Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 35 (1944)

Heft: 17

Artikel: Calcul du courant de charge dans une ligne triphasée à disposition dissymétrique

Autor: Lambossy, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1061592

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

gen nicht beschreiben können. Das Sehorgan verfügt über keinerlei kompensatorische Einrichtung zur Aufhebung des Flimmergefühls oder zur Reversion einer stroboskopischen Täuschung; es ist diesen Sinneseindrücken wehrlos ausgesetzt. Angesichts der Verschiedenartigkeit der menschlichen Reaktionsweise ist es verständlich, dass es Leute gibt, denen diese Eindrücke Beschwerden machen.

Bei allen statistischen Zusammenfassungen biologischer Reaktionen beim Menschen sieht man eine Häufung und eine Streuung der untersuchten Personenzahlen. Das gleiche gilt für das Sehorgan, wenn es sich darum handelt, die Einwirkung einer neuen Beleuchtung zu registrieren. In der Streuung der Personenzahlen wird man diejenigen unterzubringen haben, die sich durch die Eigenart der diskontinuierlichen Beleuchtung in der Arbeit behindert oder sonstwie belästigt fühlen, während in der zahlenmässigen Häufung die grosse Mehrheit derjenigen enthalten ist, die keinerlei Anstoss am neuen Lichte nimmt.

Sollte es der Technik gelingen, bei der diskontinuierlichen Beleuchtung das absolute Dunkelintervall in ein relatives, wie bei der Glühlampe, zu verwandeln, oder es ganz zu beseitigen, dann wären damit die praktisch wichtigen Mängel behoben.

Calcul du courant de charge dans une ligne triphasée à disposition dissymétrique

Par *P. Lambossy*, Fribourg

621.3.014.1:621.315.1

Lorsque les conducteurs d'une ligne triphasée occupent les sommets d'un triangle quelconque, il circule dans chacun de ces conducteurs, la ligne étant sous tension, des courants de charge différents. L'objet du présent article est de préciser la notion de «capacité par fil de phase», d'établir des formules complètes pour cette capacité et aussi pour le courant de charge dans chaque fil. Des exemples numériques montrent cependant que, si l'on ne cherche pas une grande précision, des formules plus simples permettent de calculer le courant moyen de charge, avec une exactitude satisfaisante.

Haben die Leiter einer unter Spannung stehenden Drehstromfreileitung gegenseitig ungleiche Abstände, so fliessen in ihnen verschieden grosse Ladeströme. Der vorliegende Artikel hat den Zweck, den Begriff der «Kapazität pro Phase» zu präzisieren, und dann für diese Kapazität sowie für den in jedem Leiter fliessenden Ladestrom vollständige Formeln aufzustellen. Numerische Beispiele zeigen jedoch, dass man, wenn nicht grosse Genauigkeit gewünscht wird, den mittleren Ladestrom mit einfacheren Formeln berechnen kann.

1° Introduction

Lorsqu'une ligne triphasée est sous tension, mais ouverte, il circule cependant dans chacun des trois conducteurs un courant alternatif, appelé *courant de charge*, qui se ferme dans l'espace entourant les conducteurs. Le problème est particulièrement simple dans le cas d'une ligne symétrique, c'est-à-dire dont les trois conducteurs occupent les sommets d'un triangle équilatéral, l'influence de la terre étant négligée. Tout revient, en effet, à calculer la capacité par fil, et l'on établit pour cette capacité C la formule suivante:

$$C = \frac{0{,}02413\, l}{\log \frac{a}{r}}\, 10^{-6}\ \mathrm{F} \qquad (1)$$

r est le rayon de chacun des fils, a leur distance mutuelle; l est la longueur de la ligne évaluée en km.

Si maintenant U est la tension composée, U_0 la tension simple, I le courant de charge, on a

$$U_0 = \frac{U}{\sqrt{3}}; \quad I = C\,\omega\, U_0.$$

Le cas d'une ligne triphasée dissymétrique, c'est-à-dire dont les trois conducteurs occupent les sommets d'un triangle quelconque, est plus difficile à traiter. On arrive à ce résultat que les trois fils sont parcourus par des courants de charge différents, à supposer toujours que les trois tensions entre fils soient rigoureusement triphasées.

Il est facile de poser les équations du problème, même en tenant compte de l'influence de la terre — ce sont trois équations, dites équations de Maxwell — mais les calculs subséquents deviennent inextricables, et il semble impossible d'en tirer des formules pratiques maniables. Les auteurs qui se sont occupés de la question ont été, en conséquence, contraints de négliger certains termes très petits, et sont arrivés à des formules approximatives pour la capacité d'un fil d'une ligne triphasée [1]).

Je me propose de reprendre ce problème, sans me permettre les approximations dont j'ai parlé, mais par une voie nouvelle, et l'on constatera que les calculs à aucun moment ne cessent d'être symétriques et que les formules finales n'ont pas la complication attendue.

2° Observations sur la définition de la capacité

Il est utile tout d'abord de rappeler quelques définitions ou formules connues, pour mettre un peu de clarté dans le sujet, mais principalement parce que ce qu'on appelle *capacité d'un fil* dans une ligne triphasée n'est pas une *capacité* dans le sens classique de ce mot.

Le terme *capacité* a une définition nette seulement dans le cas d'un conducteur seul dans l'espace,

[1]) Consulter sur ce sujet: Induktion und Kapazität von Leitungen, von *J. Fischer-Hinnen*; Bull. ASE 1917, No. 12, p. 347—365. — Résumé pratique du calcul électrique des transmissions d'énergie à haute tension par l'emploi d'abaques; par *A. Blondel* et *Ch. Lavanchy*, Rev. gén. Electr. 1923, t. II, p. 792—795.

ou dans le cas d'un condensateur, c'est-à-dire du système formé de deux conducteurs isolés (armatures), entre lesquels est localisé le champ électrique, ce champ étant produit par des charges égales et de signes contraires portées par les deux conducteurs [2]).

Si q est la charge d'une armature, u la différence de potentiel entre les armatures, il y a proportionnalité entre q et u, et le rapport constant

$$C = \frac{q}{u}$$

est appelé *capacité* du condensateur.

On sait que si trois conducteurs chargés sont en présence, il existe entre les trois charges et les potentiels de ces conducteurs des relations linéaires. Si ces relations sont présentées sous la forme de trois équations résolues par rapport aux charges, les coefficients constants qui interviennent comme facteurs des potentiels sont les *coefficients de capacité*. On ne peut pas les appeler en toute rigueur des *capacités*, ce terme ne répondant plus à la définition signalée plus haut, savoir le rapport constant entre la charge d'un conducteur et son potentiel.

3° Extension de la notion de capacité

Cependant on peut se demander s'il est possible, *dans certaines conditions*, d'attribuer à chaque conducteur une constante C dépendant des dimensions du conducteur envisagé et de sa position par rapport aux deux autres, de telle sorte que, pour ce conducteur on ait encore la relation

$$q = C u$$

Nous pensons aux trois conducteurs d'une ligne triphasée, lesquels forment un système très particulier à cause des tensions triphasées que nous supposons exister entre ces conducteurs deux à deux.

Si cela est possible, la constante C relative à un fil pourra s'appeler encore, par extension, *capacité de la ligne par fil*, et la connaissance de cette constante permettra de calculer très simplement le courant de charge dans ce fil, ce qui constitue le but pratique du problème.

Pour que la charge d'un conducteur soit proportionnelle à son potentiel, il suffit quelquefois de choisir comme origine des potentiels le potentiel d'un point très particulier du champ. Mais même quand cela ne paraîtrait pas possible, il n'est pas interdit d'appeler *capacités* ces coefficients par lesquels on caractérise chaque fil de ligne. Ce sont des grandeurs auxiliaires utiles dans le calcul du courant de charge.

4° Explications sur le potentiel

Le potentiel en un point dans un champ électrique est une fonction des coordonnées de ce point.

[2]) Il n'y a pas de différence essentielle entre ces deux cas. Le conducteur isolé, chargé, et seul dans l'espace constitue l'une des armatures, l'autre étant la sphère infinie.

Cette grandeur auxiliaire v a la propriété suivante:

Le travail effectué par les forces du champ correspondant au transport de l'unité positive de quantité d'électricité du point *1* au point *2* par un chemin quelconque est égal à la différence de potentiel $v_1 - v_2$ entre ces deux points.

La valeur de ce travail n'est pas altérée si à cette fonction potentielle on ajoute une constante arbitraire, ou, ce qui revient au même, si on fixe à une valeur arbitraire le potentiel en un point déterminé du champ. D'ordinaire on déclare nul le potentiel en un point situé à une distance infinie de toutes les charges du champ. Mais on peut aussi poser $v = 0$ pour un point du champ choisi tel qu'on le voudra.

Nous avons dit que le potentiel est une grandeur auxiliaire; en effet seule une *différence de potentiel* peut être mesurée et peut figurer dans une formule pratique.

5° Champ électrique d'un cylindre indéfini uniformément chargé

Un cylindre conducteur de rayon r et de longueur indéfinie possède une charge q (positive ou négative) par unité de longueur, répartie uniformément sur tout le pourtour (fig. 1). Il règne au-

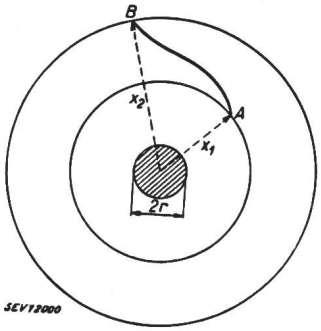

Fig. 1.
Cylindre électriquement chargé et deux surfaces équipotentielles

tour du cylindre et sur celui-ci un champ électrique dont les surfaces équipotentielles sont des cylindres coaxiaux. L'intensité de ce champ à la distance x de l'axe est donnée par

$$E = \frac{2q}{x} \quad \text{(unités électrostatiques)}$$

Si une charge + 1 est transportée du point A, situé à la distance x_1, au point B, situé à la distance x_2, par un chemin quelconque, le travail effectué par les forces du champ ou différence de potentiel entre A et B est donné par la formule

$$v_A - v_B = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2q}{x}\, dx = 2q \ln \frac{x_2}{x_1} \qquad (2)$$

Cette formule est valable soit qu'on ait $x_2 > x_1$ ou au contraire $x_2 < x_1$, et quel que soit le signe de q.

6° Le courant de charge dans une ligne triphasée à trois fils dissymétrique, en négligeant l'influence de la terre

A la rigueur, nous pourrions aborder dès maintenant le cas où les trois fils sont à une certaine

distance de la terre, que l'on admet plane et bonne conductrice; en supposant ensuite cette distance infiniment grande, nous aurions le cas particulier où l'influence de la terre est négligée. Cependant nous préférons, afin de faciliter l'exposition, débuter par ce cas particulier.

Soit une ligne triphasée sans fil neutre, dissymétrique, dont les trois conducteurs occupent les sommets d'un triangle A_1, A_2, A_3 de côtés a, b, c (fig. 2). Chaque conducteur a le même rayon r, assez petit par rapport aux distances a, b, c de façon à n'avoir pas à tenir compte de la distribution inégale des charges sur les conducteurs. Ces

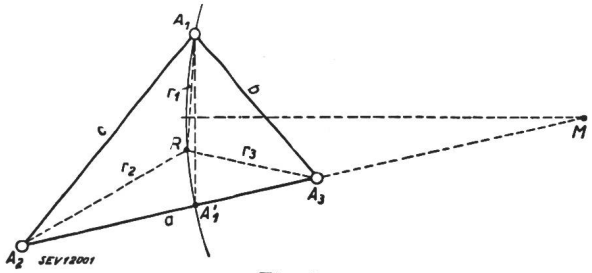

Fig. 2.
Les trois fils d'une ligne triphasée dissymétrique

charges par unité de longueur q_1, q_2, q_3 sont inconnues et on doit les calculer de manière à rendre compte des tensions rigoureusement triphasées existant entre les conducteurs.

Nous avons tout d'abord

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0 \qquad (3)$$

car c'est une proposition fondamentale de l'électrostatique que, dans un système clos, la somme algébrique des charges est nulle.

Soit R un point du plan, provisoirement indéterminé; r_1, r_2, r_3 ses distances aux points A_1, A_2, A_3. Par définition le potentiel du point R est nul.

Le potentiel v_1 du conducteur A_1 est égal au travail qui correspond au déplacement d'une charge $+1$ de la surface du conducteur A_1 au point R, travail fait par les forces du champ. On aura donc, en appliquant la formule (2) et en observant que le champ en question est la somme de trois champs composants, la formule

$$v_1 = 2q_1 \ln \frac{r_1}{r} + 2q_2 \ln \frac{r_2}{c} + 2q_3 \ln \frac{r_3}{b} \qquad (4)$$

On a semblablement pour les potentiels des deux autres conducteurs A_2 et A_3 les formules

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= 2q_2 \ln \frac{r_2}{r} + 2q_3 \ln \frac{r_3}{a} + 2q_1 \ln \frac{r_1}{c} \\ v_3 &= 2q_3 \ln \frac{r_3}{r} + 2q_1 \ln \frac{r_1}{b} + 2q_2 \ln \frac{r_2}{a} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Déterminons le point R de telle sorte qu'on ait

$$\frac{r_2}{c} = \frac{r_3}{b}, \quad \frac{r_3}{a} = \frac{r_1}{c}, \quad \frac{r_1}{b} = \frac{r_2}{a}$$

ou bien

$$a r_1 = b r_2 = c r_3 \qquad (6)$$

On peut construire géométriquement le point R. Puisque $\frac{r_2}{r_3} = \frac{c}{b}$, il est sur le cercle lieu des points dont le rapport des distances aux deux points A_2 et A_3 est constant. Ce cercle passe par A_1 et par le point A'_1 du côté $A_2 A_3$ atteint par la bissectrice de l'angle A_1. Son centre M est déterminé par l'intersection de $A_2 A_3$ et de la perpendiculaire élevée au milieu de $A_1 A'_1$. Un second cercle, analogue au précédent, passant par A_2, coupe le premier au point cherché R, et pour ce point on a la proportion $\frac{r_3}{r_1} = \frac{a}{c}$. Le 3me cercle passe aussi par le même point R, puisque des égalités $\frac{r_2}{r_3} = \frac{c}{b}$, $\frac{r_3}{r_1} = \frac{a}{c}$, on déduit $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{a}$. Ces trois cercles se coupent toujours, car chacun d'eux contient comme corde une bissectrice du triangle $A_1 A_2 A_3$, et le point commun aux trois bissectrices est intérieur aux trois cercles.

Cette étude géométrique était nécessaire, pour que nous fussions certains de l'existence du point R. La construction donne même deux points R; on choisira l'un quelconque des deux.

D'après (6) les produits $a r_1$, $b r_2$, $c r_3$ sont égaux; désignons par ϱ^2 leur valeur commune. On a

$$r_1 = \frac{\varrho^2}{a}, \quad r_2 = \frac{\varrho^2}{b}, \quad r_3 = \frac{\varrho^2}{c}$$

L'équation (4) peut s'écrire

$$v_1 = 2q_1 \ln \frac{\varrho^2}{a\,r} + 2q_2 \ln \frac{\varrho^2}{b\,c} + 2q_3 \ln \frac{\varrho^2}{b\,c}$$

$$v_1 = 2q_1 \ln \frac{\varrho^2}{a\,r} + 2\,(q_2 + q_3) \ln \frac{\varrho^2}{b\,c}$$

et puisque, d'après (3), $q_2 + q_3 = -q_1$

$$v_1 = 2q_1 \ln \frac{\varrho^2}{a\,r} - 2q_1 \ln \frac{\varrho^2}{b\,c}$$

$$v_1 = 2q_1 \ln \frac{b\,c}{a\,r}$$

En traitant semblablement les deux autres équations (5) on obtient, en tout, les trois suivantes:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 2q_1 \ln \frac{b\,c}{a\,r} \\ v_2 &= 2q_2 \ln \frac{a\,c}{b\,r} \\ v_3 &= 2q_3 \ln \frac{a\,b}{c\,r} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Introduisons les constantes

$$C_1 = \frac{1}{2 \ln \frac{b\,c}{a\,r}}, \quad C_2 = \frac{1}{2 \ln \frac{a\,c}{b\,r}}, \quad C_3 = \frac{1}{2 \ln \frac{a\,b}{c\,r}} \qquad (8)$$

On aura alors

$$q_1 = C_1 v_1, \qquad q_2 = C_2 v_2, \qquad q_3 = C_3 v_3 \quad (9)$$

Les constantes C_1, C_2, C_3 sont les *capacités* des trois fils de phase, dans le sens étendu de ce mot.

Les calculs qui suivent ont pour but de déterminer les potentiels v_1, v_2, v_3 en grandeur et en phase.

Introduisons les tensions entre fils u_1, u_2, u_3

$$\left.\begin{aligned} v_1 - v_2 &= u_1 \\ v_2 - v_3 &= u_2 \\ v_3 - v_1 &= u_3 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Puisque $q_1 + q_2 + q_3 = 0$, les équations (9) donnent

$$C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3 = 0 \quad (11)$$

Des équations (10) et (11) on déduit

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{C_2}{C_1 + C_2 + C_3} u_1 - \frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3} u_3 \\ v_2 &= \frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3} u_2 - \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} u_1 \\ v_3 &= \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} u_3 - \frac{C_2}{C_1 + C_2 + C_3} u_2 \end{aligned}\right\} (12)$$

Si nous supposons les tensions composées u_1, u_2, u_3 rigoureusement triphasées (amplitudes égales, décalage 120°), les potentiels v_1, v_2, v_3 sont des grandeurs alternatives, mais seulement approximativement triphasées. Dans le diagramme des tensions, le point P, origine des vecteurs v_1, v_2, v_3 qui aboutissent aux sommets du triangle équilatéral ABC, n'est pas exactement au centre (fig. 3).

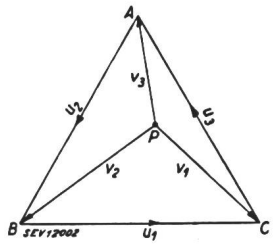

Fig. 3.
Diagramme des tensions

Désignons par V_1 la valeur efficace de v_1 et par U celle de u_1, u_2 ou u_3. Nous déduisons de la première équation (12), en remarquant que l'angle formé par u_1 et $-u_3$ est 60°,

$$V_1^2 = \frac{C_2^2 + 2\, C_2 C_3 \cos 60 + C_3^2}{(C_1 + C_2 + C_3)^2}\, U^2$$

Puisque $\cos 60 = 1/2$, nous avons la formule suivante et deux formules analogues

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{\sqrt{C_2^2 + C_2 C_3 + C_3^2}}{C_1 + C_2 + C_3}\, U \\ V_2 &= \frac{\sqrt{C_1^2 + C_1 C_3 + C_3^2}}{C_1 + C_2 + C_3}\, U \\ V_3 &= \frac{\sqrt{C_1^2 + C_1 C_2 + C_2^2}}{C_1 + C_2 + C_3}\, U \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Jusqu'ici toutes les grandeurs étaient évaluées dans le système électrostatique. Mais dans les formules (13) nous pouvons très bien supposer que les potentiels V_1, V_2, V_3 et la tension U sont des valeurs efficaces exprimées en volts. Quant aux capacités, puisque dans (13) interviennent seulement leurs rapports, peu importe qu'on les exprime en unités électrostatiques par unité de longueur (cm), comme il est supposé dans les formules (8), ou en farads pour la longueur totale de la ligne.

Pour obtenir les intensités des courants de charge dans les trois conducteurs, il nous faut reprendre les formules (9), les appliquer à la ligne entière et admettre que toutes les grandeurs sont évaluées en unités pratiques: volts, coulombs, farads.

C_1 par exemple sera la capacité du fil A_1 dont la longueur est l km, et l'on aura, le symbole log désignant les logarithmes vulgaires

$$C_1 = \frac{100\,000\; l}{9 \cdot 10^{11} \cdot 2{,}303 \log \dfrac{b\,c}{a\,r}} \text{ farads}$$

$$C_1 = \frac{0{,}02413\; l}{\log \dfrac{b\,c}{a\,r}}\; 10^{-6}\,\text{F} \quad (14)$$

En prenant la dérivée par rapport au temps des deux membres des équations (9), se rappelant que $\frac{dq}{dt} = i$, puis prenant les valeurs efficaces et enfin désignant par ω la pulsation, on a les formules suivantes pour les courants de charge

$$I_1 = C_1 \omega V_1; \quad I_2 = C_2 \omega V_2; \quad I_3 = C_3 \omega V_3 \quad (15)$$

7° Résumé

Pour obtenir le courant de charge qui circule dans le fil A_1, on calcule d'abord la capacité de ce fil au moyen de la formule

$$C_1 = \frac{0{,}02413\; l}{\log \dfrac{b\,c}{a\,r}}\; 10^{-6}\,\text{F} \quad (16)$$

l étant la longueur de la ligne en km, a le côté du triangle opposé au sommet A_1, b et c les deux autres côtés. On calcule également les capacités C_2 et C_3 des deux autres fils; elles sont données par des formules analogues. Les valeurs obtenues permettent ensuite de se procurer la tension simple du fil A_1

$$V_1 = \frac{\sqrt{C_2^2 + C_2 C_3 + C_3^2}}{C_1 + C_2 + C_3}\, U \quad (17)$$

Enfin on calcule le courant de charge du fil considéré par la formule

$$I_1 = C_1 \omega V_1 \quad (18)$$

8° Exemple numérique

Les trois fils d'une ligne de 40 km de longueur forment une nappe horizontale conformément à la fig. 4. Rayon de chaque fil 0,45 cm. Ecartement $a = 120$ cm. Tension composée $U = 35\,000$ V.

Les capacités C_1 et C_3 ont pour valeur commune

$$C_1 = C_3 = \frac{0{,}02413 \cdot 40}{\log \frac{a \cdot 2\,a}{0{,}45 \cdot a}} 10^{-6} =$$

$$\frac{0{,}9652}{\log \frac{240}{0{,}45}} 10^{-6} = 0{,}3539 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}$$

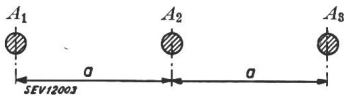

Fig. 4.

Celle du conducteur A_2 est

$$C_2 = \frac{0{,}02413 \cdot 40}{\log \frac{a \cdot a}{0{,}45 \cdot 2a}} 10^{-6}\ \mathrm{F} =$$

$$\frac{0{,}9652}{\log \frac{120}{0{,}9}} 10^{-6} = 0{,}4542 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}$$

On a ensuite

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1{,}162 \cdot 10^{-6}$$
$$C_2^2 + C_2 C_3 + C_3^2 = 0{,}49236 \cdot 10^{-12}$$
$$V_1 = V_3 = \frac{\sqrt{0{,}49236}}{1{,}162}\, 35\,000 = 21\,135\ \mathrm{V}$$
$$C_1^2 + C_1 C_3 + C_3^2 = 0{,}37582 \cdot 10^{-12}$$
$$V_2 = \frac{\sqrt{0{,}37582}}{1{,}162}\, 35\,000 = 18\,465\ \mathrm{V}$$

Les courants de charge ont pour valeurs

$$I_1 = I_3 = 0{,}3539 \cdot 10^{-6} \cdot 314 \cdot 21\,135 = \underline{2{,}350\ \mathrm{A}}$$
$$I_2 = 0{,}4542 \cdot 10^{-6} \cdot 314 \cdot 18\,465 = \underline{2{,}635\ \mathrm{A}}$$

Les formules approximatives communément adoptées pour la capacité de chaque fil de phase sont les suivantes (avec nos notations)

$$C_1 = \frac{0{,}02413\ l}{\log \frac{\sqrt{bc}}{r}} 10^{-6}\ \mathrm{F} \qquad (19)$$

Formules semblables pour C_2 et C_3. On en trouvera la démonstration dans l'article cité de *Fischer-Hinnen*; cet auteur donne d'ailleurs un grand nombre de formules pratiques se rapportant à plusieurs fils et aux dispositions des conducteurs les plus diverses. Pour le calcul des courants de charge on adopte la tension simple, soit $U_0 = \frac{U}{\sqrt{3}}$, de sorte qu'ils sont donnés par

$$I_1 = C_1 \omega U_0,\quad I_2 = C_2 \omega U_0,\quad I_3 = C_3 \omega U_0 \qquad (20)$$

Les formules que nous avons établies au n° 6 pour C_1, C_2, C_3 ne concordent pas et n'ont pas à concorder avec celles de Fischer-Hinnen. Mais ces dernières ont indéniablement un air d'incohérence du moment qu'elles conduisent à des courants de charge différents, tandis que, pour leur établissement, on suppose ces courants de charge égaux. Aussi Fischer-Hinnen, dans l'exemple numérique qu'il traite (c'est d'ailleurs le même que nous venons de donner) conclut-il en prenant la moyenne de ces trois courants.

A notre avis, il serait préférable dans ce cas, de préparer les formules de telle sorte qu'on obtienne immédiatement cette moyenne. Ainsi les trois dénominateurs des formules (19) sont différents; si on en prend la moyenne, on obtient l'unique formule

$$C = \frac{0{,}02413\ l}{\log \frac{\sqrt[3]{a\,b\,c}}{r}} 10^{-6}\ \mathrm{F} \qquad (21)$$

de sorte qu'on est naturellement conduit à la conclusion que déduisent de leurs calculs *Blondel et Lavanchy* [3]), savoir: Dans une ligne triphasée dissymétrique permutée, on peut en première approximation remplacer le triangle a, b, c par un triangle équilatéral de côté $\sqrt[3]{abc}$ et appliquer la formule (1).

Appliquons la formule (21) à notre cas en faisant

$a = 120$ cm, $b = 240$ cm, $c = 120$ cm,
$r = 0{,}45$ cm, $l = 40$ km.

On trouve

$$C = \frac{0{,}02413 \cdot 40}{\log \frac{\sqrt[3]{120^2 \cdot 240}}{0{,}45}} 10^{-6} = 0{,}38206 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}$$

$$I = 0{,}38206 \cdot 10^{-6} \cdot 314 \cdot \frac{35\,000}{\sqrt{3}} = \underline{2{,}425\ \mathrm{A}}$$

La formule approximative que nous venons d'employer (21) donne pour cette moyenne une valeur remarquablement exacte, puisque la moyenne des trois courants de charge trouvés précédemment est 2,445 A.

9° Le courant de charge dans une ligne triphasée à trois fils dissymétrique, en tenant compte de l'influence de la terre

Soient A_1, A_2, A_3 les trois conducteurs d'une ligne triphasée, TT' la terre (fig. 5). On tient compte de l'influence de la terre en imaginant, symétriquement placés par rapport à TT', trois conducteurs A_1', A_2', A_3' ayant des charges respectivement égales et de signes contraires à celles des premiers. Le champ électrique dans l'espace au-dessus de TT' n'est pas changé par cette substitution (principe des images de Lord Kelvin).

Nous changerons un peu nos notations. Les distances mutuelles des conducteurs A_1, A_2, A_3 seront désignés par d_{12}, d_{23}, d_{13}. Introduisons les distances d'un conducteur quelconque, par exemple A_1, aux trois images A_1', A_2', A_3'; nous les notons D_{11}, D_{12},

[3]) l. c. p. 795.

D_{13}. Il y a au total 6 distances croisées égales deux à deux; par exemple $A_1 A_2' = A_2 A_1' = D_{12}$.

Nous prenons le potentiel du point R comme origine des potentiels; c'est le même point qui a été déterminé au n° 6. Le potentiel v_1 à la surface

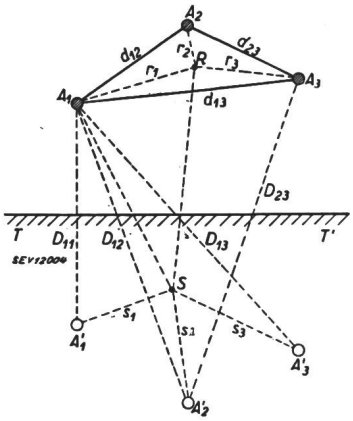

Fig. 5.
Les trois fils d'une ligne triphasée dissymétrique et leurs images par rapport à la terre

de A_1 est égal au travail qui correspond au déplacement de la charge $+1$ de A_1 jusqu'à R, travail effectué par les forces du champ produit par toutes les charges présentes.

Comme ces charges présentes sont au nombre de six, savoir: q_1, q_2, q_3, $-q_1$, $-q_2$, $-q_3$, le champ réellement existant est la résultante de six champs partiels.

La partie du potentiel v_1 dû à q_1, q_2, q_3 est

$$2\,q_1 \ln \frac{r_1}{r} + 2\,q_2 \ln \frac{r_2}{d_{12}} + 2\,q_3 \ln \frac{r_3}{d_{13}}$$

Reste à écrire la partie du potentiel v_1 due aux charges $-q_1$, $-q_2$, $-q_3$. Pour aller de A_1 à R nous passons par S, point pour le moment indéterminé, dont les distances à A_1', A_2', A_3' sont s_1, s_2, s_3, de sorte que nous avons pour le parcours A_1S

$$-\,2\,q_1 \ln \frac{s_1}{D_{11}} - 2\,q_2 \ln \frac{s_2}{D_{12}} - 2\,q_3 \ln \frac{s_3}{D_{13}}$$

Nous avons encore trois termes à écrire pour le parcours SR. Nous désignons ces trois termes simplement par v_0, de sorte que v_1 a pour expression

$$v_1 = 2\,q_1 \ln \frac{r_1}{r} + 2\,q_2 \ln \frac{r_2}{d_{12}} + 2\,q_3 \ln \frac{r_3}{d_{13}}$$
$$-\,2q_1 \ln \frac{s_1}{D_{11}} - 2\,q_2 \ln \frac{s_2}{D_{12}} - 2\,q_3 \ln \frac{s_3}{D_{13}} + v_0 \tag{22}$$

Les potentiels des deux autres conducteurs donnent lieu à des expressions semblables. Il est à remarquer que v_0 sera le même dans les trois expressions.

$$v_2 = 2\,q_2 \ln \frac{r_2}{r} + 2\,q_3 \ln \frac{r_3}{d_{23}} + 2\,q_1 \ln \frac{r_1}{d_{12}}$$
$$-\,2\,q_2 \ln \frac{s_2}{D_{22}} - 2\,q_3 \ln \frac{s_3}{D_{23}} - 2\,q_1 \ln \frac{s_1}{D_{12}} + v_0 \tag{23}$$

$$v_3 = 2\,q_3 \ln \frac{r_3}{r} + 2\,q_1 \ln \frac{r_1}{d_{13}} + 2\,q_2 \ln \frac{r_2}{d_{23}}$$
$$-\,2\,q_3 \ln \frac{s_3}{D_{33}} - 2\,q_1 \ln \frac{s_1}{D_{13}} - 2\,q_2 \ln \frac{s_2}{D_{23}} + v_0 \tag{24}$$

On détermine le point R par les équations

$$\frac{r_2}{d_{12}} = \frac{r_3}{d_{13}}, \quad \frac{r_3}{d_{23}} = \frac{r_1}{d_{12}}, \quad \frac{r_1}{d_{13}} = \frac{r_2}{d_{23}}$$

qui peuvent s'écrire

$$r_1\,d_{23} = r_2 d_{13} = r_3\,d_{12} \tag{25}$$

On détermine semblablement le point S par les équations

$$\frac{s_2}{D_{12}} = \frac{s_3}{D_{13}}, \quad \frac{s_3}{D_{23}} = \frac{s_1}{D_{12}}, \quad \frac{s_1}{D_{13}} = \frac{s_2}{D_{23}}$$

qui peuvent s'écrire

$$s_1\,D_{23} = s_2\,D_{13} = s_3\,D_{12} \tag{26}$$

On remarquera que, soit pour R, soit pour S, les trois équations se réduisent à deux équations indépendantes.

Par un examen géométrique nous nous sommes déjà assurés de l'existence du point R. On pourrait montrer également que le point S existe toujours [4]).

Désignons par ϱ^2 la valeur commune des produits (25) et par σ^2 la valeur commune des produits (26). On a

$$r_1 = \frac{\varrho^2}{d_{23}}, \quad r_2 = \frac{\varrho^2}{d_{13}}, \quad r_3 = \frac{\varrho^2}{d_{12}}$$
$$s_1 = \frac{\sigma^2}{D_{23}}, \quad s_2 = \frac{\sigma^2}{D_{13}}, \quad s_3 = \frac{\sigma^2}{D_{12}}$$

Les expressions (22), (23) et (24) pourront s'écrire

$$v_1 = 2\,q_1 \ln \frac{\varrho^2}{r\,d_{23}} + 2\,(q_2 + q_3) \ln \frac{\varrho^2}{d_{12}\,d_{13}}$$
$$-\,2\,q_1 \ln \frac{\sigma^2}{D_{11}\,D_{23}} - 2\,(q_2 + q_3) \ln \frac{\sigma^2}{D_{12}\,D_{13}} + v_0$$

$$v_2 = 2\,q_2 \ln \frac{\varrho^2}{r\,d_{13}} + 2\,(q_3 + q_1) \ln \frac{\varrho^2}{d_{12}\,d_{23}}$$
$$-\,2\,q_2 \ln \frac{\sigma^2}{D_{22}\,D_{13}} - 2\,(q_3 + q_1) \ln \frac{\sigma^2}{D_{12}\,D_{23}} + v_0$$

$$v_3 = 2\,q_3 \ln \frac{\varrho^2}{r\,d_{12}} + 2\,(q_1 + q_2) \ln \frac{\varrho^2}{d_{13}\,d_{23}}$$
$$-\,2\,q_3 \ln \frac{\sigma^2}{D_{33}\,D_{12}} - 2\,(q_1 + q_2) \ln \frac{\sigma^2}{D_{13}\,D_{23}} + v_0$$

Puisque $q_1 + q_2 + q_3 = 0$, ces formules se laissent transformer. Pour v_1, par exemple, nous avons

$$v_1 = 2\,q_1 \ln \frac{\varrho^2}{r\,d_{23}} - 2\,q_1 \ln \frac{\varrho^2}{d_{12}\,d_{13}}$$
$$-\,2\,q_1 \ln \frac{\sigma^2}{D_{11}\,D_{23}} + 2\,q_1 \ln \frac{\sigma^2}{D_{12}\,D_{13}} + v_0$$

ou bien

[4]) C'est seulement pour ne pas trop allonger cet exposé que nous ne reproduisons pas ici la démonstration que nous avons trouvée de l'existence du point S. Elle est un peu plus difficile que celle qui concerne le point R. Nous l'abandonnons au lecteur.

$$v_1 = 2\,q_1 \ln \frac{d_{12}\,d_{13}}{r\,d_{23}} - 2\,q_1 \ln \frac{D_{12}\,D_{13}}{D_{11}\,D_{23}} + v_0$$

ou encore

$$v_1 = 2\,q_1 \ln \frac{d_{12}\,d_{13}\,D_{11}\,D_{23}}{r\,d_{23}\,D_{12}\,D_{13}} + v_0$$

On transforme semblablement les expressions pour v_2 et v_3, et l'on aura les formules suivantes

$$\left.\begin{aligned} v_1 - v_0 &= 2\,q_1 \ln \frac{d_{12}\,d_{13}\,D_{11}\,D_{23}}{r\,d_{23}\,D_{12}\,D_{13}} \\ v_2 - v_0 &= 2\,q_2 \ln \frac{d_{23}\,d_{12}\,D_{22}\,D_{13}}{r\,d_{13}\,D_{23}\,D_{12}} \\ v_3 - v_0 &= 2\,q_3 \ln \frac{d_{13}\,d_{23}\,D_{33}\,D_{12}}{r\,d_{12}\,D_{13}\,D_{23}} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

On posera

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2 \ln \dfrac{d_{12}\,d_{13}\,D_{11}\,D_{23}}{r\,d_{23}\,D_{12}\,D_{13}}} \\ C_2 &= \frac{1}{2 \ln \dfrac{d_{23}\,d_{12}\,D_{22}\,D_{13}}{r\,d_{13}\,D_{23}\,D_{12}}} \\ C_3 &= \frac{1}{2 \ln \dfrac{d_{13}\,d_{23}\,D_{33}\,D_{12}}{r\,d_{12}\,D_{13}\,D_{23}}} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

de sorte que les équations (27) pourront s'écrire

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= C_1\,(v_1 - v_0) \\ q_2 &= C_2\,(v_2 - v_0) \\ q_3 &= C_3\,(v_3 - v_0) \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Introduisons les différences de potentiel u_1, u_2, u_3 supposées rigoureusement triphasées, entre les conducteurs deux à deux. On a évidemment

$$\left.\begin{aligned} (v_1 - v_0) - (v_2 - v_0) &= u_1 \\ (v_2 - v_0) - (v_3 - v_0) &= u_2 \\ (v_3 - v_0) - (v_1 - v_0) &= u_3 \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Pour simplifier les écritures nous écrivons v_{A1}, v_{A2}, v_{A3} à la place des différences $v_1 - v_0$, $v_2 - v_0$, $v_3 - v_0$, de sorte que les équations (29) se présenteront sous la forme

$$q_1 = C_1 v_{A1}, \quad q_2 = C_2 v_{A2}, \quad q_3 = C_3 v_{A3} \quad (31)$$

et les équations (30) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} v_{A1} - v_{A2} &= u_1 \\ v_{A2} - v_{A3} &= u_2 \\ v_{A3} - v_{A1} &= u_3 \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Ainsi écrites, ces équations (31) et (32) ressemblent tout à fait aux équations (9) et (10) de notre premier problème. Il sera donc inutile de répéter ici les calculs que nous avons faits alors et nous pouvons nous contenter de formuler les résultats.

Si donc on désigne par V_{A1}, V_{A2}, V_{A3} les valeurs efficaces de v_{A1}, v_{A2}, v_{A3}, et par U la valeur efficace commune de u_1, u_2, u_3, on a

$$\left.\begin{aligned} V_{A_1} &= \frac{\sqrt{C_2^2 + C_2C_3 + C_3^2}}{C_1 + C_2 + C_3}\,U \\ V_{A_2} &= \frac{\sqrt{C_1^2 + C_1C_3 + C_3^2}}{C_1 + C_2 + C_3}\,U \\ V_{A_3} &= \frac{\sqrt{C_1^2 + C_1C_2 + C_2^2}}{C_1 + C_2 + C_3}\,U \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

et enfin les courants de charge dans les trois conducteurs seront donnés par les formules

$$I_1 = C_1\omega V_{A1};\; I_2 = C_2\omega V_{A2};\; I_3 = C_3\omega V_{A3} \quad (34)$$

Ces formules (33) et (34) sont donc formellement les mêmes que celles que nous avons obtenues dans le cas particulier où l'on néglige l'influence de la terre. Elles ne diffèrent qu'en ce que les capacités C_1, C_2, C_3 sont données par d'autres formules.

10° Résumé

Pour obtenir le courant de charge dans le fil A_1 d'une ligne triphasée à disposition dissymétrique, on calcule d'abord les capacités des trois fils. La capacité du fil A_1, exprimée en farads pour toute la longueur de la ligne, se déduit de la première formule (28); on a

$$C_1 = \frac{0{,}02413\;l}{\log \dfrac{d_{12}\,d_{13}\,D_{11}\,D_{23}}{r\,d_{23}\,D_{12}\,D_{13}}}\;10^{-6}\;\mathrm{F} \quad (35)$$

Les capacités C_2 et C_3 s'obtiennent en transformant les deux autres formules (28) de la même façon.

On calcule ensuite la grandeur V_{A1} donnée par la première formule (33), savoir

$$V_{A_1} = \frac{\sqrt{C_2^2 + C_2C_3 + C_3^2}}{C_1 + C_2 + C_3}\,U$$

Enfin on obtiendra le courant de charge dans le fil A_1 par la première formule (34)

$$I_1 = C_1\omega V_{A1}$$

11° Exemple numérique

Si l'on voulait tenir compte de l'influence de la terre dans l'exemple qui a été donné au n° 8, en supposant par exemple que la hauteur commune des trois conducteurs soit 7 m, on trouverait de nouveaux courants de charge, mais présentant avec les premiers des différences tout à fait insignifiantes. Cela provient de ce que les distances mutuelles des fils sont petites par rapport à leur distance à la terre.

C'est pourquoi nous considérons maintenant une ligne existante, à haute tension, dont les câbles sont très écartés. Ces trois câbles sont de nouveau en nappe horizontale, disposition qui s'écarte donc notablement du triangle équilatéral, et à cause de laquelle les courants de charge seront nettement différents.

Voici des données concernant cette ligne qui unit l'usine de Big-Creek au territoire avoisinant de Los Angelès [4]).

Fil de terre au sommet du pylône
Ame d'acier: 7 fils d'une section totale de 40 mm²
Torons d'aluminium: section totale 306 mm²
Espacement des conducteurs: 5,27 m
Hauteur au-dessus du sol: 10 m
Tension étoilée: 159,5 kV
Longueur de la ligne: 19,5 miles (31,38 km)
Fréquence: 60 Hz

D'après ces données, la section totale d'un câble est 346 mm², et le rayon du cercle qui a même surface géométrique que le câble est

$$r = 1{,}184 \text{ cm}$$

Dans la théorie exposée, on a supposé que les trois tensions entre conducteurs avaient même valeur efficace; à cause du phénomène de capacité les trois tensions par rapport à la terre ne peuvent être rigoureusement égales. Vu le manque de renseignements concernant ces tensions, nous adopterons

$$U = 159\,500 \sqrt{3} = 276\,260 \text{ V.}$$

En nous référant à la fig. 6 nous pouvons calculer les longueurs suivantes:

$d_{12} = d_{23} = 527$ cm; $d_{13} = 1054$ cm;
$D_{11} = D_{22} = D_{33} = 2000$ cm;
$D_{12} = D_{23} = 2068$ cm; $D_{13} = 2261$ cm.

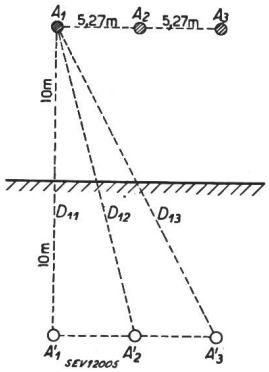

Fig. 6.

Nous appliquons la formule (35), qui dans notre cas se simplifie du moment que $d_{12} = d_{23}$, $D_{12} = D_{23}$.

$$C_1 = \frac{0{,}02413 \cdot 31{,}38}{\log \dfrac{1054 \cdot 2000}{1{,}184 \cdot 2261}} 10^{-6} = 0{,}2614 \cdot 10^{-6}$$

$$C_1 = C_3 = 0{,}2614 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

Pour le conducteur A_2 on a de même

$$C_2 = \frac{0{,}02413\ l}{\log \dfrac{d_{23}\, d_{12}\, D_{22}\, D_{13}}{r\, d_{13}\, D_{23}\, D_{12}}} 10^{-6} \text{ F}$$

$$C_2 = \frac{0{,}02413 \cdot 31{,}38}{\log \dfrac{527^2 \cdot 2000 \cdot 2261}{1{,}184 \cdot 1054 \cdot 2068^2}} 10^{-6} = 0{,}3193 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$V_{A_1} = V_{A_3} = \frac{\sqrt{C_2^2 + C_2 C_3 + C_3^2}}{C_1 + C_2 + C_3} U = 165\,390 \text{ V}$$

$$V_{A_2} = \frac{\sqrt{C_1^2 + C_1 C_3 + C_3^2}}{C_1 + C_2 + C_3} U = 148\,560 \text{ V}$$

Calcul des courants de charge ($\omega = 2\pi\, 60 = 377$)

$$I_1 = C_1 \omega V_{A1} = 0{,}2614 \cdot 10^{-6} \cdot 377 \cdot 165\,390$$
$$I_1 = I_3 = \underline{16{,}30\ A}$$

$$I_2 = C_2 \omega V_{A2} = 0{,}3193 \cdot 10^{-6} \cdot 377 \cdot 148\,560$$
$$I_2 = \underline{17{,}88\ A}$$

La concordance avec les valeurs trouvées par des mesures ($I_1 = 14{,}80$ A; $I_2 = 15{,}50$ A; $I_3 = 15{,}10$ A) est imparfaite; ceci ne doit pas être imputé aux formules, mais plutôt à des circonstances connues ou inconnues dont il n'est pas tenu compte (présence du fil de terre, flèche des câbles, etc.) et aussi aux mesures elles-mêmes, toujours délicates.

Il est utile, pour faire une comparaison, de négliger l'influence de la terre, et d'appliquer la formule simplifiée (21), en substituant au triangle très déformé constitué par trois points A_1, A_2, A_3 en ligne droite, un triangle équilatéral de côté

$$\sqrt[3]{527 \cdot 527 \cdot 1054} = 664 \text{ cm}$$

La capacité par fil est en moyenne

$$C = \frac{0{,}02413 \cdot 31{,}38}{\log \dfrac{664}{1{,}184}} 10^{-6} = 0{,}2755 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

Le courant de charge est en moyenne

$$I = C\omega U_0 = 0{,}2755 \cdot 10^{-6} \cdot 377 \cdot 159\,500 = 16{,}56 \text{ A}$$

Cette valeur diffère fort peu de la moyenne 16,83 des trois courants de charge que nous avons obtenus par le calcul. Ainsi donc, si on veut par un calcul rapide être orienté sur le courant de charge moyen, on peut négliger l'influence de la terre et imaginer que les trois conducteurs ont la disposition symétrique.

Cette simplification ne doit pas être inconsidérément appliquée à d'autres cas. Si, par exemple, seul le câble A_1 est sous la tension $U_0 = 159\,500$ V, les autres étant isolés, la terre ne doit pas être négligée. Le courant de charge qui circule dans ce fil et fait retour par la terre s'obtient par le calcul suivant:

$$C = \frac{0{,}02413 \cdot 31{,}38}{\log \dfrac{2000}{1{,}184}} 10^{-6} = 0{,}2346 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$I = C\omega U_0 = 0{,}2346 \cdot 10^{-6} \cdot 377 \cdot 159\,500 = 14{,}11 \text{ A}$$

Cette valeur concorde assez bien avec celle qui a été trouvée par une mesure ($I = 13{,}78$ A).

[4]) D'après *R.-J.-C. Wood*, J. Amer. Inst. of Electr. Engrs., t. XLI (1922), p. 471...488. — Lire le compte-rendu de cet article dans la Rev. gén. Electr., du 14 juillet 1923, p. 56.