragungslänge einer Stahlleitung nur 8...12 % der Länge einer Kupferleitung. Der induktive Widerstand von Stahlleitungen ist je nach Beschaffenheit des Stahls, dem Seilaufbau und Drahtdurchmesser 4- bis 5mal grösser als derjenige von Kupfer- oder Aluminiumleitungen. Zur schnellen und überschlägigen Bestimmung des Leistungsverlustes von Stahlleitungen sei auf das Nomogramm Fig. 1 verwiesen, welches erlaubt, von den 6 eine Freileitung kennzeichnenden Werten (Uebertragungsspannung, Uebertragungsleistung, Leitungslänge, Leitungsquerschnitt, Leistungsfaktor und Leistungsverlust) irgendeinen Wert zu bestimmen, wenn die 5 anderen bekannt sind. Bei der Verwendung des Nomogrammes ist darauf zu achten, dass, wie im eingezeichneten Beispiel ange deutet ist, stets ein geschlossener Linienzug durch alle vier Quadranten hinweg entstehen muss. Der kapazitive Blindwiderstand ist unabhängig von den Materialeigenschaften der Leitung. Die durch die Kapazitäten bestimmte Ladeleistung ist im Nomogramm Fig. 1 nicht berücksichtigt. Für