

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
<b>Band:</b>	28 (1937)
<b>Heft:</b>	23
<b>Artikel:</b>	Theoretische Betrachtung der Seilschwingungen unter Einbeziehung von Schwingungsdämpfern
<b>Autor:</b>	Müller-Strobel, Josef
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-1059886">https://doi.org/10.5169/seals-1059886</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Theoretische Betrachtung der Seilschwingungen unter Einbeziehung von Schwingungsdämpfern.

Von Josef Müller-Strobel, Zürich-Altstetten.

621.315.056.3

*Es wird versucht, die theoretischen Grundlagen für eine Berechnung von mechanischen Seildämpfern herzuleiten. Der an das Seil befestigte, als elastisches Bindeglied zu betrachtende Dämpfer erzeugt, mathematisch gesehen, eine Unstetigkeitsstelle, weshalb für die Erfassung seines Einflusses die allgemeinen Prinzipien der Mechanik unter Einschluss einiger erlaubten Vernachlässigungen angewandt werden müssen. Mittels einer Modellvorstellung gelingt es, die Fragestellung so zu wenden, als würde eine äussere, nur an einem Punkt angreifende Kraft die störende Schwingung dem Seil aufzwingen. Zwei vereinfachte Beispiele weisen auf den für eine exakte Rechnung durchzuführenden Weg hin.*

*L'auteur essaye d'établir les bases théoriques pour le calcul des amortisseurs de vibrations pour lignes aériennes. L'amortisseur fixé au conducteur, que l'on doit considérer comme un élément de liaison élastique, produit, mathématiquement parlant, une solution de continuité; c'est pourquoi, afin de saisir l'influence qu'elle exerce, on doit appliquer les principes généraux de la mécanique, en se permettant de négliger quelques termes d'importance minime. Au moyen d'un modèle, l'auteur arrive à tourner la question comme si une force extérieure appliquée en un seul point imprimait au conducteur la vibration perturbatrice. Deux exemples simplifiés montrent le chemin à suivre pour obtenir un calcul exact.*

## 1. Einleitung.

Seit der Einführung des Weitspannungssystems bei Hochspannungsfreileitungen nahmen die Untersuchungen über deren mechanische Sicherheit an Bedeutung zu. Mit der Anwendung grosser Spannweiten und hoher Zugspannungen erwuchs der Freileitung eine neue Gefahr, die erhöhte Schwingungsbeanspruchung. Mit teilweisem Erfolg wurden pneumatische Schwingungsdämpfer<sup>1)</sup> nach Fig. 1a und rein mechanische nach Fig. 1b verwendet. Alle Bewegungen dieser einfachen Systeme sind durch die Eigenfrequenzen und der durch die schwingende Masse erzeugten, resultierenden Kraft  $Y$  charakterisiert. Wegen der Wichtigkeit der Problemstellung kann es nicht uninteressant sein, den erwünschten Einfluss des Dämpfers angenähert theoretisch zu erfassen.

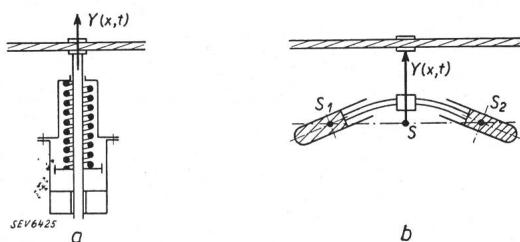


Fig. 1.  
Schwingungsdämpfer für Freileitungsseile.

Leicht ist man versucht, bei einem so einfachen System, wie es das Seil mit Dämpfer darstellt, die Kräfte des bewegten Massen auf unzureichende physikalische und mathematische Beziehungen zurückzuführen. Zum voraus ist zu verraten, dass eine theoretisch exakte Analyse, von welchen Grundannahmen sie auch ausgehen mag, erhebliche Schwierigkeiten bietet. Der Grund hierfür ist in der Unstetigkeit der angreifenden Kraft zu suchen. Man bedient sich bis heute mit der gewöhnlichen, althergebrachten Schwingungsgleichung unter gleichzeitiger Einführung den Dämpfer berücksichtigenden Randbedingungen<sup>2)</sup> (siehe Bemerkung am Schluss

des Aufsatzes). Dieses Rechenverfahren ist insofern erfolgversprechend, als man sich mit der Ermittlung eines sogenannten Dämpfungsfaktors begnügt, der jedoch recht mühsam für jede Änderung der Schwingmassen (Dämpfer und Seil) der Eigenfrequenzen und der Anordnung des Dämpfers ermittelt werden muss. Trotz des Bekanntwerdens des Massenverhältnisses von Dämpfer und Seillänge pro Meter durch die Rechnung, zeigen sich *erhebliche Abweichungen*, selbst bei idealisierten Versuchsbedingungen.

Es sei hier versucht, die allein zuständigen, allgemeinen Prinzipien der Mechanik auf das Problem anzuwenden. Bei der Zuhilfenahme einer Modellvorstellung lassen sich die Kräfte der Schwingungserregung gegenüber der natürlichen Dämpfung kompensieren, was dann ermöglicht, die wesentlichen, *leicht beeinflussbaren* Schwingungszustände zu erfassen. Weiter wird angenommen, dass das Seil an den Enden weder eine translatorische noch longitudinale Verschiebung erleidet. Ohne besondere Schwierigkeiten liessen sich mit der hier angewandten allgemeinen Methodik transversale und longitudinale, *quer* und *parallel* zur Krafrichtung der Erregung wirkende Schwingungen beschreiben. Da es sich in dieser Arbeit darum handelt, das Wesen der physikalischen Gegebenheiten und die Art der mathematischen Gedankenführung herauszuschälen, ist hier nur eine zweidimensionale Anordnung (System mit einem Freiheitsgrad) untersucht. Auf Einzelheiten kann nicht eingegangen werden.

Die Frage, warum nicht auf die vektorielle Darstellungsweise der harmonischen Schwingungen eingegangen wird, könnte berechtigt sein. Es ist einzuwenden, dass man bei der Untersuchung im dreidimensionalen Raum mit den meisten Lesern geläufigen elementaren Vektordarstellung nicht auskommt. Jedoch wird sie bei einer späteren und eingehenderen Untersuchung, die viele ungeklärte Einflüsse erfassen wird, nebst den nötigen funktionstheoretischen Erörterungen zwangsläufig zur Anwendung gelangen. Wie weit eine graphische Analysis mittels des Linienbildes einer Funktion der erzwungenen Schwingungen bei periodischen Störungen für eine Vereinfachung zweckdienlich gewesen wäre, konnte leider nicht eindeutig genug festgestellt werden.

<sup>1)</sup> ETZ 1934, H. 26.

<sup>2)</sup> R. Ruedy: Canadian Journal of Research, Sec. A. Vol. 13 (Nov.) 1935, B 99.

H. Maass: Forschung Bd. 4 (1933), S. 105.

S. Timoshenko: Vibration problems in engineering, New York 1928, deutsch bei Julius Springer, Berlin.

## 2. Herleitung der Bewegungsgleichungen eines schwingenden Seiles mit Dämpfer.

### a) Spannungszustände.

Ist der Leiter als Litzenseil ausgebildet, wird zu folge der Reibung der einzelnen Drähte ein anderer mechanischer Spannungszustand als in einem homogenen Seile vorzufinden sein. Alle die Frequenz  $f$  des Seiles erniedrigenden Einflüsse explizite in die Rechnung einzubeziehen, ist aussichtslos. Ein einfaches Ersatzschema oder Modell ermöglicht, diese Schwierigkeiten zu überwinden.

Ist das Seil als Vollkörper ausgebildet und hat es einen nicht allzu grossen Durchhang, bzw. eine nur schwache Spannungsänderung  $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$  in Abhängigkeit von der Koordinate  $x$ , stellt sich nach bekannter Gesetzmässigkeit bei konstanter Erregung die Frequenz

$$f_n = \frac{n}{2 l_0} \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}} \quad (\text{I})$$

ein. Es bedeutet  $n$  die Ordnungszahl,  $\sigma$  die mechanische Spannung,  $l_0$  die Länge zwischen den Einspannungen und  $\varrho$  das Gewicht pro Längeneinheit des Seiles.

Bei Seilen, in denen starke innere Reibungskräfte eine merkliche Verminderung der elastischen Dehnung oder der Formänderungsarbeit hervorrufen, ist eine Verkleinerung der Frequenz in bezug auf das *ideale* Seil zu erwarten. Wie kann ein derartiges Seil modellmässig nachgebildet werden? Grundsätzlich handelt es sich bei dieser Untersuchung um die Ermittlung des *Spektrums der Schwingungen*, was in der späteren Entwicklung des Fourierschen Integrals deutlich zum Ausdruck kommt. Dank des integralen Charakters der mathematischen Formulierung des Problems ist man gar nicht gezwungen, alle technologischen Abmessungen oder mechanischen Spannungen einzuhalten, wenn nur die für eine «homologe Nachbildung» massgebenden Grundzustände durch irgendeine Massnahme erzeugt werden können. Um Vergleiche mit einem von der Luft umströmten, Wirbel ablösenden Seil anzustellen, ist es vorteilhaft, Durchmesser, Verseilungsart und Länge  $l_0$  (bzw.  $\varrho$ ) beizubehalten. Als Nachbildungsmass müsste die in Gl. (I) noch unberührt gebliebene Grösse  $\sigma$ , die mechanische Spannung eingeführt werden.

Was für Beziehungen gelten bezüglich der Spannungsänderung und Frequenzabhängigkeit bei den in praxi ausgeführten Seilen? Wie ist die Spannung  $\sigma$  zu ändern, dass sich bei einem Seil die gleichen Frequenzen wie bei den der Gl. (I) zugrunde liegenden Zuständen, einstellen?

<sup>4)</sup> Karman: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1911/12.  
Karman und Rubach: Physik. Z. Bd. 13 (1912), S. 49.  
H. Maass: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 10 (1931), S. 153.  
R. Ruedy: Canadian J. Research. Sect. A. Vol. 13 (1935), Ottawa.  
Fuchs-Hopf: Aerodynamik, Jul. Springer, Berlin 1935.  
Th. Schmitt u. P. Behrens: ETZ Bd. 54 (1933), S. 603.  
P. Behrens, H. Hutter: Elektrizitätswirtschaft Bd. 36 (1937), S. 331.

Nach den neuesten Messungen <sup>4)</sup> besteht zwischen Luftgeschwindigkeit  $\vec{v}$  (einer senkrecht zur Schwingungsebene wirkenden Strömung, Achsenrichtung  $z$ ), Seildurchmesser  $d$  (cm), Spannung und Gewicht die folgende Relation:

$$f_s = 2,05 \frac{d}{\vec{v}_z} \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}} \quad (\text{II})^5)$$

Die Spannung wird nach Auflösen der Gl. (II)

$$\sigma_s = \left( \frac{f_s}{2,05} \frac{\vec{v}_z}{d} \right)^2 \varrho \quad (\text{III})$$

Bei gleichbleibender Erregung durch die Wirbelablösung wird dem homogenen, mit der Eigenfrequenz schwingenden Seil eine Schwingung mit der Frequenz nach Gl. (II) und (III) aufgezwungen. Angaben über die Frequenzabhängigkeit der Seile für verschiedene Seildurchmesser, bzw. die Grössen der Knotenabstände  $\lambda$  in Abhängigkeit vom Seildurchmesser  $d$  für verschiedene Windgeschwindigkeiten  $\vec{v}$  und Spannungen finden sich im bereits erwähnten Aufsatz von Jaquet <sup>5)</sup>.

Will man den Einfluss einer störenden Kraft, bzw. die Wirkung eines Dämpfers erfassen, ist die festzuhalrende Tatsache von Wichtigkeit, dass sich nur zwei Resonanzlagen einstellen, die eine in der Nähe der Grundfrequenz Gl. (I), die andere im Frequenzbereich der erzwungenen Schwingung (Gl. II).

Um das theoretische Modell zu bilden, nimmt man eine Umkehrung der Fragestellung vor, und zwar so, dass man durch Einführen der neuen Spannung  $\sigma_s$  das Seil mit der Frequenz  $f_s$  schwingen lässt und demselben, durch äussere Einflüsse verursacht, bei der Frequenz  $f_n = \frac{1}{2 l_0} \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}$  danklich eine Resonanz zuschreibt, während der Stoßdämpfer selbst durch Schwingungsenergie von der Frequenz  $f_s$  angeregt wird. Diese Umgestaltung führt zu einer wesentlichen Vereinfachung der mathematischen Analyse.

Die in die Berechnung neu anzusetzende Spannung  $\sigma_s$  folgt aus Gl. (I) und (III):

$$\sigma_s = \left( \frac{2,05}{2,5} \right)^2 \sigma \quad (\text{IV})$$

Die Eingliederung einer über die ganze Länge konstanten Spannung verlangt, den Gültigkeitsbereich bei einem stark durchhängenden Seil zu bestimmen. Sehr genaue Angaben lassen sich vorderhand nicht machen; trotzdem ist die getroffene Annahme wie aus vielen Amplitudenaufzeichnungen von Schwingungen an den verschiedensten Seilen bei gleichen Mastquoten und selbst grossen Spannweiten ersichtlich ist, zutreffend. Der Einfluss der Spannungsänderung auf die Frequenz ist bei stark durchhängenden Seile sehr gering. Eine analytische Behandlung der ungestörten Schwingungsvorgänge

<sup>5)</sup> Jaquet: Bull. SEV Bd. 28 (1937), S. 200.

<sup>6)</sup> An Stelle der in der Aerodynamik die Zirkulation charakterisierende Grösse  $\Gamma$  ist der Index  $s$  eingeführt.

bei den eine Kettenlinie<sup>7)</sup> darstellenden Seilen und bei starken Ueberhöhungen der Fixpunkte<sup>7)</sup> gibt Ruedy<sup>8)</sup>.

Als äussere, den Leiter in Schwingungen versetzende Energiequelle ist die Luftströmung zu betrachten. Die Schwingungsdämpfung selbst wird durch die Formänderungs- und Reibungsarbeit<sup>9)</sup> der einzelnen Drähte nebst dem Luftwiderstand hervorgerufen. Tritt nicht Resonanz mit der Grundfrequenz ein, halten sich die zugeführte und die vernichtete Energie nach bekannten Gesetzen das Gleichgewicht. Die Leitung schwingt mit konstanter Amplitude. Bei gleichbleibender Luftströmung ist dies laut Registrierung stets der Fall. Dank der Einführung der neuen Spannung  $\sigma_s$ , die als das Charakteristikum für das mit niedriger Frequenz schwingende Seil anzusehen ist, wurde der verlorengegangene Energiebetrag etwa durch die Aenderung der Frequenz ( $E_k = \frac{1}{2} J(M) \omega_0^2$ <sup>11</sup>) berücksichtigt. Bei der spektralen Zerlegung werden, ohne einen Fehler zu begehen, diese *Gleichgewichtszustände* (stabile Gleichgewichtslage) betrachtet.

Wie die Ableitung der allgemeinen Bewegungsgleichungen zeigen wird, ist diese Modifikation deshalb von Wichtigkeit, weil sie erlaubt, ein einfacheres Lösungsverfahren anzuwenden.

Versuche, die an den verschiedensten Seilen vorgenommen wurden, wiesen deutlich darauf hin, dass die bis jetzt noch nicht berücksichtigte *Luftdämpfung*<sup>10)</sup> bei der Veränderung der Frequenz durch ein Störglied ohne Bedenken vernachlässigt werden kann. Bei elektromagnetisch erregtem Seile in ruhender Luft (Prüfstand) konnte ohne merkliche Korrektur direkt auf die Formänderungs- und Reibungsarbeit geschlossen werden.

### b) Herleitung der Bewegungsgleichungen.

Um eine eindeutige Lösung der Aufgabe oder der spektralen Zerlegung der Schwingungsvorgänge zu

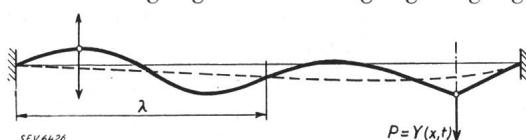


Fig. 2.

Seil mit der in der Schwingungsebene liegenden äusseren Kraft  $P = Y(x, t)$ .  $\lambda$  Wellenlänge.

erhalten, sei die transversale Kraft  $Y(x, t)$  nach Fig. 2 als bekannt vorausgesetzt. Die Problemstellung erleidet, wie bereits erörtert, eine Umkehrung, indem man sich primär den schwingenden Dämpfer

<sup>7)</sup> E. Maurer: Bull. SEV Bd. 27 (1936), S. 41 und 65; Leitung Handeck-Innertkirchen.

<sup>8)</sup> Ruedy: Canadian, Research, Sect. A, Vol. 13 (1935).

<sup>9)</sup> ten Bosch: Maschinenelemente, Julius Springer 1929. Schweiz. Bauztg. Bd. 9 (1936), S. 108.

<sup>10)</sup> J. S. Carroll und J. Koontz jun.: Electr. Engng. Bd. 56 (1936), S. 490.

J. S. Carroll: Electr. Engng. Bd. 55 (1936), S. 543.  
ETZ Bd. 41 (1936), S. 1181.

<sup>11)</sup> Es bedeutet  $M$  die Masse des Dämpfers und  $\omega_0$  seine Winkelgeschwindigkeit bezüglich dem Seipunkt  $\xi$ ,  $E_k$  kinetische Energie.

denkt, der erst sekundär im Seil eine erzwungene Schwingung verursacht. Diese Modifikation, die öfters bei solchen komplexen Gebilden nötig ist, hindert aber keineswegs, den physikalischen Zustand folgerichtig zu erfassen. Die wesentliche Fragestellung wird die sein: Wie lauten die Bewegungsgleichungen eines Seiles, dem eine beliebig veränderliche, äussere Kraft eine erzwungene Schwingung aufdrängt. Um die Kraft  $Y(x, t)$ , die als diskontinuierliche Quelle zu deuten ist, organisch in die mechanischen Beziehungen eingliedern zu können, ist man genötigt, sich des Hamiltonschen Variationsprinzips und der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zu bedienen.

Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden, die infolge periodischer Erregung sogenannte erzwungene Schwingungen ausführen, können bekanntlich durch verallgemeinerte Koordinaten ausgedrückt werden. In einem *ungestörten* System lassen sich die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art schreiben

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_n} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0 \quad (1)$$

Hiebei geben die Lagenkoordinaten  $q_1, q_2, \dots, q_n$  die Abweichungen des Systems aus der Gleichgewichtslage  $q_1 = 0, q_n = 0 \dots$  an. Die kinetische Energie  $E_k$  ist bei kleinen Schwingungen<sup>12)</sup> als homogene quadratische Formen mit konstanten Koeffizienten der zeitlichen Ableitungen der Koordinaten  $q_n$  selbst gegeben. Es wird die kinetische Energie in die positiv quadratische Form mit dem Koeffizienten  $a_{v,u}$  übergehen.

$$E_k = \sum_{v, \mu=1}^n a_{v,\mu} \dot{q}_v \dot{q}_\mu \quad (2)$$

Diese Vereinfachung ist berechtigt, da wegen des Einsatzes des Dämpfers zum vornherein nur *Dissonanzen* betrachtet werden und grosse Amplituden überhaupt nicht zulässig sind (siehe später).

Die potentielle Energie mittels einer Reihenentwicklung dargestellt, ergibt

$$U = U(0,0) + \sum_v \left( \frac{\partial U}{\partial q_v} \right)_{q_v=0} \cdot q_v + \frac{1}{2} \sum_v \sum_\mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_v \partial q_\mu} \right)_{q_v=0, q_\mu=0} \cdot \dot{q}_v \dot{q}_\mu \dots$$

Wie bereits erwähnt, kann bei kleinen Verschiebungen die Reihe mit den quadratischen Gliedern abgebrochen werden. Die Berechtigung dieser Vereinfachung kann ohne die obige theoretische Erwägung auch durch bekannt gewordene Messresultate<sup>13)</sup> an Seilen belegt werden. Bei einem Seil von ca. 180 mm<sup>2</sup> Querschnitt und einer Spannweite von 200 m, bei Knotenabständen von 1 bis 4 m, wurden auf Rekorderstreifen maximale Amplituden von durch-

<sup>12)</sup> Rayleigh: The theory of sound Bd. I.  
M. Plancherel: Des petites oscillations, Vorlesg. ETH, Zürich.

<sup>13)</sup> E. M. Wright und J. Mini jr.: Aluminio Bd. 4 (1935), S. 138. Electr. Engng. Bd. 53 (1934).

schnittlich 0,6 bis 1,0 cm aufgezeichnet. Dämpfer, die eingebaut wurden, vermochten die Amplituden bis auf 0,5 bis 0,2 cm und noch mehr zu erniedrigen, was absolut eindeutig für die Gutheissung der mathematischen Einschränkung spricht.

Um rascher an das Ziel zu gelangen, wählt man die Lagrangeschen Koordinaten so, dass eine lineare Transformation der ohnehin stets in die Ausgangslage zurückkehrenden Systeme vorgenommen werden kann. Die zugehörige Transformationsgleichung lautet

$$q_\mu = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu\mu} \psi_\nu \quad (4)$$

Das Wesentliche der Transformation, die Bestimmung der Hauptachsen oder Eigenvektoren, wird durch das Koeffizientenschema oder die Matrix<sup>14)</sup> der Gl. (4)

$$A = (\alpha_{\nu\mu}) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \quad (5)$$

mit der Determinante

$$A = |\alpha_{\nu\mu}| \quad (6)$$

wiedergegeben. Zufolge dieser linearen Transformation werden die Funktionen in quadratische Einheitsformen von  $E_k$  und  $U$ , bzw. in Summen von Quadraten übergehen. Für jede einzelne Koordinate ergibt sich nun eine, von den anderen gänzlich unabhängige, harmonische Schwingung mit zugehörender Periode. Schwingungen, die bei bestimmten Koordinaten variieren, während bei den andern keine Bewegungen stattfinden, nennt man Hauptschwingungen, die Koordinaten «Hauptkoordinaten». Das ganze System auf derartige Koordinaten, unter gleichzeitiger Vernachlässigung höherer Ableitungen, bezogen, erlaubt, die kinetische Energie

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n a_\nu \dot{q}_\nu^2 \quad (7)$$

und die potentielle Energie  $U_0$

$$U_0 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n c_\nu q_\nu^2 \quad (8)$$

zu schreiben. Nach Einbeziehung der von aussen eingreifenden Störungsfunktion  $Y(x, t)$  kann wegen dem positiv definiten Charakter von  $E_k$  und  $U_0$  (die Werte  $a_\nu$  und  $c_\nu$  positiv) jeder Koordinate  $q_\nu$  die erweiterte Differentialgleichung von der Form der Lagrangeschen Bewegungsgleichung zweiter Art genügen. Sie besitzt die Form

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\nu} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_\nu} = a_\nu \frac{d^2 q_\nu}{dt^2} + c_\nu q_\nu \equiv Y(x, t) \quad (9)$$

<sup>14)</sup> Hilbert-Courant: Methoden mathem. Physik, Springer, Berlin 1931.

O. Schreier und E. Sperner: Vorlesungen über Matrizen, Teubner 1932.

Für die erzwungene Schwingung eines Seiles mit der mechanischen Spannung  $\sigma_s$ , der Einheitsmasse  $\varrho$  und einer transversal beliebig veränderlichen Kraft  $Y(x, t)$  (senkrecht zur Achsenrichtung des Seiles) wird die Schwingungsgleichung in Kartesischen Koordinaten

$$\varrho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \sigma_s \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Y(x, t) \quad (10)$$

Darauf ausgehend, die Lösung der Gleichungen mittels periodischen Funktionen zu ermitteln, ist hier auf eine besondere Tatsache verwiesen. Aus dem gebräuchlichen Rechenverfahren bei der Herleitung der Koeffizienten von Fourierschen Reihen kann leicht geschlossen werden, dass die vorkommenden Integralbeziehungen keine speziellen Eigenschaften trigonometrischer Funktionen sind. Sie entsprechen viel mehr einer allgemeinen Eigenschaft der hier schon eingeführten Hauptkoordinaten. Wunschgemäß sind alle Gleichungen mit Hauptkoordinaten dadurch gekennzeichnet, dass sie nach ihrer Einführung in die gegebenen Differentialgleichungen (9) Beziehungen liefern, in denen außer der Zeit  $t$  stets nur eine einzige Koordinate vorkommt. Funktionen, die Gleichungen eines Systems mit  $n$  Freiheitsgraden befriedigen können, heissen Eigenfunktionen und sind von der Form

$$y = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x) \cdot \psi_\nu(t) \quad (11)$$

Definiert man die kinetische Energie  $E_k$  des bewegten Systems durch Ueberführung der unendlichen Summe mittels einem Integral, wird sie die Form annehmen

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^l \varrho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad (12)$$

Analog schreibt sich die potentielle Energie

$$U_0 = U = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma_s \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dt \quad (13)$$

Unter Einschluss der wichtigsten Eigenschaften der Hauptkoordinaten, die fordern, dass in den Ausdrücken der Energiefunktionen nur Quadrate  $\dot{\psi}_\nu^2$  und keine Produkte der verschiedenen Ableitungen  $\dot{\psi}_\mu$ ,  $\dot{\psi}_\nu$  ( $\mu \neq \nu$ ) auftreten<sup>15)</sup>, wird Gl. (12) übergehen in

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho (\psi_\nu(t))^2 \int_0^l \varphi_\nu^2(x) dx + \varrho \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^{\infty} \dot{\psi}_\mu(t) \cdot \psi_\nu(t) \int_0^l \varphi_\mu(x) \varphi_\nu(x) dx \quad (14)$$

Für ein Orthogonalsystem bildende Funktionen

<sup>15)</sup> Riemann-Weber: Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. I, S. 217 (1935).

wird das Integral über das Produkt der Faktoren  $\varphi_v$  und  $\varphi_\mu$  nach bekannten Gesetzen

$$\int_0^l \varphi_\mu(x) \varphi_v(x) dx = 0 \quad (15)$$

Bildlich gesprochen besagt diese Gl. (16) folgendes. Die den einzelnen Veränderlichen  $\varphi_v(x)$  entsprechenden Vektoren des Funktionenraumes stehen zueinander *orthogonal*. Normiert man dieselben so, dass die Quadratintegrale

$$\int_0^l \varphi_v^2(x) dx = 1 \quad (16)$$

werden, lässt sich die Energiegleichung (14) in einer bedeutend vereinfachten Form schreiben, nämlich

$$E_k = \frac{1}{2} \varrho \int_0^l \left( \sum_{v=1}^n \varphi_v \dot{\psi}_v(t) \right)^2 dx = \frac{\varrho}{2} \sum_{v=1}^{\infty} \dot{\psi}_v^2(t) \quad (17)$$

Aus analogen Ueberlegungen sei die potentielle Energie  $U$  ermittelt.

$$U = \frac{\sigma_s}{2} \int_0^l \left( \sum_{v=1}^n \psi_v(t) \frac{d\varphi_v(x)}{dx} \right)^2 dx = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{v=1}^n \psi_v^2(t) \int_0^l \left( \frac{d\varphi_v}{dx} \right)^2 dx \quad (18)$$

Eine partielle Integration des Integrales  $\int_0^l \left( \frac{d\varphi_v}{dx} \right)^2 dx$

in Gl. (18) vorgenommen, führt es über in

$$\int_0^l \left( \frac{d\varphi_v(x)}{dx} \right)^2 dx = \varphi_v(x) \frac{d\varphi_v(x)}{dx} \Big|_0^l - \int_0^l \varphi_v(x) \cdot \frac{d^2\varphi_v(x)}{dx^2} \cdot dx \quad (19)$$

Sind die beiden Enden des Seiles in Klemmen eingespannt (Fig. 3), wie es voraussetzungsgemäß bei den meisten Freileitungsseilen in bezug auf eine Achsrichtung zutrifft, wird die Quadratur des ersten Produktes mit den Grenzen 0 → l gleich Null. Ueber die Bedingungen der stehenden Wellen ist folgendes zu sagen. Das Integral rechts der Gl. (18) und links der Gl. (19) wird gleich dem zweiten Faktor in Gl. (18). Dieses Ergebnis in die Beziehung der potentiellen Energie eingesetzt und die bereits früher genannten *Teillösungen* vom Typus

$$\frac{d^2\varphi_v(x)}{dx^2} = -k_v^2 \varphi_v(x) \quad (20)$$

berücksichtigt, führt auf das Quadratintegral der normierten Funktionen

$$U = -\frac{\sigma_s}{2} \sum_{v=1}^{\infty} k_v^2 \psi_v^2(t) \quad (21)$$

Es bedeutet hierin der Faktor  $k_v^2 = \frac{v\pi}{l_0}$ . Um eine

vollständige Beschreibung der Bewegungen durchzuführen, ist es nötig, die Arbeit, welche der Dämpfer jeweils phasenverschoben an das Seil abgibt, analytisch einzugliedern. Die Energie, die er selbst aufzehrt, wirkt sich als eine Vergrösserung der Dämpfung aus (Wirkungsgrad sehr hoch). Man denkt sich diese Energie durch die *kontinuierliche Erregung von der Luftströmung* gedeckt und berücksichtigt nach den Modellvorstellungen nur den *Einfluss* der eintretenden *Welleninterferenzen*. Weiter führt man die auf die Spannung  $\sigma_s$  des Seiles bezugnehmende Kraft  $Y(x, t)$  ein. Die angreifenden Kräfte des Dämpfers sind, wie auf Seite 591 vermerkt, nahezu in einem einzigen Punkt vereinigt. Erfasst werden die Kräfte durch die sehr anpassungsfähigen Quellfunktionen. Man stellt sich diese analytischen und stetigen Funktionen so vor, als besitzen sie ausserhalb eines festen Intervales  $\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon$  einen beliebig kleinen, vernachlässigbaren Wert, im Intervalle  $\pm \varepsilon$  einen belie-

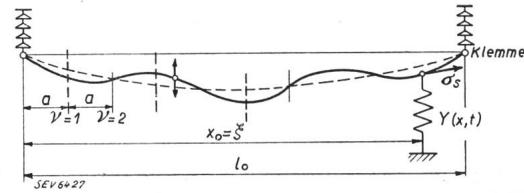


Fig. 3.  
Ersatzbild des schwingenden Seiles mit dem vollkommenen elastischen Gliede bzw. der Kraft  $Y(x, t)$  und der neuen Zugspannung  $\sigma_s$  Gl. (III).

big grossen. Solche Zackenfunktionen (Fig. 3 u. 4), die eine Punktquelle darstellen, verursachen eine nahezu sprungartige Änderung der ersten Ableitung in der Umgebung der Quelle. Die Ableitung im Intervalle  $\xi + \varepsilon \rightarrow \xi - \varepsilon$  wird

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} = - \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_Q(x) dx + \eta = -1 + \eta \quad (22)$$

Es konvergiert die Funktion  $\eta = \eta(\varepsilon)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Der negativ genommene Grenzwert der linken Seite für  $\varepsilon \rightarrow 0$  heisst die *Ergiebigkeit* der Quelle und beim Passieren einer solchen mit der Ergiebigkeit 1 springt die Ableitung näherungsweise um den Betrag

$$\frac{d\varphi}{dx} \Big|_{\xi-0}^{\xi+0} = 1 \quad (23)$$

Die von den örtlich begrenzten Quellen oder den Dämpfern, bezogen auf das schwingende Seil mit den Koordinatenzahlen  $\varphi$  geleistete Arbeit  $A$ , wird nach der Integration über ihren Wirkbereich  $x \rightarrow l$

$$A = \int_0^l \sigma_s Y(x, t) dy dx = \sigma_s \sum_{v=1}^{\infty} \delta \psi_v(t) \int_0^l Y(x, t) \varphi_v(x) dx = \sum_{v=1}^{\infty} P_v \delta \psi_v(t) \quad (24)$$

Diese angreifenden fremden Kräfte haben die Koordinatenzahlen  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$ . Sind die  $\psi$

an Grösse einander gleich, wird die einzelne Kraft  $P_v$

$$P_v = \sigma_s \int_0^l Y(x, t) \varphi_v(x) dx \quad (25)$$

Man ersieht aus der Form der Gl. 25 die Möglichkeit, die Kraft  $P_v$  als Koeffizienten der Fourierschen Entwicklung der Funktionen  $\sigma_s Y(x, t)$  nach den Eigenfunktionen  $\varphi_v(x)$  zu deuten. Setzt man die erhaltenen, von den Eigenfunktionen  $\varphi_v(x)$  und der transversalen Kraft  $Y(x, t)$  abhängige «Kraft  $P_v$ » nebst der Teillösung

$$c_v q_v = \sigma_s k_v^2 \psi_v(t)$$

in die Gl. 9 ein, ergibt sich für das Seil die Bewegungsgleichung in Form einer Integralgleichung<sup>16)</sup>

$$\varrho \frac{d^2 \psi(t)}{dt^2} + \sigma_s k_v^2 \psi_v(t) = \sigma_s \int_0^l \varphi_v(x) Y(x, t) dx \quad (26)$$

Wird die Dämpfung<sup>17)</sup> durch das Glied  $r \frac{\partial q}{\partial t}$ , die Erregerenergie des Seiles durch  $\Phi(v, d)$  einbezogen, müsste die obige Gl. übergehen in

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + c_v q_v - \int \dot{Y}(x, t) dx = \int \Phi(v, d) - r \frac{\partial p}{\partial t} \rightarrow 0.$$

Ausgehend von der gewöhnlichen Gleichung, ist man gezwungen, die durch den Dämpfer verursachte Kraftänderung  $\Delta \sigma_s$  im Seil an der Unstetigkeitsstelle  $\xi$  zu erfassen. Diese kann aber wegen der sehr geringen Spannungsänderung gegenüber den Auswirkungen in Form von Schwingungen nur sehr unzureichend bestimmt werden.

### c) Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung.

Die Bewegungsgleichung 26 des Seiles ist durch die Umgestaltung in eine grundsätzlich andere Form übergegangen. An Stelle der für einfache Verhältnisse ausreichenden Differentialgleichung ist eine Integralgleichung<sup>16)</sup> getreten. Die Lösung dieser Integralgleichung bietet verschiedene mathematische Schwierigkeiten, und man muss alle eine Vereinfachung ermöglichen physikalischen Bedingungen berücksichtigen. Die willkürlich angesetzten Funktionen müssen ermittelt werden und das ist durchaus nicht möglich durch die Bildung von gewöhnlichen Differentialgleichungen, wie sie beispielsweise eine weitere Differentiation von Gl. 26 ergeben würde. Vielmehr ist es die Integralgleichung, die hier als die alleinige Grundlage und den natürlichen Ausgangspunkt für eine Reihenentwicklung zu betrachten ist. Trotzdem das Suchen der zum Kern gehörigen Eigenfunktion allgemein sehr schwierig ist, gelingt es in unserem Fall, ein brauchbares Resultat herzuleiten.

Die wesentlichste Eigenschaft des Dämpfers wird die sein müssen, eine Schwingung zu erzeugen, die im Sinne spektraler Zerlegung die kleinsten Amplitudenwerte der Hauptkoordinaten am Seil erzwingt. Aus der bekannten Gleichung einer ungedämpften Saite, die für ein Seil ohne spezielle Vorbehalte an-

wendbar ist<sup>17)</sup>, erhält man nach Einführung der Wellenlänge  $\lambda$  aus Gl. (I) eine Schwingungszahl von

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}$$

Es sei zum voraus der Fall der Resonanz der Systeme ausser acht gelassen, denn sonst würde die Frequenz der störenden Kräfte mit der Eigenfrequenz des Seiles übereinstimmen und es könnten die Amplituden keine Verringerung erfahren. Analoge Verhältnisse<sup>18)</sup> treten bei den sehr einfachen Konstruktionen schwingungsfreier Aluminiumseile auf, bei denen durch eine Metalleinlage einfach Dissonanz angestrebt wird. Demzufolge setzt man mit voller Berechtigung den folgenden Zustand voraus: Der Dämpfer soll eine geringere, bzw. grössere Eigenfrequenz aufweisen als das Seil. Eine einfachere Lösung erhält man, wenn die Trägheit des Systems vernachlässigt wird. Das geschieht durch Null setzen der Glieder  $a_v \frac{\partial^2 q_v}{\partial t^2}$

in Gl. (9). Dass die Genauigkeit der Rechnung unter den genannten Absichten (Spektrum) keine Einbusse erleidet, ist dem folgenden Umstand zu verdanken. Die Amplituden werden nach den Bemerkungen auf S. 590 r. unten ziemlich klein (siehe Ableitung der Systemgl. 3 u. 4). Das charakteristische Verhältnis der Seilamplituden bei Einbeziehung der Massenträgheit (dynamische Theorie) und bei deren Vernachlässigung (statische Theorie) ist bei der Umgestaltung oder Vereinfachung der Systemgleichungen 1—26 allein massgebend. Ist  $\omega_0$  die Eigenfrequenz des Dämpfers (Störungsquelle) und  $\omega_s$  die des Seiles, wird die dynamische Vergrösserung  $\mu$ , die als eine Verhältniszahl zwischen Frequenz und Eigenfrequenz zu werten ist, durch die Beziehung dargestellt

$$\mu = \frac{1}{1 - \left( \frac{\omega_0^2}{\omega_s^2} \right)} \quad (28)$$

Erreicht man genügend Dissonanz, etwa bei  $\mu$ -Werten von  $0,8 \dots 1,0$ , so ist die gestellte Bedingung der Trägheitslosigkeit gerechtfertigt. Immer wird man bemüht sein, die Grundfrequenz  $\omega_s$  gegenüber  $\omega_0$  genügend gross zu halten. Es lässt sich demzufolge die Gl. (26) für die langsamen Schwingungen umschreiben. Die Koordinate  $\psi$  wird

$$\psi_v = \frac{1}{k_v^2} \int_0^l Y(x, t) \varphi_v(x) dx \quad (29)$$

Die so erhaltene  $\psi_v$ -Funktion in den Ansatz Gl. (11) eingesetzt, führt auf die Koordinatengleichung

$$y = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varphi_v(x)}{k_v^2} \int_0^l Y(x, t) \varphi_v(x) dx \quad (30)$$

<sup>17)</sup> Ruedy: Canadian Journ. Research, Vol. 13, Sec. A.

<sup>18)</sup> Preiswerk: Bull. SEV 1934, S. 252, und ETZ 1934, S. 1125.

<sup>16)</sup> D. Hilbert: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Teubner 1924.

Betrachtet man den Grenzfall einer nahezu punktförmig wirkenden Quelle, so wie die angreifende Kraft des Dämpfers in  $x = \xi$  eine ist, muss als Koordinatenbegrenzung für die Funktion  $Y(x, t)$  die Ungleichung gelten

$$\xi - \varepsilon \leq x \leq \xi + \varepsilon. \quad (31)$$

Für eine Ergiebigkeit von 1 wird das Integral über die Kraft

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} Y(x, t) dx = 1^{19} \quad (32)$$

Setzt man den erhaltenen Wert in Gl. (30) ein und schreibt für den neuen Koordinatenwert die Funktion  $K(x, t)$ , so wird die Amplitude

$$y = K(x, \xi) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(\xi)}{k_v^2} \quad (33)$$

Dieses transzendente Summengebilde lässt die Schwierigkeit erkennen, dass man eine Lösung gewohnter Art nicht findet, weshalb man gezwungen ist, diese in der Mathematik benannte Bilinearform nach den Eigenfunktionen zu entwickeln. Man nennt die Greensche Funktion  $K(x, \xi)$  den Kern der Integralgleichung. Das Resultat der Lösung dieses Gleichungsgebildes, deren Eigenwerte sich als Wurzeln einer transzendenten Gleichung ergeben, werden die Eigenfunktionen  $\varphi_v(x)$  sein, von denen jede eine Hauptschwingung oder «stehende» Welle darstellt.

Zur Lösung dieser Gleichung gelangt man folgendermassen. Die Kraft  $Y(x, t)$  denke man sich auf eine periodische Funktion  $\sigma_s f(x) \cdot \cos(\omega_Q t)$  reduziert, eine in der Wirklichkeit durchaus zutreffende Annahme.  $Y(x, t)$  in die im Seil *tangential* wirkende Kraft  $P_v$  eingesetzt, führt auf die Gl. (34)

$$P_v = \cos(\omega_Q t) \int_0^l \sigma_s f(x) \varphi_v(x) dx \quad (34)$$

Man erinnere sich der Gl. (9), die beim Einsetzen der gestellten Bedingung die allgemeinen Koordinaten  $q_v$  bei periodischer Erregung lieferte. Mit dem Ansatz  $q_v = A_v \cos \omega_Q t$  und bei der Gültigkeit der Ungleichung  $c_v - \omega_Q^2 a_v \geq 0$  kann die Koordinate der  $v$ -ten Schwingung nach dem Auflösen der Gl. (25) geschrieben werden

$$q_v = \frac{F_v(x) \cos \omega_Q t}{(c_v - \omega_Q^2 a_v)} \quad (35)$$

Diese Gl. (35) sagt aus, dass sich für jede Hauptkoordinate eine bestimmte Amplitude ergibt. Die Funktion  $\psi_v(t)$  des transformierten Systems wird nun analog geschrieben

<sup>19)</sup> Selbstverständlich ist  $Y(x, t)$  eine Funktion der eigenen Masse  $M$ , des Dämpfers, also

$$Y(x, t) = f(M) = f(x, t, M, \omega^2)$$

Hiezu Gl. 24 und 25.

$$\psi_v = \frac{\cos \omega_Q t \cdot \sigma_s \int_0^l f(x) \varphi_v(x) dx}{\varrho (\omega_v^2 - \omega_Q^2)} \quad (36)$$

$$\text{wo } \omega_v = \frac{\pi}{\left(\frac{1}{v}\right)} \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}$$

gesetzt ist. Die Funktion  $\psi_v(t)$  in den Lösungsansatz [Gl. (11)], die als Gleichung der Eigenfunktionen zu bezeichnen ist, eingesetzt, ermöglicht die Koordinate  $y$  bei Einführung der Abkürzung  $k_v^2 = \frac{\varrho \omega_v^2}{\sigma_s}$  zu berechnen.

$$y = \cos(\omega_Q t) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varphi_v(x)}{k_v^2 - k^2} \int_0^l f(x) \varphi_v(x) dx \quad (37)$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen, sei  $k_v^2 = \lambda'$  substituiert und die Funktion  $\varphi_v(x) = \frac{y}{\cos \omega_Q t}$  wird

$$\varphi(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varphi_v(x)}{\lambda'_v - \lambda'} \int_0^l f(x) \varphi_v(x) dx \quad (38)$$

In dieser Funktion tritt die Unbekannte  $\varphi(x)$  sowohl ausserhalb als auch innerhalb des Integralzeichens auf. Es wird die Aufgabe sein, zu zeigen, dass diese Gleichung einer Integralgleichung zweiten Grades von der Form

$$\varphi(x) - \lambda' \int_0^l K(x, \xi) f(\xi) d\xi = F(x) \quad (39)$$

genügt.

#### d) Herleitung der Integralgleichung.

Die bekannte Funktion, die eine quellenmässige Darstellung erlaubt, sei

$$F(x) = \int_0^l K(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (40)$$

Mit Benutzung der Bilinearformel Gl. (33) folgt

$$F(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varphi_v(x)}{\lambda'_v} \int_0^l \varphi_v(\xi) f(\xi) d\xi \quad (41)$$

Vergleicht man dies mit Gl. (38), so kann durch Subtraktion der einzelnen Summenglieder nach E. Schmidt <sup>20)</sup> eine ähnliche Gleichung nachgebildet werden, und zwar gilt

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda'_v - \lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right) \varphi_v(x) \int_0^l \varphi_v(\xi) f(\xi) d\xi = \varphi(x) - F(x) \quad (42)$$

<sup>20)</sup> E. Schmidt: Math. Ann. Bd. 63 (1907), S. 454; Bd. 64 (1907), S. 161—174. Einige die Grundzüge der Theorie übermittelnde Literatur findet sich in <sup>16)</sup> D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Teubner 1924.

Hilbert Courant: Methoden der mathematischen Physik I, Bd. 12, S. 96, 131, Springer, Berlin 1931.

Durch Multiplikation und Integration erhält man nach dem Einsetzen der Gl. (38) die Relation

$$K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varphi_v(x)}{\lambda'_v(\lambda'_v - \lambda')} \int_0^l \varphi_v(\xi) f(\xi) d\xi \quad (43)$$

die, wie vorher bewiesen [rechtes Glied der Gl. (42)], mit  $\frac{\varphi(x) - F(x)}{\lambda'}$  übereinstimmt. Folglich wird die Funktion  $\varphi(x)$  identisch mit den in der allgemeinen Form der Gl. (39) bezeichneten. Gl. (3) aufgelöst liefert die Grösse  $\varphi(x)$ , nämlich,

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda' \int_0^l K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (44)$$

Man sieht, dass die Funktion  $\varphi(x)$  in der Tat der obigen Integralgleichung genügt. Die Entwicklung von  $F(x)$  in eine nach den Eigenfunktionen  $\varphi_v(x)$  fortschreitende Reihe ist der einzige Ausweg, um zu einer Lösung zu gelangen. Man schreibt

$$F(x) = A_1 \varphi_1(x) + A_2 \varphi_2(x) + \dots + A_v \varphi_v(x) \quad (45)$$

und findet aus den Orthogonalitätsbedingungen der Eigenfunktionen und späterer Multiplikation mit  $\varphi_v(x)$  und Integration über die Länge  $l$ , die Zwischengrösse  $A_v$ :

$$A_v = \int_0^l F(x) \varphi_v(x) dx \quad (46)$$

Die allgemeine Fouriersche Entwicklung von  $F(x)$ <sup>21</sup> lautet

$$F_v(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v(x) \int_0^l F(\xi) \varphi_v(\xi) d\xi. \quad (47)$$

Vergleicht man das erhaltene Resultat mit der Gl. (40), so besteht eine Identität zwischen

$$\lambda' \int_0^l F(\xi) \varphi_v(\xi) d\xi = \int_0^l \varphi_v(\xi) f(\xi) d\xi \quad (48)$$

Da die Kraft des Dämpfers in dem Punkt  $x = \xi$  eingreift, lässt sich Gl. (38) bei Ueberführung der Koordinate  $x$  in  $\xi$  schreiben

$$\varphi(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\lambda_v \varphi_v(x)}{(\lambda'_v - \lambda)} \int_0^l \varphi_v(\xi) F(\xi) d\xi \quad (49)$$

Durch Aufteilung der Summe und Anwendung der allgemeinen Fourier-Entwicklung wird die Amplitude an der Stelle  $x$  endgültig

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda' \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varphi_v(x)}{(\lambda'_v - \lambda)} \int_0^l \varphi_v(\xi) F(\xi) d\xi \quad (50)$$

Durch Gl. (50) ist das gestellte Problem allgemein gelöst. Präziser gesagt, es gibt für alle Schwingzu-

<sup>21</sup>) Blochner: Vorlesungen Fourierscher Integrale, Teubner, Leipzig 1932.

stände entsprechende Lösungen. Schwierigkeiten bietet die Fouriersche Entwicklung, denn erst ihre definitive Form ermöglicht, die Werte der Hauptschwingungen zu ermitteln. Wie eine Quellfunktion  $F(\xi)$  anzusetzen ist, wird in einem folgenden Beispiel gezeigt. Bedingungen können nun an alle Glieder gestellt werden, und zwar so, dass bestimmte Amplitudengrössen dank des Eingreifens des Störers (oder Dämpfers) nicht erreicht werden. Dies war die tiefere Absicht dieser methodischen Entwicklung, eine Relation mit einer allgemeinen Fourierschen Reihe zu finden, um den spektralen Charakter der durch den Dämpfer verursachten Interferenzen, welche in anderen Untersuchungen als irgendeine *Dämpfung* zum Ausdruck kommen, zu beweisen.

### 3. Beispiel.

Beim einfachsten Fall kann die Fouriersche Entwicklung in der Integralgleichung umgangen werden, sofern eine eindeutige und zugleich genügend «einfache» Quelle in  $x = \xi$  vorhanden ist. Für eine

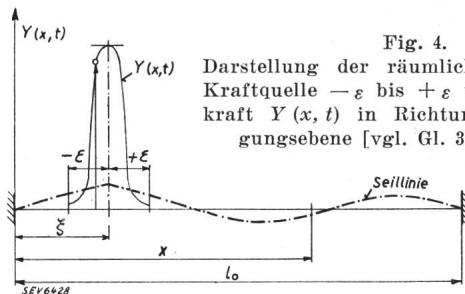


Fig. 4.  
Darstellung der räumlich ausgedehnten Kraftquelle  $-\varepsilon$  bis  $+\varepsilon$  und der Einzelkraft  $Y(x, t)$  in Richtung der Schwingungsebene [vgl. Gl. 30), (31), (32)].

Kraft  $Y(x, t)$ , die sich auf die in  $t$  periodische Funktion  $\sigma_s f(x) \cdot \cos \omega_0 t$  reduzieren lässt, wird nach Gl. (37) die Koordinate  $y$  eines jeden Seilpunktes für  $v = 1$  (Grundharmonische)

$$y = \cos \omega_0 t \frac{\varphi_1(x)}{k_1^2 - k^2} \int_0^l f(x) \varphi_1(x) dx \quad (51)$$

Für  $f(x)$  setzt man die schon angedeutete Quellfunktion ein, die ihr Maximum bei  $\xi$  hat und der analytischen Gleichung

$$f(x) = \frac{u}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2(x-\xi)^2} \quad (52)$$

genügt (Fig. 4). Wird die Hauptkoordinate  $\varphi_1(x)$  eine Sinusfunktion mit einer Grundharmonischen

$A_1 \sin \frac{\pi}{l} x$ , geht Gl. (51) über in

$$y = \frac{A_1}{k_1^2 - k^2} \cos(\omega_0 t) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \int_0^l \frac{u}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2(x-\xi)^2} \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) dx \quad (53)$$

Die konstanten Werte in und ausserhalb dem Integrale in  $\beta$  zusammengefasst, den Formfaktor der Quelle  $u$  individuell eingetragen, führt die Gl. (53) über in

$$y = \beta \cdot u \cos(\omega_Q t) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \int_0^l e^{-u^2(x-\xi)^2} \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) dx \quad (54)$$

Das Integral der Gl. (54) lässt sich mit einer Reihenentwicklung in den gewünschten Grenzen  $0 \dots l$  lösen.

Beabsichtigt ist, den Weg des Lösungsganges zu zeigen, weshalb auf die Ueberführung des Integrales in das komplexe Gebiet und der darauffolgenden totalen Lösung verzichtet ist (vgl. 2). Substituiert man die Veränderliche  $x - \xi = \alpha'$  und  $\frac{\pi}{l_0}(\alpha' + \xi) = \lambda'\alpha'$ , wird das Integral  $J$  der Gl. (54) übergehen in

$$J = \int_{-l}^{l-\xi} e^{-(u\alpha')^2} \sin(\lambda'\alpha') d\alpha' \quad (55)$$

Die Exponentialfunktion in eine Reihe entwickelt

$$e^{-u^2\alpha'^2} = 1 - \frac{(u\alpha')^2}{1!} + \frac{(u\alpha')^4}{2!} - \dots + = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(u\alpha')^{2n}}{n!} \quad (56)$$

und dieselbe an Stelle der Exponentialfunktion in Gl. (55) eingesetzt, ergibt die neue Beziehung

$$J = \int_{-\xi}^{l-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{n!} (\alpha')^{2n} \cdot \sin(\lambda'\alpha') d\alpha' \quad (57)$$

Nach der Integrationsmethode für Potenz- und trigonometrische Funktionen bei gleichzeitiger Einführung des Parameters  $p$  wird nach bekannten Gesetzen<sup>22)</sup>

$$\int \alpha'^n \sin(\lambda'\alpha') d\alpha' = \sum_{p=0}^n \frac{1}{(\lambda')^{p+1}} \cdot \frac{n! \alpha^{-p}}{(n-p)!} \cos \lambda'\alpha' \quad (58)$$

Diese Gl. (58) der Integration der Summe Gl. (57) zugrunde gelegt, führt, wenn  $n' = 2n$  ersetzt wird, auf das endgültige Integral<sup>23)</sup> (cos-Glieder)

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{n!} \sum_{p=0}^{2n} \frac{(2n)!}{(2n-p)!} \cdot \frac{(\alpha')^{2n-p}}{(\lambda')^{p+1}} \cdot \cos \lambda'\alpha' \quad (59)$$

$p = 0, 1, 2, 3, \dots$

Aus Gl. (56) ist die Tatsache ersichtlich, dass die Wahl von  $n$  (Anzahl Glieder) nur von der gewünschten Genauigkeit abhängt und dass ausserhalb dem Bereich  $\varepsilon$  die Exponentialfunktion nahezu Null wird. Die endgültige Koordinate  $y$  schreibt sich beim Extrahieren des Faktors  $\cos \lambda'\alpha'$

<sup>22)</sup> Handbuch der Physik VIII (1925), S. 172, Julius Springer, Berlin.

<sup>23)</sup> Jahnke-Emde: Funktionentafeln, Teubner, Leipzig 1933.

$$y = \frac{u \beta}{(\lambda')^{p+1}} \cdot \cos(\omega_Q t) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \cos(\lambda'\alpha') \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n}}{n!} (-1)^n \sum_{p=0}^{2n} \frac{2n!}{(2n-p)!} (x-\xi)^{(2n-p)} \quad (60)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Greift man, um einen Ueberblick über die Gl. (60) zu erhalten, auf Gl. (55) und (56) zurück, so ersieht man einen Vorteil, den die Exponentialfunktion bietet. Um ein genügend genaues Resultat zu erhalten, muss die Integration praktisch nur über ein kleines Gebiet  $\pm \varepsilon$  erfolgen.

Denkt man sich für eine *Ergiebigkeit 1* der Quelle die konstanten Summen in  $B$  ( $x = \text{const.}$ ) unter gleichzeitiger Einbeziehung von  $\lambda'\alpha'$  zusammengefasst, so bilden die Veränderlichen in Abhängigkeit von der Frequenz des Dämpfers  $\omega_Q$  und der Eigenfrequenz mit den Grössen  $x - \xi$  die folgende Relation

$$y = B \cos(\omega_Q t) \cos\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \quad (61)$$

Es wird nun die Aufgabe sein, die Schwingungen so zu erzeugen (Interferenzmethode), dass nirgends eine grosse Amplitude auftreten kann. Eine Grundgleichung liegt in (61) vor. Ob es vom Standpunkt der Ermüdungsfestigkeit vorteilhaft erscheint, kurze Wellenlängen oder längere mit grösseren Amplituden entstehen zu lassen, wird die Erfahrung zeigen. Am aussichtsreichsten wird die Einführung der Bedingung sein, niemals Resonanz entstehen zu lassen.

Gl. (61) hat sehr viel Aehnlichkeit mit der Bewegungsgleichung (10) einer *gezupften Saite*, abgesehen von der neu hinzugekommenen Quellenfunktion  $\exp(x - \xi)^{(2n-p)}$ .

Der noch einfachere Fall ergibt sich, wenn man eine punktförmige Quelle ( $\omega_Q = 0$ ) von der Ergiebigkeit<sup>24)</sup> 1 in  $x = \xi$  annimmt [Gl. (32)]. Weiter beachte man die Normierung der Eigenfunktionen Gl. (16) und versuche dann die Gl. (33) durch eine Funktionenfolge zu bestätigen. Setzt man in Gl. (33)  $k_v^2 = \lambda_v$ , so gilt  $\lambda_v = \frac{v^2 \pi^2}{l^2}$ . Die Eigenfunktion wird dann

$$\varphi_v = A_v \sin\left(\frac{v \pi x}{l}\right) \quad (62)$$

Die Sinusfunktion in Gl. (16) eingesetzt, ergibt die Konstante  $A_v$ , während die Eigenfunktion  $\varphi_v(x)$  selbst wird

$$\varphi_v(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l}} \cdot \sin\left(\frac{v \pi x}{l}\right) \quad (63)$$

Die allgemeine Lösung erhält sodann die Form

$$y = \frac{2 l_0}{\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{v \pi}{l} \cdot x\right) \sin\left(\frac{v \pi}{l} \cdot \xi\right)}{v^2} \quad (64)$$

<sup>24)</sup> Im Punkte  $\xi$  entsteht eine Punktquelle von der Ergiebigkeit 1, wenn die Kraft  $P = \sigma_s$  wird (siehe Gl. 22, 23).

Wegen dem Faktor  $\nu^2$  im Nenner werden die oberen Harmonischen *rasch unmerklich klein* und für die *Grundwelle* ergibt sich die sehr einfache Gleichung

$$y = \frac{2}{\pi^2} l \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi \xi}{l}\right) \quad (65)$$

einer stehenden Welle.

Durch diese angeführten Gleichungen wurden die einfachsten Fälle errechnet. Es ist die weitere

Aufgabe, die Bedingungen einzuführen, die für die Interferenz (Dämpfung genannt) der einzelnen Wellen den vorteilhaftesten Zustand schaffen. Beispielsweise verlangt man die minimalste Amplitudengröße. Da aber die Absicht *leitend* war, die allgemeinen theoretischen Grundlagen vorerst herzuleiten, fällt die Behandlung der individuell wünschbaren Bedingungen aus dem Rahmen dieser Arbeit.

## Erfolgsaussichten der künstlichen Atmung bei elektrischen Unfällen.

(Mitgeteilt vom Starkstrominspektorat.)

614.8 : 621.3

Vor einigen Monaten erschien als Heft 4 der Schriftreihe des Reichsgesundheitsamtes in Berlin von Dr. med. W. Estler eine Broschüre, betitelt: «Mit welchen Aussichten machen wir Wiederbelebungsversuche?» Der Inhalt dieser Broschüre fußt auf Erhebungen in grösserer Umfang, die in Deutschland vorgenommen wurden, um den Wert der künstlichen Atmung an Hand praktischer Erfahrungen festzustellen. Der Verfasser gelangt dabei zum Schlusse, dass die künstliche Atmung im allgemeinen keinen grossen Erfolg verspreche und dass ihr therapeutischer Wert nicht so sehr in einer wirklichen «Wiederbelebung» liegen dürfte, als vielmehr in der Erhaltung des fliehenden Lebens, wenn nur eine bedrohliche Beeinträchtigung der Herz- und Atemtätigkeit vorliege. Die Erhebungen bezogen sich allerdings in der weit überwiegenden Mehrzahl auf Fälle von Leuchtgas- und Kohlenoxydvergiftungen sowie auf Ertrinken, denn unter den insgesamt 415 untersuchten Fällen, in denen Wiederbelebungsversuche vorgenommen wurden (wobei aber in 180 Fällen keine strenge Indikation auf Atmungs- und Herzstillstand vorlag), befanden sich nur 6 Starkstromfälle. Von diesen Starkstromfällen waren lediglich von drei die getroffenen Wiederbelebungsmassnahmen im einzelnen genau bekannt; in allen diesen drei Fällen wurden aber die Wiederbelebungsversuche verhältnismässig spät begonnen. Estler erwähnt nun selbst, dass für die Beurteilung der Wiederbelebungs möglichkeiten bei elektrischen Unfällen die vorliegenden sechs Beobachtungen an sich zahlenmässig zu gering seien. Da wir auf die Broschüre von Estler durch die Schweizerische Unfallversicherungsanstalt in Luzern aufmerksam gemacht wurden, veranlassten wir den früheren Forschungsarzt der Aerztekommision des VSE zum Studium der Starkstromfälle, Herrn Privatdozent Dr. med. R. Sulzer in Genf, sich über deren Inhalt zu äussern. In der Annahme, dass seine Darlegungen über den Wert der Wiederbelebungsversuche bei Starkstromfällen die elektrotechnischen Fachkreise interessiere, veröffentlichten wir sie im folgenden. Herr Privatdozent Dr. med. R. Sulzer äussert sich folgendermassen:

Die immer wieder auftauchenden Zweifel an der Zweckmässigkeit der im wesentlichen auf künstlicher Beatmung beruhenden Wiederbelebungsversuche an Starkstromverunglückten sind durch den kleinen Prozentsatz der damit erzielten Erfolge bedingt.

Zur Klärung der Frage, welche Erfolge von einer solchen Behandlung erhofft werden können, mögen die folgenden Feststellungen von Nutzen sein. Der Tod ist, biologisch betrachtet, kein momentanes, sondern ein sich über Stunden und Tage hinziehendes Ereignis. In der Praxis wird allerdings der Herzstillstand als Moment des Todes gewertet, weil erfahrungsgemäss ein Herz, das über eine Minute lang stillgestanden ist, von selber seine Tätigkeit nie wieder aufnimmt. Es besteht jedoch vielfach die Möglichkeit, ein Herz kurz nach dem

Stillstand künstlich wieder in Gang zu bringen, ähnlich wie ein stillgestandener Benzinmotor wieder angekurbelt werden kann. Bleibt aber die Herz tätigkeit über längere Zeit aus, so verschlechtern sich die Lebensbedingungen im Organismus infolge des Stillstandes der Blutzirkulation, und die Organe stellen, je nach ihrer Empfindlichkeit eines um das andere ihre Tätigkeit unwiderruflich ein. Wichtig ist, dass die lebenswichtigen Organe, wie Gehirn und Herz, die ersten sind, die durch den Kreislaufstillstand irreversibel geschädigt werden.

Es bedeutet eine Spitzfindigkeit, von wahrem und falschem Scheintod und dergleichen zu sprechen. Solche Begriffe sind wertlos, da in praxi ihre gegenseitige Abgrenzung ein Ding der Unmöglichkeit ist.

Die Mittel, welche gelegentlich imstande sind, ein stillstehendes Herz von neuem zum Schlag zu veranlassen, sind vor allen Dingen die Herzmassage, Reize, wie der Einstich einer Nadel ins Herz, intrakardiale Einspritzungen von Mitteln wie Adrenalin, Coramin und dergleichen. Aber im Falle der Verunglückung durch Starkstrom hat man es meist nicht mit stillgestandenen, sondern mit flimmern den Herzen zu tun, und gegenüber solchen wurde von den genannten Mitteln kaum je eine günstige Wirkung beobachtet. Jedenfalls ist es durchaus illusorisch, von der künstlichen Beatmung eine Wiederherstellung der normalen Tätigkeit flimmernder Herzen zu erwarten.

Nun gibt es aber offenbar durch Elektrizität verursachte Unglücksfälle, wo ein primärer Atmungs stillstand vorliegt, wo also das Herz dem Flimmern entgangen ist und seine Tätigkeit, wenn auch unter Umständen nur sehr schwach, noch anhält. *In diesen Fällen ist die künstliche Beatmung das beste, wenn nicht das einzige Mittel der Wiederbelebung.* Das Wort «Wiederbelebung» ist hier so zu verstehen, dass Menschen im genannten Zustand, sich selbst überlassen, unfehlbar in den irreversiblen Tod hinübergleiten würden. Die lebensrettende Wirkung der künstlichen Atmung kommt in der Studie von W. Estler deutlich zum Ausdruck. An einer Stelle der genannten Arbeit ist z. B. zu lesen, dass von drei Fällen von Atmungsstillstand mit noch feststellbarer Herzaktivität alle durch Pulmotorbehandlung gerettet werden konnten.