

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 28 (1937)  
**Heft:** 19

**Artikel:** Die Doppelleitung als Vierpolkette  
**Autor:** Boveri, Th.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1059867>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

REDAKTION:  
Generalsekretariat des Schweiz. Elektrotechn. Vereins und des  
Verbandes Schweiz. Elektrizitätswerke, Zürich 8, Seefeldstr. 301

ADMINISTRATION:  
Zürich, Stauffacherquai 36 ♦ Telephon 51.742  
Postcheck-Konto VIII 8481

Nachdruck von Text oder Figuren ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit Quellenangabe gestattet

XXVIII. Jahrgang

N<sup>o</sup> 19

Mittwoch, 15. September 1937

## Die Doppelleitung als Vierpolkette.

Von Th. Boveri, Baden.

621.391.31

*Unter spezieller Benutzung eines Aufsatzes von L. Brillouin erläutert der Autor am Beispiel der gewöhnlichen Doppelleitung die Anwendung moderner algebraischer Methoden auf die Lösung elektrotechnischer Aufgaben. Er hat sich dabei bemüht, einen Mittelweg zu finden zwischen genügend breiter Darlegung der allgemeinen Grundsätze einerseits und der trotzdem genügend ausführlichen Behandlung eines konkreten Beispiels andererseits. Es besteht Grund zur Annahme, dass Methoden, wie die beschriebene, sich bei der mathematischen Behandlung technischer Probleme immer mehr einführen werden.*

*En se servant tout particulièrement d'un article de M. L. Brillouin, l'auteur démontre à l'aide de la conduite électrique à deux fils l'application des méthodes algébriques modernes à la solution de problèmes électrotechniques. Il s'est efforcé de trouver un chemin intermédiaire entre une discussion assez étendue des principes généraux d'une part et l'explication assez détaillée d'un exemple d'autre part. On a toute raison à supposer que des méthodes analogues s'introduiront de plus en plus dans le traitement mathématiques des problèmes techniques.*

### 1.

Man findet in der Mechanik und neuerdings auch in der Elektrotechnik und sogar in der Atomtheorie häufig Beziehungen der folgenden Form

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ y_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Betrachtet man die drei Grössen  $x$  und die drei Grössen  $y$  je als Komponenten eines Vektors, so drückt Gl. (1) das Bestehen einer linearen (und homogenen) Vektorfunktion zwischen den Vektoren  $y$  und  $x$  aus. Die wichtigsten Beispiele aus der Mechanik für solche sind die drei folgenden:

a) Die relative Verschiebung gegeneinander von zwei eng benachbarten Punkten eines verformten elastischen festen Körpers ist eine lineare Vektorfunktion des Abstandes der beiden Punkte.

b) Die auf ein Flächenelement im Innern eines gespannten elastischen Körpers wirkende Kraft ist eine lineare Vektorfunktion der Normalen des betreffenden Flächenelementes.

c) Der Drehimpuls eines rotierenden starren Körpers ist eine lineare Vektorfunktion der Winkelgeschwindigkeit.

Die Koeffizienten  $a$ , die sogenannten Tensorkomponenten, haben dabei besondere Namen. Diejenigen mit gleichen Indices heissen in den drei Fällen Dehnungen, Normalspannungen, bzw. Trägheitsmomente, die mit den gemischten Indices Scherungen, Schubspannungen, bzw. Zentrifugalmomente. Dabei gilt in allen drei Fällen  $a_{12} = a_{21}$  etc. Man nennt in diesem wichtigen Spezialfalle die lineare Vektorfunktion symmetrisch.

### 2.

Bei den Anwendungen der linearen Vektorfunktionen auf andere Teile der Physik hat man unter Umständen in drei Richtungen mathematische Erweiterungen vorzunehmen, welche die Anschaulich-

keit beeinträchtigen, ohne im übrigen grosse Schwierigkeiten zu bereiten. Erstens ist die Zahl der Dimensionen statt drei eventuell beliebig; es sind dann also Komponenten  $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$  usw. und entsprechende für  $y$  in Betracht zu ziehen. Dabei geht die räumliche Vorstellbarkeit verloren. Zweitens können die betrachteten Vektorkomponenten komplexe Zahlen sein, wie z. B. im Falle von Wechselstromgrössen. Hierbei ist zu beachten, dass man gewohnt ist, sich komplexe Grössen selbst wieder geometrisch in einer Ebene zu veranschaulichen. Man hat dann diese Ebene vollständig zu trennen, von dem eventuell ja ebenfalls zweidimensionalen Raume, in dem die Vektoren mit den Komponenten  $x_1 x_2$  bzw.  $y_1 y_2$  abgebildet werden<sup>1)</sup>. Drittens endlich kann es zweckmässig sein, im Gegensatz zu den Beispielen aus der Mechanik zwei Grössen verschiedener Dimension, etwa Spannung und Strom zu einem einzigen Vektor zusammenzufassen. Dies bewirkt, dass die  $a$  in Gl. (1) verschiedene Dimensionen annehmen, beschränkt aber dafür im eben genannten Falle die Dimensionszahl auf zwei, sofern man nicht gleich die Strom- und Spannungsverhältnisse verschiedener Stromzweige in einen einzigen Vektor zusammenfassen will.

Solche weitgehenden Zusammenfassungen von Spannungen und Strömen, allerdings in Vektoren mit Komponenten jeweils gleicher Dimension (Spannungen bzw. Ströme) erläutert G. Kron in seinen Aufsätzen<sup>2)</sup>. Dabei bedient er sich nach Bedarf zweier verschiedener vereinfachender Schreibwei-

<sup>1)</sup> A. Pen-Tung Sah, Complex Vectors in 3-Phase Circuits. Electr. Engng. 1936, S. 1356.

<sup>2)</sup> Gabriel Kron, The application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery. Gen. Electr. Rev. 1935, S. 181.

sen, die scheinbar nur Abkürzungen bedeuten, aber in Wirklichkeit doch einen neuen Begriff einführen, denjenigen der Matrix nämlich, worunter man die Zusammenstellung der Tensorkomponenten aus Gl. (1) in folgender Form versteht

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist nicht nur als eine Zusammenstellung von mehreren Grössen, sondern nach Möglichkeit als eine einzige «hyperkomplexe» Grösse aufzufassen, mit welcher etwa der Vektor  $x$  «multipliziert» wird<sup>3)</sup>. Um dies zu ermöglichen, verwendet man in der Dyaden-Schreibweise von Gibbs Einheitsvektoren, für die ja in der Vektorrechnung gilt

$$e_1^2 = 1; e_2^2 = 1 \text{ usw.} \quad e_1 \cdot e_2 = 0 \text{ usw.}$$

und führt sie in die Matrix ein:

$$A = \left. \begin{aligned} &\alpha_{11} e_1 e_1 + \alpha_{12} e_1 e_2 + \alpha_{13} e_1 e_3 \\ &+ \alpha_{21} e_2 e_1 + \alpha_{22} e_2 e_2 + \alpha_{32} e_2 e_3 \\ &+ \alpha_{31} e_3 e_1 + \alpha_{32} e_3 e_2 + \alpha_{33} e_3 e_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Beachtet man, dass mit Hilfe von Einheitsvektoren die Vektoren  $y$  und  $x$  zu schreiben sind

$$\begin{aligned} y &= e_1 y_1 + e_2 y_2 + e_3 y_3 \\ x &= e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3 \end{aligned}$$

so findet man, dass die Gleichung

$$y = A \cdot x$$

tatsächlich ausgeschrieben die Form der Gl. (1) annimmt.

Eine andere Schreibweise ist die Tensorschreibweise

$$y_a = \alpha_{a1} x_1 + \alpha_{a2} x_2 + \alpha_{a3} x_3 + \dots = \sum_n \alpha_{an} x_n$$

abgekürzt =  $\alpha_{an} x_n$

Hier ist  $\alpha_{an}$  das Symbol für die Matrix.

G. Kron fasst nun beispielsweise alle Zweigströme eines komplizierten Netzwerkes in einen Vektor zusammen. Durch Multiplikation mit einer dimensionslosen Matrix  $C$  erhält er andere Ströme, wie sie durch geeignete Zusammenschaltung der einzelnen Zweige sich einstellen und durch weitere Multiplikation mit einer «Impedanz-Matrix»  $Z$  folgen dann auf einen Schlag alle Teilspannungen. Dabei ist zu beachten, dass Spannungen und Ströme

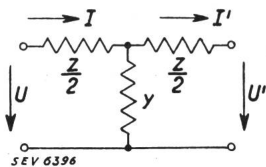


Fig. 1a.

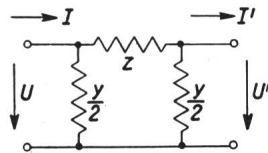


Fig. 1b.

durch die Matrizen so transformiert werden müssen, dass die Erhaltung der Leistung gewährleistet wird, wo dies physikalisch nötig ist. Besonders klar erläutert dies A. Boyajian<sup>4)</sup>.

<sup>3)</sup> M. Bocher, Introduction to higher Algebra. New York 1936, S. 60.

<sup>4)</sup> A. Boyajian, The Tensor, a new Engineering Tool. Electr. Engng. 1936, S. 856.

Geeigneter als diese komplizierten Beispiele ist aber für die Einführung in die Matrizenrechnung die Behandlung der einfachen Doppelleitung als Kette, entstanden durch Aneinanderreihung von Elementen nach Fig. 1a oder 1b, welche Elemente man wegen ihren vier Klemmen auch Vierpole nennt<sup>5)</sup>. Dabei ergibt sich auch Gelegenheit, die allgemein so wichtige Hauptachsenzerlegung anzuwenden. Allerdings hat man dafür Vektoren mit Komponenten gemischter Dimensionen in Kauf zu nehmen.

### 3.

Die leicht abzuleitenden und in der Literatur<sup>6)</sup> zu findenden Beziehungen zwischen Spannung und Strom am «Eingang»: ( $UI$ ) und am «Ausgang» ( $U'I'$ ) unseres Leitungselementes kann man in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} U' &= \alpha_{11} U + \alpha_{12} I \\ I' &= \alpha_{21} U + \alpha_{22} I \end{aligned} \quad (3)$$

Dabei gilt für Fig. 1a das T-Glied

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha_{22} = 1 + \frac{yz}{2}; \quad \alpha_{12} = -z \left( 1 + \frac{yz}{4} \right); \\ \alpha_{21} &= -y \end{aligned}$$

und für Fig. 1b das  $\pi$ -Glied

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha_{22} = 1 + \frac{yz}{2}; \quad \alpha_{12} = -z; \\ \alpha_{21} &= -y \left( 1 + \frac{yz}{4} \right) \end{aligned}$$

Weil  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha$  ist, nennt man den Vierpol symmetrisch, und im folgenden wird der Einfachheit halber diese Beziehung im allgemeinen vorausgesetzt, deren Nichtbestehen aber keinerlei Schwierigkeiten, sondern nur umständlichere Formeln verursachen würde. Man beachte dagegen, dass die  $\alpha$ -Matrix wegen  $\alpha_{12} \neq \alpha_{21}$  für beide Typen von Elementen keineswegs symmetrisch genannt werden darf. Dafür ist aber andererseits ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21} = 1 \quad (4)$$

welch wichtige Vereinfachung für alle Vierpole gilt<sup>7)</sup>. Infolgedessen ist es für den mit der Lehre von den Determinanten Vertrauten besonders einfach, die «inverse»  $\beta$ -Matrix zu finden, mit Hilfe welcher man  $U$  und  $I$  als Funktion von  $U'$  und  $I'$  ausdrückt. Schreibt man

$$\begin{aligned} U &= \beta_{11} U' + \beta_{12} I' \\ I &= \beta_{21} U' + \beta_{22} I' \end{aligned}$$

so ist

$$\beta_{11} = \alpha_{22}; \quad \beta_{12} = -\alpha_{12}; \quad \beta_{21} = -\alpha_{21}; \quad \beta_{22} = \alpha_{11}$$

<sup>5)</sup> L. Brillouin, Les filtres électriques et la théorie des matrices. Rev. Gén. Electr., 4. 1. 1936.

<sup>6)</sup> Fraenckel, Theorie der Wechselströme. Berlin 1930. Seite 178.

<sup>7)</sup> Fraenckel, l. c. S. 61.

Natürlich kann man diese Gleichungen, genau wie Gl. (1), auch direkt ableiten.

Schaltet man nun zunächst zwei Vierpole, die verschieden sein dürfen, in Reihe und bezeichnet die Eingangsgrößen ohne Strich, die mittleren mit einem und die Ausgangsgrößen mit zwei Strichen, so gilt symbolisch

$$\begin{aligned} (UI)' &= A \cdot (UI) \\ (UI)'' &= C \cdot (UI)', \text{ also} \\ (UI)'' &= C \cdot A (UI) \end{aligned}$$

Man kann das Multiplikationsgesetz der Matrizen leicht ableiten, sowohl mit Hilfe der Dyaden- als auch der Tensorschreibweise. Es sei die Dyadenmethode benutzt:

$$\begin{aligned} C \cdot A &= (\gamma_{11} e_1 e_1 + \gamma_{12} e_1 e_2 + \gamma_{21} e_2 e_1 + \gamma_{22} e_2 e_2) \cdot \\ &(\alpha_{11} e_1 e_1 + \alpha_{12} e_1 e_2 + \alpha_{21} e_2 e_1 + \alpha_{22} e_2 e_2) = (\gamma_{11} \alpha_{11} + \\ &\gamma_{12} \alpha_{21}) e_1 e_1 + (\gamma_{11} \alpha_{12} + \gamma_{12} \alpha_{22}) e_1 e_2 + (\gamma_{21} \alpha_{11} + \\ &\gamma_{22} \alpha_{21}) e_2 e_1 + (\gamma_{21} \alpha_{12} + \gamma_{22} \alpha_{22}) e_2 e_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Man beachte, dass genau wie in Gl. (2) im Endresultat je zwei Einheitsvektoren ohne dazwischenliegenden Multiplikationspunkt nebeneinanderstehen. Diese Paare verschwinden nachher von selbst, wenn man mit einem Vektor multipliziert; z. B. ist

$$(\gamma_{11} \alpha_{11} + \gamma_{12} \alpha_{21}) e_1 e_1 \cdot e_1 x_1 = (\gamma_{11} \alpha_{11} + \gamma_{12} \alpha_{21}) e_1 x_1$$

Für das Verständnis der oben ausgeführten Dyadenmultiplikation mache man sich Beziehungen wie die folgenden klar:

$$\begin{aligned} e_1 e_2 \cdot e_2 e_1 &= e_1 e_1; & e_1 e_2 \cdot e_2 e_2 &= e_1 e_2 \\ e_1 e_2 \cdot e_1 e_1 &= 0; & e_1 e_2 \cdot e_1 e_2 &= 0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Die allgemeine Regel für die Multiplikation von Matrizen wäre nicht schwer aus Gl. (5) herauszuschälen; wir verzichten aber darauf, weil die wiederholte Multiplikation einer Matrix mit sich selbst, wie man sie bei der Vierpolkette braucht, nach dieser Regel zu umständlich wäre. Viel bequemer ist hierfür eine sogenannte Diagonalmatrix von der Form

$$\begin{matrix} \alpha_1 e_1 e_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 e_2 e_2 \end{matrix}$$

Für das Quadrat derselben erhält man nämlich:

$$(\alpha_1 e_1 e_1 + \alpha_2 e_2 e_2) (\alpha_1 e_1 e_1 + \alpha_2 e_2 e_2) = \alpha_1^2 e_1 e_1 + \alpha_2^2 e_2 e_2$$

und durch fortgesetzte Anwendung dieser Regel

$$(\alpha_1 e_1 e_1 + \alpha_2 e_2 e_2)^n = \alpha_1^n e_1 e_1 + \alpha_2^n e_2 e_2$$

Das Hauptproblem besteht nun darin, die Gl. (3) auf die Diagonalf orm zu bringen, wobei symmetrische Vierpole vorausgesetzt werden sollen. Man macht den einer Diagonalmatrix mit gleichen Komponenten entsprechenden Ansatz

$$U' = aU; I' = aI$$

Physikalisch bedeutet er, dass das Verhältnis von Spannung zu Strom an den Eingangs- und Ausgangsklemmen des Vierpols dasselbe ist. Im allgemeinen wird dies nicht zutreffen, sondern nur wenn man

zwischen die Ausgangs- oder Eingangsklemmen eine ganz spezielle Impedanz  $Z$  schaltet. Diese ist leicht zu berechnen.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{U'}{I'} = \frac{U}{I} = \frac{U'/I}{I'/I} = \frac{\alpha Z + \alpha_{12}}{\alpha_{21} Z + \alpha} \\ \alpha_{21} Z^2 &= \alpha_{12}; \quad Z = \sqrt{\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}} \end{aligned} \quad (6)$$

Bei der Leitung nennt man  $Z$  den Wellenwiderstand; man kann ihn als diejenige Impedanz definieren, welche man zwischen die Ausgangsklemmen der Leitung schalten muss, um ihr dasselbe Verhalten zu geben, als setzte sie sich statt dem Anschluss der Impedanz bis in die Unendlichkeit fort. Indem man sich zunächst darüber hinwegsetzt, dass ein reiner Spezialfall behandelt wird, schreibt man:

$$\begin{aligned} U' &= aU = aU + \alpha_{12} I \\ I' &= aI = \alpha_{21} U + aI \end{aligned} \quad (7)$$

oder

$$\begin{aligned} (\alpha - a) U + \alpha_{12} I &= 0 \\ \alpha_{21} U + (\alpha - a) I &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Hier muss man nun aus der Theorie der linearen Gleichungen den Satz voraussetzen, dass die soeben angeschriebenen zwei homogenen Gleichungen nur dann für  $U$  und  $I$  von Null verschiedene Lösungen liefern, wenn die sogenannte Koeffizientendeterminante verschwindet, d. h.

$$\begin{vmatrix} (\alpha - a) & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & (\alpha - a) \end{vmatrix} = 0 = (\alpha - a)^2 - \alpha_{12} \alpha_{21} = \alpha^2 - 2\alpha a + a^2 - \alpha_{12} \alpha_{21}$$

Diese Gleichung liefert für  $a$  zwei im allgemeinen verschiedene Werte

$$a = \alpha \pm \sqrt{\alpha_{12} \alpha_{21}} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (9)$$

das zweite wegen Gl. (4).

Man nennt die beiden  $a$ -Werte die Eigenwerte der Matrix und bezeichnet sie mit  $a_1$  und  $a_2$ . Ferner merke man als Wert ihres Produktes an

$$a_1 a_2 = \alpha^2 - \alpha_{12} \alpha_{21} = \alpha^2 - \alpha^2 + 1 = 1$$

Indem man gleich komplexe Werte in Betracht zieht, schreibt man für  $a_1$  willkürlich

$$a_1 = e^{-\delta - j\nu} = e^{-\delta} (\cos \nu - j \cdot \sin \nu)$$

und muss dann notgedrungen für  $a_2$  setzen

$$a_2 = e^{+\delta + j\nu} = e^{+\delta} (\cos \nu + j \cdot \sin \nu)$$

damit  $a_1 a_2 = 1$  wird. Die Beträge von  $e^{-j\nu}$  und  $e^{+j\nu}$  d. h. die Längen der Vektoren in der Vektordarstellung der komplexen Zahlen sind 1; also

$$|e^{j\nu}| = |e^{-j\nu}| = 1$$

somit  $|a_1| = |e^{-\delta}|; |a_2| = |e^{+\delta}|$

Nach Einsetzen von  $a_1$  oder  $a_2$  in Gl. (8) wird diese durch unendlich viele Wertepaare  $U$  und  $I$  befriedigt, sofern diese nur im richtigen Verhältnis zueinander stehen. Für dieses Verhältnis hat man aus Gl. (8)

$$\frac{U}{I} = Z = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha - a} = -\frac{\alpha - a}{\alpha_{21}} \quad (8a)$$

Setzt man  $\alpha$  aus Gl. (9) ein, so erhält man für  $Z$  die beiden Wurzelwerte von Gl. (6).

Ferner kann man auch schreiben

$$a = \alpha \pm \alpha_{21} Z \quad (10)$$

Die Tatsache, dass man normalerweise über zwei verschiedene  $a$ -Werte verfügt, gestattet nun, den allgemeinen Fall zu behandeln. Man setzt

$$\begin{aligned} U_1' &= a_1 U_1; & I_1' &= a_1 I_1 \text{ und} \\ U_2' &= a_2 U_2; & I_2' &= a_2 I_2 \end{aligned}$$

und superponiert

$$\begin{aligned} U' &= U_1' + U_2' & I' &= I_1' + I_2' \\ U &= U_1 + U_2 & I &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Man eliminiert die Werte  $U_1, U_2, I_1, I_2$  usw.

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 = I_1 Z - I_2 Z \\ I &= I_1 + I_2 \\ I_1 &= \frac{IZ + U}{2Z}; \quad I_2 = \frac{IZ - U}{2Z} \\ U_1 &= I_1 Z = \frac{IZ + U}{2}; \quad U_2 = -I_2 Z = \frac{U - IZ}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

Damit hat man, gleich für die Reihenschaltung von  $n$  Vierpolen

$$\begin{aligned} U' &= U_1' + U_2' = a_1^n U_1 + a_2^n U_2 = a_1^n I_1 Z - a_2^n I_2 Z \\ I' &= I_1' + I_2' = a_1^n I_1 + a_2^n I_2 = \frac{a_1^n}{Z} U_1 - \frac{a_2^n}{Z} U_2 \end{aligned} \quad (12)$$

Vom mathematischen Standpunkte aus mag noch folgendes bemerkt sein. Kennzeichnend für die Vektoren  $(U_1 I_1)$  und  $(U_2 I_2)$  ist, dass sie nach ausgeführter Transformation, d. h. bei Messung am Ende einer Kette von Vierpolen, wobei man sie dann mit  $U_1' I_1'$  usw. bezeichnet, immer noch dieselbe «Richtung» im Koordinatensystem haben. Damit dies zutrifft, müssen die Ausgangsvektoren in bestimmte Richtungen, die «Hauptrichtungen» fallen. Die Grösse der Komponenten spielt an sich keine Rolle, nur ihr gegenseitiges Verhältnis, welches eben die Richtung bestimmt. In der Mechanik ist es üblich, die Hauptrichtungen zu Richtungen der Koordinatenachsen zu machen. Täte man dies im vorliegenden Falle, so hätte man eine  $U$ - und eine  $I$ -Hauptachse mit den Eigenwerten  $a_1$  und  $a_2$  und die Transformationsgleichungen würden dann

$$U' = a_1 U; \quad I' = a_2 I$$

Unsere Diagonalmatrix hätte die übliche Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

mit zwei verschiedenen «Tensorhauptwerten»  $a_1$  und  $a_2$  angenommen. Es bedingt dies aber eine ganz spezielle Zerlegung der gegebenen Vektoren in Komponenten, welche im vorliegenden Falle keinen physikalischen Sinn gehabt hätte. Es war ja nicht der Vektor  $(UI)$  das primär Gegebene, sondern seine Komponenten  $U$  und  $I$  einzeln. Jede andere

Zerlegung würde die Spaltung in Strom und Spannung zerstören. Bei dieser Rechnung haben sich spezielle Diagonalmatrizen mit gleichen Hauptwerten ergeben; dafür mussten anderseits zwei solche, statt nur einer einzigen gewöhnlichen, verwendet werden. Es hat dies aber um so weniger Bedeutung, als man, wie in der Algebra gezeigt wird, jede Diagonalmatrix mit verschiedenen Koeffizienten durch lineare Transformation in eine solche mit gleichen Koeffizienten, die sogar alle gleich eins sein können, überführen kann. Es braucht hierauf nicht weiter eingegangen zu werden.

Da im vorliegenden Beispiele also die Hauptrichtungen nicht in die Richtungen der Koordinatenachsen fallen, so sei noch darauf hingewiesen, dass nach Gl. (8) und (8a)

$$\begin{aligned} \frac{U_1'}{I_1'} &= \frac{U_1}{I_1} = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha - a_1} = -\frac{\alpha - a_1}{\alpha_{21}} = +Z \\ \text{bzw. } \frac{U_2'}{I_2'} &= \frac{U_2}{I_2} = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha - a_2} = -\frac{\alpha - a_2}{\alpha_{21}} = -Z \end{aligned}$$

die beiden trigonometrischen Tangenten der Winkel bedeuten, welche die beiden Hauptachsen mit der  $I$ -Koordinatenachse bilden. Die Hauptachsen verlaufen also spiegelbildlich symmetrisch zur  $I$ -Achse. Man darf sich nicht daran stossen, dass diese Tangenten die Dimension eines Widerstandes haben, statt reine Zahlen zu sein. Es rührt dies von den verschiedenen Dimensionen der beiden Komponenten her. Die ganze bildliche Darstellung in einer Koordinatenebene darf eben nur symbolisch aufgefasst werden, wie schon daraus hervorgeht, dass die Koordinatenwerte im allgemeinen komplex sind.

#### 4.

Zum Schlusse sollen noch einige Anwendungen der abgeleiteten Formeln auf die gewöhnliche Doppelleitung und auf einfache Siebketten gegeben werden. Man berechnet zunächst den Wellenwiderstand einer gewöhnlichen Doppelleitung etwa auf Grund des T-Gliedes

$$Z = \sqrt{\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}} = \sqrt{\frac{z}{y} + \frac{z^2}{4}} \cong \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}}$$

indem man  $z$  die Induktivität  $L$  und den Widerstand  $R$ ,  $y$  dagegen die Kapazität  $C$  und die Ableitung  $A$  zuschreibt. Die gemachte Vereinfachung rechtfertigt sich dadurch, dass die gegebene Leitung in eine genügend grosse Anzahl Vierpole unterteilt werden muss. Je feiner man diese Unterteilung macht, desto

kleiner werden  $y$  und  $z$  einzeln; ihr Quotient  $\frac{z}{y}$  strebt dabei einem bestimmten Wert zu, während  $\frac{z^2}{4}$  dagegen verschwindet. Man spricht von verzerungsfreier Leitung, wenn  $Z$  denselben Wert hat wie bei der verlustlosen Leitung, also frequenzunabhängig ist

$$Z = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Dies bedingt gleiche «Richtung» der beiden Vektoren, die  $R + j\omega L$ , bzw.  $A + j\omega C$  in der komplexen Zahlenebene darstellen, also muss sein

$$R : L = A : C$$

Die Grössen  $U_1 I_1$  und  $U_2 I_2$  bedeuten die bekannten Wanderwellen, durch welche man ja die Vorgänge auf der Leitung darstellen kann. Um dies einzusehen, muss die zeitliche Abhängigkeit eingeführt werden, etwa für die Ströme durch

$$I_1 = I_{10} e^{j\omega t}; I_2 = I_{20} \cdot e^{j\omega t} \text{ 8)}$$

Dann erhält man aus Gl. (12)

$$I' = I_{10} e^{-\delta n} \cdot e^{j(\omega t - vn)} + I_{20} e^{+\delta n} e^{j(\omega t + vn)}$$

Das erste Glied bleibt, abgesehen vom Dämpfungsfaktor  $e^{-\delta}$  konstant, wenn man in einer Zeit  $T$  um  $N = \frac{\omega T}{\nu}$  Vierpole vorwärts, also nach rechts schreitet. Demgemäss ist  $I_1$  die räumliche Amplitude einer mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{N l_0}{T} = \frac{\omega}{\nu} l_0 \quad (13)$$

nach rechts schreitenden Stromwelle, wobei  $l_0$  die Länge eines Leitungselementes bedeutet.

Es soll  $v$  für die verlustlose Leitung berechnet werden. Es sei die räumliche Dämpfung gleich Null,  $e^{\pm\delta} = 1$ , wozu die Verlustlosigkeit eine nötige, aber nicht hinreichende Bedingung ist. Um die weiteren Bedingungen für Dämpfungsfreiheit zu finden, schreibt man nach Gl. (9)

$$\begin{aligned} a &= \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} = \cos \nu \mp j \cdot \sin \nu \\ \alpha &= \cos \nu; \quad \pm \sqrt{1 - \alpha^2} = \mp \sin \nu \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist erfüllbar für

$$-1 < \alpha < +1$$

und liefert mit

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \frac{yz}{2} = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \\ 0 &< \omega^2 LC < 4 \end{aligned}$$

Die Vierpolkette stellt also ein sogenanntes Tiefpassfilter dar; Kreisfrequenzen, welche den Wert  $\omega = \frac{2}{\sqrt{LC}}$  übersteigen, erfahren trotz Verlustlosigkeit

keine räumliche Dämpfung, indem ein Teil des Stromes durch die Sperrwirkung der Induktivitäten in die Parallelkondensatoren abgedrängt wird. Vertauscht man in der Kette die Spulen mit den Kondensatoren, schreibt also  $z = 1/j\omega C$  und  $y = 1/j\omega L$ , so erhält man ein Hochpassfilter, bei dem die Kreisfrequenzen unterhalb  $\frac{1}{2\sqrt{LC}}$  räumliche Dämpfung

erfahren. Die Sperrwirkung rührt nun von den Reihenkondensatoren her; sie drängen den Strom bei niedern Frequenzen in die Parallelspeulen ab. Indem man zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  der Wanderwellen zurückkehrt,

beachte man, dass üblicherweise Induktivität und Kapazität auf die Einheit der Leitungslänge bezogen werden, auf welche  $n_0$  Vierpole entfallen mögen, so dass

$$l = \frac{L}{n_0}; c = \frac{C}{n_0}$$

zu setzen ist, wodurch sich die Eigenwerte ergeben zu

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{\omega^2 lc}{2 n_0^2} \pm \sqrt{\frac{\omega^4 l^2 c^2}{4 n_0^4} - \frac{\omega^2 lc}{n_0^2}} \\ &= 1 - \frac{\omega^2 lc}{2 n_0^2} \pm j\omega \frac{\sqrt{lc}}{n_0} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 lc}{4 n_0^2}} \\ &\cong 1 - \frac{\omega^2 lc}{2 n_0^2} \pm j\omega \frac{\sqrt{lc}}{n_0} \end{aligned}$$

Hierin ist wieder eine genügend grosse Zahl  $n_0$  von Vierpolen vorausgesetzt und indem man von dieser Vereinfachung nochmals Gebrauch macht, schreibt man

$$\left| \sin \nu \right| = \left| \omega \frac{\sqrt{lc}}{n_0} \right| \cong \left| \nu \right|$$

und erhält endlich, nach Gl. (13)

$$\left| v \right| = \left| \frac{\omega}{\nu} \cdot l_0 \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{lc}} \right|$$

eine ja allgemein bekannte Formel.

Man überzeugt sich leicht, dass  $I_2$  in Gl. (12) eine rückwärtsschreitende Welle bedeutet; der Betrag ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist derselbe wie für die vorwärtsschreitende Welle.

Da weiter oben die Bedingung für räumliche Dämpfungsfreiheit bei der verlustlosen Kette aufgestellt wurde, möge noch ein allgemeiner Ausdruck für die Dämpfung bei der verzerrungsfreien Leitung gegeben werden. Da  $Z$  hier reell ist, benutzt man mit Vorteil Gl. (10) und setzt, wieder vom  $T$ -Glieder ausgehend,

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{yz}{2} \mp Zy = 1 + AR - \omega^2 LC + \\ &j\omega(RC + AL \mp ZC) = \\ &1 + \frac{R}{Z} - \omega^2 LC + j\omega(2RC \mp ZC) \end{aligned}$$

Durch genügend feine Unterteilung in Vierpolelemente kann man bei gegebener Frequenz  $\omega$  alle Glieder bis auf die zwei ersten zum Verschwinden bringen und hat dann

$$\left| a \right| = \left| e^{\delta} \right| = \left| 1 + \frac{R}{Z} \right|$$

Man erkennt dies als Näherungsformel eines für die kontinuierliche Leitung bestehenden Ausdruckes

$$\delta = \frac{R}{Z} \text{ 9)}$$

8) Bull. SEV 1935, S. 615.

9) Fraenckel, l. c. S. 164 oben.

und es erklärt sich der Ausdruck «verzerrungsfreie Leitung» durch die Unabhängigkeit der räumlichen Dämpfung von der Frequenz.

Von den vielen interessanten Problemen, die man auf Grund der abgeleiteten Formeln noch lösen könnte, sollen nur noch mit Brillouin die Koeffizienten der Reflexion der Wanderwellen an einer beliebigen Impedanz  $Z_0$  angegeben werden. Sofern sich diese am rechten Ende der Leitung befindet,

hat man nach Fig. 1  $Z_0 = \frac{U'}{I'}$ , für das linke Ende

hingegen  $Z_0 = -\frac{U}{I}$ . Der Reflexionskoeffizient ist

für den Strom und für Impedanz rechts, nach Gl. (11), die ja auch für die gestrichenen Grössen gilt

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{I'_2}{I'_1} = \frac{I' Z - U'}{I' Z + U'} \\ &= \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \end{aligned}$$

Bei Impedanz links hat man dasselbe  $\rho$ , denn

$$\rho_2 = \frac{I_1}{I_2} = \frac{IZ + U}{IZ - U} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$$

Für die Spannungen gelten wegen Gl. (11) die negativen Werte der Koeffizienten für die Ströme.

$$\rho_3 = \frac{U_2'}{U_1'} = -\frac{I_2' Z}{+I_1' Z} = -\rho_1$$

$$\rho_4 = \frac{U_1}{U_2} = -\rho_2$$

Man überzeugt sich leicht, dass keinerlei Reflexion stattfindet, wenn  $Z_0$  gleich dem Wellenwiderstand  $Z$  ist. Dies ist auf Grund der Definition des Wellenwiderstandes natürlich nötig.

Es ist bemerkenswert, dass man mit rein algebraischen Methoden Resultate ableiten kann, für deren Herleitung die Infinitesimalrechnung im allgemeinen als unentbehrlich gilt.

## Der Anlaufvorgang bei elektromotorischen Antrieben.

Von St. Hopferwieser, Baden.

621.316.717:621.313.13

*Es wird ein einfaches Hilfsmittel für die graphische Behandlung von Anlaufvorgängen angegeben. Nach einem Hinweis auf die Eigenanlaufzeiten üblicher Motoren wird untersucht, wie sich das während des Anlaufs an die angetriebene Maschine abgegebene Drehmoment zum gesamten, vom Motor entwickelten Anlaufdrehmoment verhält. Daraus wird abgeleitet, dass die Form der Drehmomentlinie eines Motors auf die beim Anlauf in den Uebertragungsteilen erzeugten Beschleunigungsdrücke nur bedingt einen Einfluss hat.*

*L'auteur indique un moyen simple pour l'étude graphique des phénomènes de démarrage. Après quelques considérations sur la durée de démarrage des moteurs courants, il examine le rapport du couple appliqué pendant le démarrage à la machine entraînée au couple total développé par le moteur au démarrage. Il en déduit que la forme de la caractéristique du couple d'un moteur n'a que sous certaines conditions une influence sur les pressions d'accélération exercées au démarrage dans les organes de couplage.*

Eine Maschine in Betrieb setzen heisst, in der Sprache der Mechanik, sie aus dem Zustand der Ruhe in Bewegung zu überführen und auf die gewünschte Geschwindigkeit zu beschleunigen. Dieser «Anlaufvorgang» erfordert ein Drehmoment, das die gegebenen Bewegungswiderstände überwindet und mit einem verbleibenden Ueberschuss die zu bewegendenden Massen beschleunigt. Eine einfache Beziehung zwischen Beschleunigungsdrehmoment  $M$  (in mkg), dem  $GD^2$  (in  $\text{kgm}^2$ ) der zu bewegendenden Massen, bezogen auf die Enddrehzahl  $n$  (pro min) und der Anlaufzeit  $t$  (in s) auf deren Ableitung hier wohl verzichtet werden kann<sup>1)</sup>, ermöglicht es, aus den gegebenen bekannten Grössen die vierte zu errechnen:

$$\text{Anlaufzeit } t = 2,67 \cdot \frac{GD^2}{M} \frac{n}{1000} \text{ in s, oder}$$

$$\text{Beschleunigungsdrehmoment } M = 2,67 \cdot \frac{GD^2}{t} \frac{n}{1000} \text{ in mkg.}$$

Führt man statt dem Drehmoment jenen Anteil  $P$  der Motorleistung ein, der für die Beschleunigung zur Verfügung steht, ausgedrückt in kW, so

<sup>1)</sup> Vgl. Brown-Boveri-Mitt. 1922, Nr. 9: «Beitrag zur Grössenbestimmung von Motoren für Zentrifugenantriebe.»

lautet die für den praktischen Gebrauch etwas handlichere Beziehung, weil sich die Umrechnung auf das Drehmoment erübrigt:

$$t = 2,75 \frac{GD^2}{P} \cdot n^2 \cdot 10^{-6} \text{ in s, oder}$$

$$P = 2,75 \frac{GD^2}{t} \cdot n^2 \cdot 10^{-6} \text{ in kW.}$$

Diese für die Beschleunigung verfügbare Motorleistung  $P$  ist zu verstehen als jene Leistung, die dem Beschleunigungsmoment  $M$ , bezogen auf die Enddrehzahl  $n$ , entspricht.

Die Fluchtlinien Fig. 1 sind ein bequemes Hilfsmittel, um solche Beschleunigungsvorgänge mit praktisch ausreichender Genauigkeit zahlenmässig zu erfassen. Ihre Benützung soll an einem Beispiel erklärt werden. Ein Motor von (10 PS =) 7,35 kW Leistung und einer Drehzahl von 1430 min habe beim Anlauf ein  $GD^2 = 2 \text{ kgm}^2$ , bezogen auf die Motordrehzahl, zu beschleunigen, wobei aber nur 50 % seines normalen Drehmomentes für die Beschleunigung zur Verfügung stehe. Das Beschleunigungsdrehmoment ist also 2,5 mkg, die «Beschleunigungsleistung» rund 3,7 kW. Man zieht vom Punkt 2,5 auf der  $M$ -Teilung eine Gerade durch den Punkt für  $n$  1430 bis zur Hilfslinie 0—0.