Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 33 (1942)

Heft: 18

Artikel: Le théorème de la conservation de la puissance réactive

Autor: Lambossy, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1061676

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le théorème de la conservation de la puissance réactive

Par *P. Lambossy*, Fribourg

621.3.016.25

La puissance réactive, définie par le produit UI sin φ jouit dans les calculs électrotechniques de toutes les propriétés de la puissance active UI cos φ. De même que la puissance active totale absorbée par un réseau, aussi compliqué qu'on voudra, est égale à la somme des puissances actives des différentes parties de ce réseau, de même en est-il pour la puissance réactive. C'est le theorème de M. Boucherot. Ce théorème est ici démontré dans toute sa généralité, et on montre, par une interprétation géométrique, que les démonstrations qu'on peut donner, apparemment différentes, ont un lien entre elles. Les unes consistent essentiellement en une rotation d'un système de vecteurs, les autres en un retournement de ce système.

Die Blindleistung, definiert durch das Produkt UI sin φ, erscheint in den elektrotechnischen Rechnungen mit allen Eigenschaften der Wirkleistung UI cos φ. Das Theorem, wonach die von einem beliebig komplizierten Netz total aufgenommene Wirkleistung gleich ist der Summe der Wirkleistungen der verschiedenen Teile des Netzes, gilt, nach Boucherot, gleicherweise für die Blindleistung. Dieses Theorem wird hier in seiner ganzen Allgemeinheit bewiesen und es wird durch eine geometrische Interpretation gezeigt, dass scheinbar sehr verschiedene Beweise miteinander zusammenhängen. Die einen bestehen im wesentlichen aus der Rotation eines Vektorsystems, die andern in der Umkehrung dieses Systems.

1° Introduction

On considère un réseau fermé dont les divers circuits contiennent des forces électromotrices et des appareils récepteurs quelconques. Si U_n est la tension aux extrémités d'un tronçon de ce réseau, I_n le courant qui le parcourt, φ_n le décalage de I_n sur U_n, on a, en régime sinusoïdal,

$$\Sigma\, U_n I_n \cos\varphi_n = 0, \quad \Sigma\, U_n I_n \sin\varphi_n = 0.$$

La première équation exprime le *théorème de la conservation de la puissance active;* comme il offre une certaine évidence, en vertu du principe de la conservation de l'énergie, on pose souvent cette équation comme allant de soi, oubliant qu'elle peut être démontrée par les seules lois du courant électrique.

L'autre équation exprime le *théorème de la conservation de la puissance réactive;* il a été indiqué par M. Boucherot qui l'a qualifié de *principe.* Il convient cependant de ne pas employer ce terme de «principe», puisqu'il s'agit d'un théorème qui se démontre. Malgré sa très grande analogie avec le précédent, sa démonstration n'est toutefois pas si immédiate.

Le théorème de la puissance réactive a fait l'objet d'une quantité d'articles de revues; on a même tenté de l'étendre aux courants non sinusoïdaux. Les premières démonstrations, quoique laborieuses, manquaient de généralité [1]). Un réseau, en effet, n'est pas toujours une association de récepteurs en série et de récepteurs en parallèle. Qu'on pense, par exemple, au schéma du pont de Wheatstone!

M. Langevin [2]) est, je crois, le premier qui ait établi le théorème pour un réseau quelconque. M. Le Cocq [3]), après lui, a donné une variante d'une manière aussi très succincte. J'ai pensé que cette question méritait quelques développements; il importait surtout de montrer le lien qui unit les diverses démonstrations qui ont été données ou qui peuvent aboutir. C'est le sujet de cet article.

2° Relations de réciprocité entre deux réseaux de même configuration

Soit un réseau quelconque, non limité à des bornes, mais complètement fermé, comprenant dans ses circuits [4]) des appareils récepteurs et des sources de courant (fig. 1).

Appliquons aux nœuds du réseau A, B,... la première loi de Kirchhoff.

$$\Sigma i_A = 0, \quad \Sigma i_B = 0, \ldots \qquad (1)$$

$\Sigma i_A = 0$, p. ex., signifie que la somme des courants qui *partent* du point A est nulle.

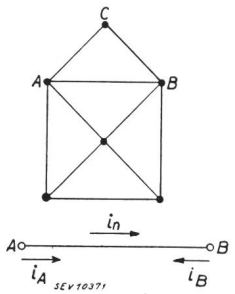

Fig. 1.
Réseau (I)

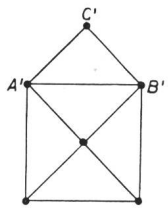

Fig. 2.
Réseau (II)

Multiplions les équations (1) par des *nombres quelconques* v'_A, v'_B,... et ajoutons; il vient

$$v'_A\, \Sigma i_A + v'_B\, \Sigma i_B + \ldots = 0 \qquad (2)$$

Fixons sur chaque circuit un sens positif de courant; pour AB, p. ex., allant de A vers B (fig. 1). Si nous désignons par i_n ce courant, nous avons pour circuit

$$i_A = -\, i_B = i_n$$

Nous trouvons dans l'équation (2) deux termes relatifs à ce circuit, dont la somme peut être transformée; ce sont

$$v'_A i_A + v'_B i_B = (v'_A - v'_B)\, i_n = u'_n i_n$$

Nous avons donc posé $v'_A - v'_B = u'_n$. En opérant ainsi sur chaque groupe de deux termes de l'équation (2), celle-ci peut s'écrire

$$\Sigma\, u_n'\, i_n = 0 \qquad (3)$$

Tandis que les v'_A, v'_B,... étaient arbitraires, les quantités u'_n ne le sont pas complètement, car elles sont liées par certaines relations. Si, p. ex., A, B, C sont trois nœuds du réseau, on a

[1]) Voir p. ex. Swyngedauw: Cours d'électrotechnique, t. II, p. 62.

[2]) Revue générale de l'Electricité, 1917, t. I, p. 1015.

[3]) Même revue, Le Cocq, 1921, t. II, p. 85.

[4]) Circuits ouverts, c'est-à-dire terminés à deux extrémités; quand le circuit considéré sera fermé, je dirai expressément: circuit fermé.

$$v'_A - v'_C = (v'_A - v'_B) + (v'_B - v'_C)$$

ou

$$u'_1 = u'_2 + u'_3$$

Il existe d'autres relations semblables dont le nombre dépend de la forme du réseau. Les u'_n ne sont donc pas tous indépendants. Pour tenir compte automatiquement de cette dépendance mutuelle, imaginons un réseau II de même configuration que le réseau I, mais dont les circuits peuvent être autrement constitués (fig. 2). Supposons les circuits de ce réseau parcourus par des courants, selon un régime quelconque, et prenons pour les nombres v'_A, v'_B, ... les potentiels des points correspondants A', B', ... Les divers u_n' seront donc les différences de potentiel aux extrémités de chaque circuit du réseau II, et les relations dont nous avons parlé seront certainement satisfaites.

Ces explications fixent le sens de la phrase qu'on trouvera dans la suite, que les quantités u'_n «liées entre elles par certaines relations, sont d'ailleurs arbitraires».

Nous avons établi l'équation (3) en partant du réseau I et en associant à ce dernier le réseau II. Si inversement nous considérons I comme le réseau associé de II, nous avons

$$\Sigma\, u_n\, i_n' = 0 \qquad (4)$$

En résumé, entre deux réseaux de même configuration existent les relations de réciprocité exprimées par les équations

$$\Sigma\, u_n'\, i_n = 0, \quad \Sigma\, u_n\, i_n' = 0\ .$$

3° Le théorème de la puissance active

Nous avons un cas particulier important lorsque le réseau associé de I est le réseau I lui-même. Alors chacune des équations (3) et (4) se réduit à

$$\Sigma\, u_n\, i_n = 0 \qquad (5)$$

Nous allons tirer parti de (5) en supposant que les tensions et les courants du réseau sont alternatifs sinusoïdaux. Prenons

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \sqrt{2}\, U_n \sin(\omega t - \Theta_n) \\ i_n &= \sqrt{2}\, I_n \sin(\omega t - \Theta_n - \varphi_n) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

En écrivant ainsi nous avons pris comme origine des phases la phase d'une grandeur électrique quelconque $A \sin \omega t$ du réseau.

Formons le produit

$$u_n i_n = 2\, U_n I_n \sin(\omega t - \Theta_n) \sin(\omega t - \Theta_n - \varphi_n)$$

Le produit des deux sinus se laisse transformer au moyen de la formule

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right]$$

Nous aurons

$$u_n i_n = U_n I_n \cos\varphi_n - U_n I_n \cos(2\omega t - 2\Theta_n - \varphi_n) \qquad (7)$$

Puisque, d'après (5), $\Sigma\, u_n i_n = 0$, nous avons l'équation

$$\Sigma U_n I_n \cos\varphi_n - \Sigma U_n I_n \cos(2\omega t - 2\Theta_n - \varphi_n) = 0 \qquad (8)$$

On peut égaler à zéro séparément les deux sommes, du moment que la 2e contient la variable indépendante t

$$\Sigma\, U_n I_n \cos\varphi_n = 0 \qquad (9)$$

$$\Sigma\, U_n I_n \cos(2\omega t - 2\Theta_n - \varphi_n) = 0$$

L'équation (9) exprime le *théorème de la puissance active.* Comme l'autre équation doit être satisfaite quelle que soit la valeur de t, nous l'écrirons

$$\Sigma\, U_n I_n \cos(2\Theta_n + \varphi_n - \varphi) = 0 \qquad (10)$$

en remplaçant $2\omega t$ par φ. Comme φ est une quantité arbitraire, nous pouvons faire une fois $\varphi = 0$, et une autre fois $\varphi = \frac{\pi}{2}$; il vient

$$\left.\begin{aligned} \Sigma U_n I_n \cos(2\Theta_n + \varphi_n) &= 0 \\ \Sigma U_n I_n \sin(2\Theta_n + \varphi_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Ces deux équations remarquables ressemblent aux équations $\Sigma\, U_n I_n \cos\varphi_n = 0$, $\Sigma\, U_n I_n \sin\varphi_n = 0$, qui expriment les théorèmes de la puissance active et de la puissance réactive, mais ces dernières ne peuvent se déduire de (11) par de simples transformations algébriques.

4° Le théorème de la puissance réactive

En second lieu nous appliquerons l'équation (3) au cas suivant: Le réseau I est alternatif; nous le considérons à l'instant t où il possède une certaine répartition de courants et de tensions. Le réseau II n'est autre que le réseau I, mais considéré à l'époque $t + t_1$. Nous regarderons t comme une variable, t_1 comme une constante, de sorte que les tensions et les courants de II sont décalés du même angle φ par rapport aux tensions et courants correspondants de I.

Tout cela se résume en écrivant l'équation (3) comme suit:

$$\Sigma\ (u_n)_{t+t_1} (i_n)_t = 0$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{2}\, U_n \sin(\omega t + \omega t_1 - \Theta_n) \\ i_n &= \sqrt{2}\, I_n \sin(\omega t - \Theta_n - \varphi_n) \end{aligned}$$

Nous formons le produit $u_n i_n$, le transformons comme il a été expliqué, et obtenons, après avoir remplacé ωt_1 par φ

$$\Sigma U_n I_n \cos(\varphi_n + \varphi) - \Sigma U_n I_n \cos(2\omega t + \varphi - 2\Theta_n - \varphi_n) = 0$$

On peut égaler à zéro séparément les deux sommes, mais la seconde ne nous donnant aucun résultat nouveau, nous aurons simplement

$$\Sigma\, U_n I_n \cos(\varphi_n + \varphi) = 0 \qquad (12)$$

φ étant arbitraire, faisons $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$; il vient

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, U_n I_n \cos\varphi_n &= 0 \\ \Sigma\, U_n I_n \sin\varphi_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

La deuxième équation (13) exprime le *théorème de la puissance réactive.*

5° Interprétation géométrique

En examinant un diagramme nous pourrons en déduire la signification géométrique de l'opération que nous venons de faire, et nous découvrirons en même temps l'opération qui permet de passer des équations (11) aux équations (13).

Le diagramme du réseau I comporte un certain nombre de vecteurs destinés à représenter des tensions et d'autres vecteurs pour les courants. A partir d'un point 0 nous portons autant de vecteurs que le réseau possède de courants. Ces vecteurs ont entre eux des relations; si, p. ex., observant les flèches des courants autour d'un nœud, on a $i_1 = i_2 + i_3$, cette égalité algébrique se traduit en une égalité entre vecteurs $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_3$.

Du même point 0 on fait partir d'autres vecteurs destinés à représenter les tensions, et des remarques analogues peuvent être faites.

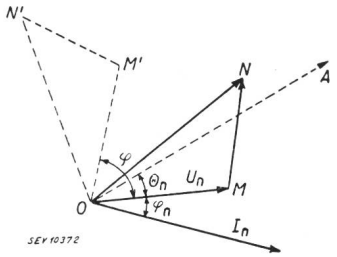

Fig. 3.
Rotation des vecteurs-tensions d'un angle φ

Pour ne pas encombrer la fig. 3 de vecteurs, on a représenté simplement I_n et U_n relatifs à un circuit du réseau et faisant entre eux l'angle φ_n; et aussi deux autres tensions ON et MN liées à U_n afin de donner plus de clarté aux explications qui vont suivre.

D'après les notations que nous avons adoptées, Θ_n est le décalage de U_n par rapport à une grandeur électrique OA dont nous prenons la phase comme origine des phases. L'équation (12) dans laquelle φ est arbitraire montre que l'équation

$$\Sigma\, U_n\, I_n \cos \varphi_n = 0 \qquad (14)$$

ne cesse pas d'être satisfaite quand on augmente tous les décalages φ_n d'un même angle φ. Géométriquement cela revient à *tourner en bloc le système des vecteurs U_n d'un angle quelconque φ.*

6° Retournement des tensions

La démonstration de la formule

$$\Sigma\, U_n I_n \cos(\varphi_n + \varphi) = 0 \qquad (12)$$

peut être reprise sous une forme abrégée et à peine différente en considérant le diagramme.

L'équation

$$\Sigma\, u'_n i_n = 0 \qquad (15)$$

est vérifiée quand on prend pour i_n le vecteur I_n et pour u_n' *le vecteur* $OM = U_n$. Elle conduit au théorème de la puissance active

$$\Sigma\, U_n I_n \cos \varphi_n = 0 \qquad (16)$$

Si nous n'oublions pas que les quantités u'_n, liées entre elles par certaines relations, sont d'ailleurs arbitraires, le fait de tourner les vecteurs U_n d'un même angle φ n'altérera pas ces relations, et le nouvau vecteur $OM' = U_n$ avec l'ancien I_n vérifiera encore l'équation (15) et en conséquence l'équation (16), qui s'écrira alors

$$\Sigma\, U_n I_n \cos(\varphi_n + \varphi) = 0$$

Nous sommes naturellement conduits à un autre changement du système de vecteurs-tensions. Sans modifier leurs relations mutuelles, ni leurs grandeurs, ni leurs angles, nous pouvons effectuer un

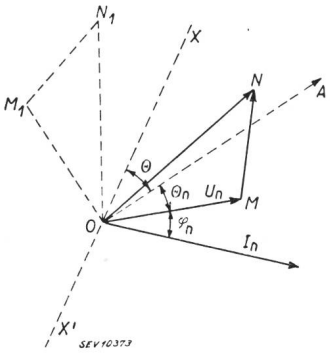

Fig. 4.
Retournement des vecteurs-tensions autour de l'Axe X'X

retournement du système autour d'un axe quelconque $X'X$ passant par 0. Sur la fig. 4 le triangle OMN après un retournement autour de $X'X$ est figuré en OM_1N_1.

Pour fixer la direction de l'axe de rotation, désignons par Θ l'angle AOX. Puisque

$$\text{angle } M_1OX = \text{angle } MOX = \Theta_n + \Theta$$

Le vecteur U_n a tourné de l'angle $2(\Theta_n + \Theta)$ de sorte que le nouveau décalage, c'est-à-dire l'angle M_1OI_n est égal à $\varphi_n + 2(\Theta_n + \Theta)$.

Comme nous l'avons dit, l'équation

$$\Sigma\, U_n I_n \cos \varphi_n = 0$$

ne cessant pas par cela d'être satisfaite, nous y remplaceront φ_n par $2\,\Theta_n + \varphi_n + 2\,\Theta$. Il vient

$$\Sigma\, U_n I_n \cos(2\,\Theta_n + \varphi_n + 2\Theta) = 0.$$

Puisque l'angle Θ est tel qu'on voudra, nous pouvons prendre $2\,\Theta = 0$ et $2\,\Theta = \frac{\pi}{2}$. Il vient

$$\Sigma\, U_n I_n \cos(2\,\Theta_n + \varphi_n) = 0$$
$$\Sigma\, U_n I_n \sin(2\,\Theta_n + \varphi_n) = 0$$

Nous retombons sur les équations (11) et nous voyons aussi quel est leur lien avec les équations (13) [5]).

7° La puissance apparente est un vecteur

Un exemple numérique illustrera les explications qui précèdent et celles qui vont suivre. La fig. 5 re-

[5]) La démonstration de M. Langevin consiste essentiellement en un retournement des tensions autour de l'axe OA. Celle de M. Le Cocq consiste en un retournement des courants autour de l'axe OA.

présente un réseau ouvert dont le diagramme est donné par la fig. 6. Il n'est pas nécessaire de reproduire ici des calculs. Le lecteur contrôlera sur

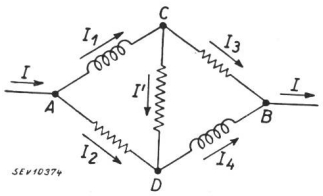

Fig. 5.
Réseau dont il est question dans l'exemple numérique

le diagramme, à l'aide des lignes pointillées, que la première loi de Kirchhoff est bien vérifiée en chaque nœud du réseau, et que la tension entre deux nœuds M et N est la somme géométrique des

U_1 = 520 V
U_2 = 433,2
U_3 = 191
U_4 = 271,7
U' = 309
U = 629,6

I_1 = 28 A
I_2 = 20
I_3 = 17,85
I_4 = 25,26
I' = 14,5
I = 43

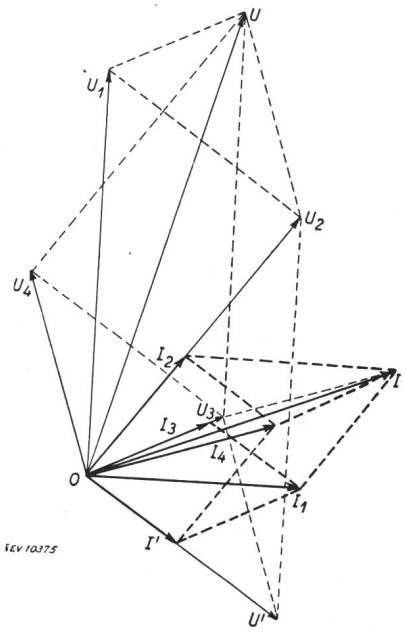

Fig. 6.
Diagramme correspondant au réseau de la fig. 5

tensions sur les divers circuits qui composent un chemin allant de M à N. Ainsi

$$\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}'; \; \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_3$$

Comme il s'agit d'un réseau ouvert, les équations (13) doivent s'écrire, dans cet exemple

$$\left.\begin{aligned} UI \cos\varphi &= \Sigma\, U_n I_n \cos\varphi_n \\ UI \sin\varphi &= \Sigma\, U_n I_n \sin\varphi_n \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

U est la tension entre les bornes A et B du réseau, I le courant qui entre dans le réseau, et φ le décalage de I sur U.

Semblablement nous devons écrire les équations (11) comme suit:

$$UI \cos(2\,\Theta + \varphi) = \Sigma\, U_n I_n \cos(2\,\Theta_n + \varphi_n)$$
$$UI \sin(2\,\Theta + \varphi) = \Sigma\, U_n I_n \sin(2\,\Theta_n + \varphi_n)$$

Remarquons cependant que Θ_n est le décalage de U_n par rapport à une grandeur électrique quelconque du réseau. Si pour cette grandeur en question on choisit la tension U, alors $\Theta = 0$, et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} UI \cos\varphi &= \Sigma\, U_n I_n \cos(2\,\Theta_n + \varphi_n) \\ UI \sin\varphi &= \Sigma\, U_n I_n \sin(2\,\Theta_n + \varphi_n) \end{aligned} \qquad (18)$$

Les équations (17) et (18) montrent que la puissance apparente est un vecteur. Mais l'angle que fait le vecteur $U_n I_n$ avec une direction fixe est φ_n dans le premier système et $2\,\Theta_n + \varphi_n$ dans le second.

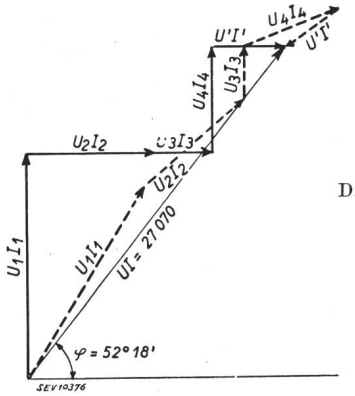

Fig. 7.
Diagramme des puissances apparentes

Nous avons représenté sur la fig. 7 ces deux systèmes de vecteurs qui ont chacun pour somme le même vecteur UI.

Panzerholz im Dienst der Elektrotechnik

Von *A. Stäger*, Baden

621.315.614.4

Gegenüber vollen Holzbrettern weist Sperrholz erheblich verbesserte Biegefestigkeit auf und es erweist sich innerhalb gewisser Grenzen als praktisch unabhängig von wechselnder Temperatur und Feuchtigkeit; es dehnt sich nicht, schwindet nicht und bleibt frei von Rissen und Ungeziefer.

Aus der Technologie der Sperrholzerzeugung sei hier nur das grundsätzlich Wichtige gestreift. Geeignet «abgelängte» Baumstämme werden nach erfolgtem Dämpfen oder Kochen auf Schälmaschinen in Furniere geschnitten. Diese Maschinen sind grossen massiven Drehbänken vergleichbar; während der Stamm um seine Achse rotiert, löst eine langsam gegen die Baumachse vorrückende Messerschneide von der Länge des Stammstückes ein «endloses» Furnierband ab, dessen Dicke durch Einstellen des Messervorschubes (bei konstanter Drehzahl des Stammes) nach Wunsch gewählt wird.

Das Furnierband wird nachher auf Scheren in Stücke zweckmässiger Länge geschnitten. In besondern Trockenanlagen wird den Furnieren die überflüssige Feuchtigkeit entzogen; hernach werden sie mit Leim bestrichen, mit gekreuzten Fasern aufeinandergelegt und in besondern Pressen unter Anwendung von Druck und Wärme während einer bestimmten Zeitdauer zu Sperrholzplatten verleimt.

Die erwähnten günstigen technologischen Eigenschaften des Sperrholzes beruhen auf dem *Prinzip der gekreuzten Fasern*, wodurch sich innere Spannungen der einzelnen Furniere gegenseitig blockieren. Bei Verwendung wasserfester Leime, z. B. der heute vielfach gebräuchlichen Spezialleime auf Kunstharzbasis, wird auch die ganze *Sperrholztafel gegen Feuchtigkeit weitgehend unabhängig.*

Die Industrie erzeugt Sperrholz mit einer ungeraden Anzahl Furniere (auch «Lagen» genannt). Bei einer Sperrholzplatte mit insgesamt 3 Lagen verlaufen die Fasern der beiden Aussenfurniere zu einander parallel, die der Mittellage senkrecht dazu.

Während die europäische Sperrholzindustrie vor dem Krieg viel exotische Hölzer verarbeitete, erkannte man in jüngerer Zeit, dass auch der Forst dieses Kontinentes für technische Zwecke willkommenes Rohmaterial liefert; ge-