**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

**Band:** 29 (1938)

**Heft:** 12

**Artikel:** Rechnerische Untersuchung über gespannte Drähte an elastischen Tragwerken

**Autor:** Camenzind, E.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-1059384

# Rechnerische Untersuchung über gespannte Drähte an elastischen Tragwerken.

Von *E. Camenzind*, Zug.

621.315.056.1

*Es wird eine Gleichung abgeleitet, aus welcher die Beanspruchung eines gespannten Drahtes berechnet werden kann, wenn bei gleichbleibender Drahtlänge und unter Einwirkung von Temperaturänderung die Spannweite verkürzt oder verlängert wird. Die Aenderung der Spannweite entsteht als Folge der Elastizität von Leitungsmasten in Winkel- und Abspannpunkten, wenn weder Anker noch Streben vorhanden sind. Schliesslich wird darauf hingewiesen, wie die elastischen Eigenschaften verschiedener Typen armierter Betonmaste rechnerisch vorausbestimmt werden können.*

*L'auteur développe une équation qui permet de calculer la sollicitation d'un fil tendu lorsque la portée est allongée ou raccourcie sous l'influence de la température, tandis que la longueur du fil reste constante. Ces variations de la portée sont dues à l'élasticité des supports d'angle et d'arrêt, lorsque ceux-ci ne sont ni ancrés ni contrefichés. Pour terminer, il indique comment on peut déterminer à l'avance par le calcul les propriétés élastiques de différents types de pylônes en béton armé.*

Wird ein Eisenstab, dessen Enden fest eingespannt, zum Beispiel eingemauert sind, einer starken Erwärmung unterworfen, so werden die Materialspannungen (Knickung oder Druck) rasch die zulässige Grenze überschreiten. Werden jedoch die Einspannvorrichtungen konstruktiv so ausgebildet, dass sie sich mit zunehmender Deformation infolge Wärmedehnung auseinander bewegen können, so wird dadurch die Gefahr von kritischen Zuständen behoben.

In ähnlicher Weise erfährt ein straff gespannter Draht einer Regelleitung durch Temperaturerniedrigung und Belastung durch Schnee und Eis eine Steigerung der Zugbeanspruchung bis auf den vier- bis achtfachen Wert gegenüber Normaltemperatur. Der Zweck der folgenden Berechnung ist, die Materialspannungen der Leiter bei den genannten Zustandsänderungen infolge Klimawechsel zu untersuchen, wenn bei Winkel- und Abspannpunkten elastische Leitungsträger ohne Anker und Streben eingebaut werden [1]).

1. Längenänderung eines Drahtes infolge Temperaturänderung:

$$l - l_0 = (t - t_0)\, \alpha\, l_0$$

2. Längenänderung infolge Elastizität des Drahtes (Hooksches Gesetz), verursacht durch wechselnde Zugbeanspruchung:

$$l - l_0 = (p - p_0)\, \frac{l_0}{E}$$

$l_0$ Länge im Anfangszustand,
$l$ Länge im beliebigen Zustand.

Es wirken beide Effekte zusammen.

$$l - l_0 = (t - t_0)\, \alpha\, l_0 + (p - p_0)\, \frac{l_0}{E}\,.$$

Dabei gilt für die Anfangsspannweite $a_0$ nach der Reihe von Mac Laurin:

$$\frac{l_0}{2} = \frac{a_0}{2} + \frac{a_0^3\, \gamma_0^2}{48\, p_0^2} + \frac{a_0^5\, \gamma_0^4}{3840\, p_0^4} + \cdots$$

Die dem zweiten Glied folgenden Ausdrücke können wegen ihrer Kleinheit weggelassen werden.

$$\frac{l_0}{2} = \frac{a_0}{2}\left(1 + \frac{a_0^2\, \gamma_0^2}{24\, p_0^2}\right)$$

Für den beliebigen Zustand gelten die Bezeichnungen:

$a$ Spannweite,
$\gamma$ virtuelles spezifisches Leitergewicht,
$p$ Zugbeanspruchung (Horizontalkomponente).

Unter der Voraussetzung, dass das Tragwerk elastisch ist, ändert sich mit $p$ die Lage des Abspannpunktes und somit auch die Spannweite $a_0$. Die spezifische Ausbiegung des Mastes infolge seiner elastischen Deformation durch die veränderliche Zugbeanspruchung $p$ hervorgerufen, sei $d$. Dann ist, wenn der Draht der zu untersuchenden Spannweite auf der einen Seite an einem elastischen Tragwerk abgespannt ist, die Spannweite in beliebigem Zustand

$$a = a_0 - d$$

$$\frac{l}{2} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{a^2\, \gamma^2}{24\, p^2}\right) = \frac{a_0 - d}{2}\left(1 + \frac{(a_0 - d)^2\, \gamma^2}{24\, p^2}\right)$$

$$(a_0 - d)^2 = a_0^2 - 2a_0 d + d^2.$$

Der Einfluss von $d^2$ ist ohne Bedeutung und daher vernachlässigbar.

$$\frac{l}{2} = \frac{a_0 - d}{2}\left(1 + \frac{a_0^2\, \gamma^2}{24\, p^2} - \frac{a_0\, d\, \gamma^2}{12\, p^2}\right)$$

$$\frac{l - l_0}{2} = \frac{a_0 - d}{2}\left(1 + \frac{a_0^2 \gamma^2}{24\, p^2} - \frac{a_0\, d\, \gamma^2}{12\, p^2}\right) - \frac{a_0}{2}\left(1 + \frac{a_0^2\, \gamma_0^2}{24\, p_0^2}\right)$$

$$l - l_0 = a_0 + \frac{a_0^3 \gamma^2}{24\, p^2} - \frac{a_0^2\, d\, \gamma^2}{12\, p^2} - d - \frac{d\, a_0^2 \gamma^2}{24\, p^2} + \frac{a_0\, d^2\, \gamma^2}{12\, p^2} - a_0 - \frac{a_0^3\, \gamma_0^2}{24\, p_0^2}$$

Der Ausdruck $\frac{a_0\, d^2\, \gamma^2}{12\, p^2}$ kann weggelassen werden, da er für die gebräuchlichen Fälle bei Regelleitungen gegenüber dem nächst grösseren Summand sehr klein ist.

$$l_0 - l = -d + \frac{a_0^3}{24}\left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{3\, d\, \gamma^2}{p^2\, a_0} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2}\right)$$

Das mittlere Glied in der Klammer ist ebenfalls vernachlässigbar und wird in der weiteren Entwicklung weggelassen.

[1]) Vgl. E. Maurer, Die Berechnung der Freileitungen, Bull. SEV 1936, Nr. 2 und 3.

$$l - l_0 = -d + \frac{a_0^3}{24}\left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2}\right) =$$

$$(t - t_0)\,\alpha\, l_0 + (p - p_0)\,\frac{l_0}{E}$$

$$l - l_0 = \frac{a_0^2}{24}\left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2}\right) =$$

$$(t - t_0)\,\alpha\,\frac{l_0}{a_0} + (p - p_0)\,\frac{l_0}{a_0}\,\frac{1}{E} + \frac{d}{a_0}\,.$$

Für flache Kettenlinien kann gesetzt werden

$$\frac{l_0}{a_0} = 1$$

$$\frac{\gamma^2 a_0^2 E}{24\,p^2} - \frac{\gamma_0^2\, a_0^2\, E}{24\, p_0^2} = (t - t_0)\,\alpha E + \frac{E\,d}{a_0} + p - p_0$$

$$p^3 + p^2\left\{\frac{\gamma_0^2 a_0^2 E}{24\, p_0^2} + (t - t_0)\,\alpha\, E - p_0 + \frac{E\,d}{a_0}\right\} = \frac{\gamma^2 a_0^2 E}{24}$$

Das $d$ ist in dieser Gleichung die spezifische Verschiebung des Abspannpunktes (Mastspitze). Es ist in jenem Gebiet der Belastung, wo der Elastizitätsmodul des Materials vom Tragwerk konstant bleibt, eine lineare Funktion von $p$. $d = k \cdot p$. Demzufolge kann geschrieben werden:

$$p^3\left(1 + K\,\frac{E}{a_0}\right) + p^2\left\{\frac{\gamma_0^2\, a_0^2\, E}{24\; p_0^2} + E\,\alpha\,(t - t_0) - p_0\right\}$$
$$= \frac{\gamma^2\; a_0^2\; E}{24}$$

Das ist die Zustandsgleichung in zwei Ausdrucksformen für einen Draht, der an zwei gleich hohen Aufhängepunkten abgespannt ist, von denen der eine elastisch beweglich ist, indem sich die Horizontalverschiebung des Abspannpunktes gegenüber der Anfangslage sich mit der Horizontalkomponente der Drahtbeanspruchung linear ändert. Das ist im Gebiet der Gültigkeit vom Hookschen Gesetz der Fall.

Wenn beide Leitungsträger, zwischen denen eine Einzelspannweite montiert ist, in bezug auf Biegung elastisch sind, so kann

$$d = (K_1 + K_2)\; p$$

gesetzt werden. Das $d$ in cm bezieht sich auf kg und $cm^2$ Leiterquerschnitt.

Beispiel: An einem Mast ohne Anker und Strebe seien vier 8 mm Kupfer-Drähte abgespannt. Der Faktor $K$ des Trägers wird durch das Material und dessen Anordnung bedingt und habe für ein konkretes Beispiel den Wert 0,015. $a_0$, die Spannweite, sei 50 m. Die vier Drähte werden bei 10° C mit $p_0 = 400$ kg/cm² Zugbeanspruchung reguliert. Die Durchbiegung der Mastspitze $D_0$ bei 10° beträgt:

$$D_0 = p_0 \cdot K \cdot \Sigma f = 400 \cdot 0{,}015 \cdot 4 \cdot 0{,}5 = 12$$

Wenn zur Zeit der Montage bei 10° dem Mast beim Aufstellen 12 cm Anzug gegeben wird, so wird sich die Spitze über der Mitte des Einspannquerschnittes einstellen. Die Temperatur sinke nun von 10° auf 0° C, wobei eine Zusatzlast von 2 kg Schnee pro Laufmeter Draht zur Auswirkung gelange. Die sich ergebenden Werte sollen in der Gleichung

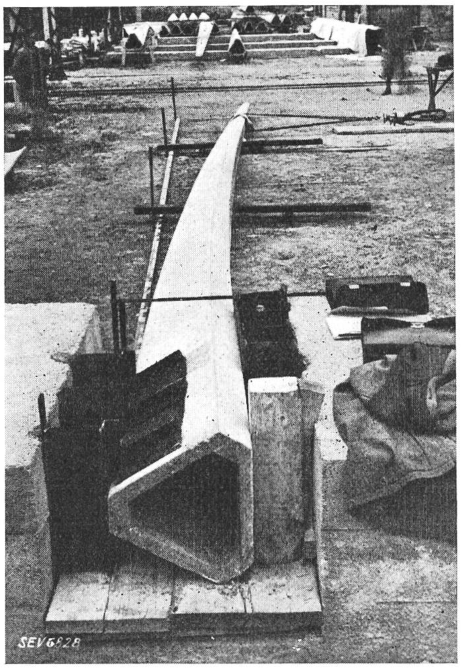


Fig. 1.
Belastungsversuch.
In die Vorrichtung, die den Spitzenzug darstellt, ist ein Dynamometer eingeschaltet. Es wurden die Zugkräfte abgelesen, die verschiedenen Belastungen entsprechen, und die Ausbiegungen an mehreren Punkten längs des Mastes gemessen.

$$p^3\left(1 + \frac{K\,E}{a_0}\right) + p^2\left\{\frac{\gamma_0^2\, a_0^2 E}{24\; p_0^2} + E\,\alpha\,(t - t_0) - p_0\right\}$$
$$= \frac{\gamma^2\; a_0^2\; E}{24}$$

eingesetzt werden. Anfangszustand: $t_0 = 10°$

| | |
|---|---|
| $\gamma_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-3}$; | $\gamma_0^2 = 79 \cdot 10^{-6}$ |
| $a_0 = 5 \cdot 10^3$; | $a_0^2 = 25 \cdot 10^6$ |
| $p_0 = 400$; | $p_0^2 = 16 \cdot 10^4$ |
| $E = 1{,}15 \cdot 10^6$; | $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$. |

Endzustand: $t = 0°$.

$$\gamma = \gamma_{Schnee} = \gamma_0 + \frac{0{,}02}{q} = 0{,}0089 + \frac{0{,}02}{0{,}5} = 0{,}0489$$

$\gamma^2 = 23{,}9 \cdot 10^{-4}$.

$$p^3\left(1 + 0{,}015\,\frac{1{,}15 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^3}\right) + p^2\left\{\frac{79 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 1{,}15 \cdot 10^6}{24 \cdot 16 \cdot 10^4}\right.$$
$$\left. - 10 \cdot 17 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}15 \cdot 10^6 - 400\right\} =$$
$$\frac{23{,}9 \cdot 10^{-4} \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 1{,}15 \cdot 10^6}{24}\,;$$

$4{,}45\, p^3 - 3{,}5\, p^2 = 28{,}6 \cdot 10^8$; daraus folgt $p = 863$ kg/cm².

Die gesamte Ausbiegung der Spitze beim Zustand 0° C und bei Schneelast beträgt:

$$D = KP = Kp\Sigma f = 0{,}015 \cdot 863 \cdot 4 \cdot 0{,}5 \cong 26 \text{ cm.}$$

Die zusätzliche Ausbiegung gegenüber Anfangslage misst 26 — 12 = 14 cm. Die Beanspruchung wächst demzufolge bei der genannten Zustandsänderung für die besprochene Leitung von 4 auf 8,63 kg/mm² statt auf 14,3 bei starren Tragwerken.

Im folgenden soll diese rechnerische Ableitung mit besonderen Tragwerken aus armiertem Beton in Beziehung gebracht werden, zu welchem Zweck das elastische Verhalten bei Betonmasten der Herstellungsmethode, System GRZ, untersucht worden

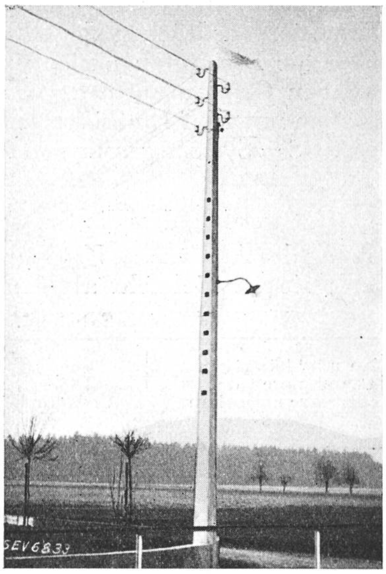


Fig. 2.

Winkelpunkt einer Leitung mit elast. Träger.

ist[2]). Es wurde mit einem bestimmten Typ ein Biegeversuch durchgeführt, aus dem die Beziehung zwischen Spitzenzug und Deformation $D = K\ P$, sowie die elastische Linie entnommen werden konnte. Anderseits lautet die Differenzialgleichung der elastischen Linie für einen eingespannten Balken:

$$y'' = \frac{1}{\varrho} = \frac{M_x}{J_x \cdot E} = \frac{M_x \cdot \frac{J_0}{J_x}}{J_0 \cdot E}.$$

Hierin ist nur das $E$ unbekannt. Mit Hilfe der graphischen Methode nach dem Satz von Mohr wird aus der Differenzialgleichung eine Seillinie zeichnerisch ermittelt, die sich mit der in der Biegeprobe gefundenen elastischen Linie decken muss. Diese Uebereinstimmung zwischen der experimentell gegebenen und der abgeleiteten Kurve wurde erzielt, indem man probeweise verschiedene Werte von $E$ einsetzte (Aenderung der Poldistanz $J_0 \cdot E$). Das $E$, das aus diesem Verfahren resultiert, gibt den effektiven, für Eisen und Beton kombinierten Wert des betreffenden Mastes an, woraus sich der Einzelwert für Beton, wenn jener für Eisen bekannt ist, ableiten lässt.

Diese einmaligen Untersuchungen für einen bestimmten Masttyp liefern die Grundlagen, gestützt

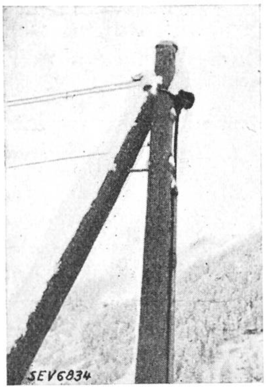


Fig. 3.

Ein starker Schneeansatz auf der Leitung hat die Isolatorenstütze abgebogen und dadurch wurde die Spannweite bei gleichbleibender Drahtlänge um einige cm verkürzt und der Leiterzug reduziert.

auf welche die Elastizität $d = K \cdot p$ für andere Typen vorausbestimmt werden kann, wenn die verschiedenen Trägheitsmomente, die längs des Balkens nicht gesetzmässig zu variieren brauchen, bekannt sind.

### Schlussfolgerungen.

Für Weitspannleitungen, wo als Tragwerke Gittertürme aus Eisen verwendet werden, bietet das vorliegende rechnerische Verfahren kein aktuelles Interesse. Es ist aber von praktischer Bedeutung bei Stark- und Schwachstromnetzen, wo bei Abspann-, Abzweig-, Kabelüberführungs- und Winkelpunkten in Regelleitungen keine Anker oder Streben zur Verwendung kommen. Durch Einsetzen von Leitungsträgern mit geeigneter Elastizität wird gegenüber starren Trägern die maximale Zugbeanspruchung der Leiter für kritische Zustände vermindert. Infolge dieser Reduktion der Zugspannung muss durch genügende Distanzierung eine Berührung der Leiter infolge Schwingungen durch Wind vermieden werden und ist die Erhöhung des Durchhanges nur soweit zulässig, dass der erforderliche Abstand vom Boden gewährleistet bleibt.

[2]) E. Camenzind, Armierte Betonmaste, Bull. SEV 1936, Nr. 5, S. 135.

# Die Mindestzahl der bei Untersuchung der elektrostatischen, magnetostatischen und elektromagnetischen Erscheinungen erforderlichen willkürlichen Einheiten.[1])

Von *P. Andronescu*, Bukarest.

621.317.081

*Es wird gezeigt, dass die neuzeitliche Behauptung «man hätte ein Maßsystem nur mit vier willkürlichen Einheiten» ein Irrtum ist, welcher darauf beruht, dass bedauerlicherweise die Universalkonstante «c» nicht Gemeingut der Ingenieure geworden ist.*

*On prétend aujourd'hui que «notre système d'unités repose sur quatre unités arbitraires». Or cela est faux et l'erreur provient de ce que les ingénieurs ne se sont malheureusement pas encore tous familiarisés avec la constante universelle «c».*

[1]) Eingereicht am 23. 12. 36.