

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 27 (1936)
Heft: 2

Artikel: Die Berechnung der Freileitungen mit Rücksicht auf die mechanischen Verhältnisse der Leiter
Autor: Maurer, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1061466>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

REDAKTION:

Generalsekretariat des Schweiz. Elektrotechn. Vereins und des Verbandes Schweiz. Elektrizitätswerke, Zürich 8, Seefeldstr. 301

VERLAG UND ADMINISTRATION:

A.-G. Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei, Zürich 4
Stauffacherquai 36/40

Nachdruck von Text oder Figuren ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit Quellenangabe gestattet

XXVII. Jahrgang

N^o 2

Mittwoch, 22. Januar 1936

Die Berechnung der Freileitungen mit Rücksicht auf die mechanischen Verhältnisse der Leiter.

Von E. Maurer, Innertkirchen.

651.315.056

Unter diesem Titel veröffentlichten das Generalsekretariat und das Starkstrominspektorat des SEV im Bulletin 1919, Nr. 6 und 7, eine ausführliche Wegleitung zur Berechnung von Freileitungen, bearbeitet von Abel Jobin. Die inzwischen erzielten Fortschritte der Technik des Leitungsbaus, besonders des Baus von Weitspannleitungen mit Hängeisolatoren, sowie die Aenderung der Bundesvorschriften für Freileitungen hatten zur Folge, dass diese Wegleitung mit den neuen Verhältnissen nicht mehr übereinstimmt, so dass deren Revision, bzw. Ergänzung dringend nötig wurde. Das Generalsekretariat beauftragte daher den Verfasser mit dieser Revision, um den Interessenten wieder eine brauchbare, dem heutigen Stand der Technik entsprechende Wegleitung zur Verfügung zu stellen, die ihnen, wenn möglich, gleich grosse Dienste leisten soll, wie seinerzeit die Jobinsche Wegleitung. Da die Wegleitung vom Jahre 1919 vergriffen ist, war eine umfassende Neubearbeitung des ganzen Gebietes nicht zu umgehen.

Die vorliegende Abhandlung hat den Zweck, allgemein über den Gang der Berechnung der Freileitungen mit Rücksicht auf die mechanische Festigkeit der Leiter zu orientieren. Zum handlichen Gebrauch sind im ersten Teil die Formeln mit erläuterndem Text dem Gang der Berechnung folgend zusammengestellt, während theoretische Abhandlungen sowie die Ableitung der Formeln, abgesehen von kleineren Ausnahmen, in die Anhänge verlegt wurden.

Die grundlegenden Theorien konnten von der frühern Abhandlung übernommen werden; sie waren lediglich den neuen Bundesvorschriften anzupassen und entsprechend den Fortschritten der Technik im Leitungsbau zu ergänzen.

Zunächst wird im folgenden die Berechnung der Zustandsänderungen der Leitungen auf Grund der Höchstbeanspruchungen, Zusatzlasten und Temperaturen, welche die bundesrätliche Verordnung über Starkstromanlagen vom 7. Juli 1933 vorschreibt, auseinandergesetzt, dann folgt die Berechnung des Durchhanges und die Bestimmung von Abständen gegen den Erdboden oder die Leitung querende Objekte; ein weiteres Kapitel ist den grossen Spannweiten gewidmet, worauf spezielle Fälle zur Behandlung kommen: Regelleitungen, Weitspannleitungen mit festen und solche mit beweglichen Isolatoren, ferner die von den Leitern auf die Tragwerke ausgeübten Kräfte und die Leiter, welche aus zwei verschiedenen Metallen bestehen. Zum Schluss wird das Verhalten einer Leitung bei ausserordentlichen Belastungen (z. B. über 2 kg/m Rauhreifansatz) erläutert. Beispiele zeigen die Anwendung.

Aus technischen Gründen muss der Artikel auf zwei Nummern verteilt werden. Von der ganzen Arbeit sind später Sonderdrucke erhältlich. (Red.)

Le secrétariat général et l'inspectorat des installations à fort courant de l'ASE ont publié dans le Bulletin 1919, nos 6 et 7, des directives détaillées pour le calcul des lignes aériennes, établies par Abel Jobin. Du fait des progrès réalisés depuis lors dans la construction des lignes, surtout celles à grandes portées avec isolateurs de suspension, ainsi que des modifications apportées aux prescriptions fédérales sur les lignes aériennes, ces directives ne concordent plus avec les conditions nouvelles, de sorte qu'il est devenu nécessaire de les réviser et de les compléter. Le secrétariat général a donc chargé l'auteur de procéder à cette révision, afin que les intéressés disposent à nouveau de directives pratiques, adaptées à la technique moderne. Nous espérons que ces directives leur rendront les mêmes services que celles d'Abel Jobin. Les directives de 1919 sont d'ailleurs épuisées de sorte qu'une réimpression s'imposait.

Cette étude indique la marche générale à suivre dans le calcul mécanique des lignes aériennes. Pour en faciliter l'usage, la première partie mentionne les diverses formules au fur et à mesure qu'elles apparaissent au cours des calculs, tandis que les considérations théoriques et le développement des formules sont reportés, à quelques exceptions près, dans les annexes.

Les théories fondamentales des anciennes directives ont pu être conservées; il a suffi de les adapter aux nouvelles prescriptions fédérales et de les compléter en tenant compte du développement de la technique des lignes aériennes.

L'auteur expose tout d'abord le calcul des modifications des lignes ensuite des sollicitations maximum, des charges additionnelles et des variations de température prévues par l'ordonnance fédérale sur les installations à fort courant du 7 juillet 1933; suit le calcul de la flèche et la détermination des distances au sol ou aux objets en travers de la ligne. Un chapitre est consacré aux grandes portées, un autre à différents cas spéciaux: lignes ordinaires, lignes à grandes portées à isolateurs fixes ou mobiles, efforts engendrés par les lignes sur les supports, conducteurs constitués par deux métaux différents. Pour terminer, l'auteur expose l'effet de charges exceptionnelles (p. ex. plus de 2 kg de givre par mètre) sur les lignes. Des exemples pratiques montrent l'application des formules.

Pour des raisons techniques, l'article doit être réparti sur deux numéros. Plus tard on pourra en obtenir des tirages à part. (Réd.)

1. Berechnung der Zustandsänderungen der Leitungen unter Zugrundelegung der vorgeschriebenen Höchstbeanspruchungen, Zusatzlasten und Temperaturen.

Gemäss bundesrätlicher Verordnung¹⁾ sind für Starkstromleitungen den Berechnungen der Zugbeanspruchung der Leiter und des für die grösste zusätzliche Leiterbeanspruchung massgebenden Durchhangs folgende Annahmen zugrunde zu legen:

- a) Die tiefste Ortstemperatur, ohne Zusatzlast und ohne Wind.
- b) Eine gleichmässig verteilte Zusatzlast, ohne Wind, herrührend von Schnee und Eis (Rauhreif) von 2 kg auf den Meter Leitungslänge bei der Temperatur von 0°.

Die Zugbeanspruchung darf unter diesen Annahmen auf keinen Fall ²/₃ der Zerreiissfestigkeit des Leitermaterials übersteigen. Die für die gebräuchlichsten Baustoffe festgesetzten Festigkeits- und Dehnungseigenschaften, die den Berechnungen zugrunde zu legen sind, sind in Tabelle I wiedergegeben²⁾.

$$p^3 + p^2 \left[\frac{\gamma_0^2 a^2 E}{24 p_0^2} + (t - t_0) \alpha E - p_0 \right] = \frac{\gamma^2 a^2 E}{24} \quad (1a)$$

Gl. (1a) ist die vereinfachte Gl. (1) für Spannweiten mit gleich hohen Aufhängepunkten. Es bedeuten in diesen Gleichungen:

- a die Spannweite, d. h. die horizontale Distanz der Aufhängepunkte in cm,
- h die Höhendifferenz der Aufhängepunkte in cm,
- α den Wärmeausdehnungskoeffizienten des Leitermaterials, bezogen auf 1° C,
- E den Elastizitätsmodul des Leiters in kg/cm²,
- p₀ die bekannte Horizontalkomponente der Beanspruchung in kg/cm² des Leiters im Anfangszustand bei der bekannten Anfangstemperatur t₀ in Grad Celsius und bei dem bekannten Gewicht von Leiter und Zusatzlast, bezogen auf 1 cm Länge und 1 cm² Querschnitt des Leiters (somit Dimension von $\gamma_0 = \text{kg/cm}^3$),
- p die gesuchte Horizontalkomponente der Zugbeanspruchung des Leiters in kg/cm² bei der angenommenen Temperatur t und bei
- γ dem Gewicht des Leiters und der Zusatzlast in kg/cm³, bezogen auf 1 cm Länge und 1 cm² Querschnitt, dem Zustand bei der Temperatur t entsprechend,
- ψ den Neigungswinkel der Verbindungsgeraden der Aufhängepunkte mit der Horizontalen.

Festigkeits- und Dehnungseigenschaften und zugelassene Höchstbeanspruchungen der gebräuchlichsten Leitermaterialien. Gemäss Art. 89, Ziffer 3, der Verordnung über Starkstromanlagen sind den Durchhangsberechnungen bei allen Freileitungen aus gebräuchlichem Leitermaterial die in dieser Tabelle enthaltenen Zahlen zugrunde zu legen, soweit nicht andere Eigenschaftszahlen durch den Prüfbefund der Materialprüfungsanstalt einer schweizerischen Hochschule für das zu verwendende Material nachgewiesen werden.

Tabelle I.

Leitermaterial	1 Querschnitt in mm ²	2 Spezifisches Gewicht	3 Zerreiiss- festigkeit des Leiters bzw. des Einzeldrahts bei Seilen in kg/mm ²	4 Festigkeits- abnahme infolge Verseilung in % der Zerreiiss- festigkeit	5 Elastizitätsgrenze		6 Höchstzulässige Beanspruchung in kg/mm ²	7 Dehnung bis zum Bruch in % der Messlänge	8 Linearer Wärm- dehnungs- koeffizient pro 1°	
					Beans- pruchung in kg/mm ²	Elastizitätsmodul bei Bean- spruchung bis zur Elastizi- tätsgrenze in kg/mm ²				
						Drähte				Seile
					ca.	ca.				
Kupferdraht, hart	bis 20	8,9	40	—	16	13 000	—	27	2	17×10 ⁻⁶
Kupferdraht, hart	> 20		38	—	15	12 500	—	25		
Kupferdraht, halbhart	bis 28	8,9	30	—	12	12 000	—	20	3	17×10 ⁻⁶
Kupferdraht, halbhart	> 28		28	—	11	11 500	—	18		
Kupferseil aus 7—19 Drähten	—	9	42	6	16	13 200	11 000	28	2,5	17×10 ⁻⁶
Kupferseil aus mehr als 19 Drähten	—		42	8	15	13 200	10 000	28		
Bronzeseil	—	8,7	65	10	28	13 000	11 000	43	2,5	16,7×10 ⁻⁶
Eisendraht	bis 20	7,8	45	—	25	19 000	—	30	5	12,3×10 ⁻⁶
Stahlseil (verzinkt), aus 7 Drähten	bis 60	7,9	120	2	50	20 000	18 500	80	5	11,5×10 ⁻⁶
Reinaluminiumseil aus 7—19 Drähten	—	2,75	19	6	8	6 300	5 500	12 ¹⁾	2,5	23×10 ⁻⁶
Reinaluminiumseil aus mehr als 19 Drähten	—		18	8						
Aldreiseil aus 19 Drähten	—	2,75	30	4	19	6 300	6 000	18	5	23×10 ⁻⁶
Aldreiseil aus 37 Drähten	—	2,75	30	5						

¹⁾ Bei Stahlaluminiumseil darf die höchstzulässige Beanspruchung des Aluminiums bis zu 13 kg/mm² gewählt werden.

Für Weitspannleitungen kommt praktisch nur der Belastungsfall b in Betracht; immerhin ist für Spannweiten unter 100 m zu untersuchen, ob die Vorschriften auch bei den tiefsten Temperaturen, gemäss Belastungsfall a, erfüllt sind.

Nach Festlegung der grössten Zugbeanspruchung bei 0° und Schnee können die Zugbeanspruchungen in einer Spannweite für andere Temperaturen und Zusatzlasten berechnet werden nach den im Anhang I abgeleiteten Gleichungen (16*):

$$p^3 \cdot \left(1 + \frac{h^2}{2 a^2} \right) + p^2 \left[\frac{\gamma_0^2 a^2 E}{24 p_0^2} \cos \psi + (t - t_0) \alpha E - p_0 \cdot \left(1 + \frac{h^2}{2 a^2} \right) \right] = \frac{\gamma^2 a^2 E}{24} \cos \psi \quad (1)$$

Trägt der Leiter keine Zusatzlast, so ist γ gleich dem spezifischen Gewicht des Leiters in kg/cm³.

Bei 2 kg Zusatzlast erhalten wir für das Gewicht pro Längen- und Querschnitts-Einheit

$$\gamma_{schnee} = \gamma + \frac{0,02}{q} \text{ kg/cm}^3, \quad (2)$$

wobei q den Querschnitt des Leiters in cm² bedeutet. γ_{schnee} wird auch als virtuelles spezifisches Gewicht bezeichnet.

¹⁾ Verordnung betr. Erstellung, Betrieb und Instandhaltung elektrischer Starkstromanlagen vom 7. Juli 1933 (Art. 88), im folgenden «Starkstromverordnung» genannt.

²⁾ Starkstromverordnung Art. 89.

Für Spannweiten mit gleich hohen Aufhängepunkten bis ca. 500 m kann ohne grossen Fehler an Stelle der Horizontalkomponente die Zugbeanspruchung selbst genommen werden. In Gl. (1a) wird also gesetzt:

für p_0 die gewählte maximale Beanspruchung des Leiters in kg/cm^2 ; diese darf die nach Starkstromverordnung zulässige Höchstbeanspruchung nicht überschreiten,

für t_0 0,

für γ_0 das spezifische Gewicht des Leiters +

$$\frac{\text{Zusatzlast pro cm}}{\text{Querschnitt}} = \gamma + \frac{0,02}{q} \text{ in } \text{kg}/\text{cm}^3$$

für γ , das spezifische Gewicht des Leiters, in kg/cm^3 ,

für α und E die dem Leitermaterial entsprechenden Werte;

für eine angenommene Temperatur t kann nun die zugehörige horizontale Leiterbeanspruchung p , welche für den Durchhang bei dieser Temperatur bestimmend ist, berechnet werden.

Da die Gleichung für p dritten Grades ist, so ist es einfacher, für p verschiedene Werte anzunehmen, in die Gleichung einzusetzen und die dem angenommenen p entsprechende Temperatur zu berechnen. Auf einem Kurvenblatt wird alsdann die Funktion $p = F(t)$ aufgezeichnet, worauf die Werte von p für bestimmte Temperaturen abgelesen werden können.

Für Spannweiten mit ungleich hohen Aufhängepunkten ist die Zugbeanspruchung im oberen Aufhängepunkt p_z wesentlich grösser als die Horizontalkomponente. Wir setzen p_z gleich der gewählten maximalen Zugbeanspruchung, welche höchstens die nach Starkstromverordnung zulässige Höchstbeanspruchung erreichen darf, und berechnen die Horizontalkomponente nach der Gleichung:

$$p^2 \cdot \left(\frac{h^2}{a^2} + 2 \right) - p \cdot (2 p_z - h \cdot \gamma_{\text{schnee}}) + \frac{\gamma_{\text{schnee}}^2 \cdot a^2}{4} = 0 \quad (3)$$

wobei p die gesuchte Horizontalkomponente ist. Diese im Anhang I (Gl. 14*) für eine Parabel als Seillinie abgeleitete Formel gilt mit grosser Annäherung auch für die Kettenlinie, sofern die Spannweite nicht über 500 m und die Neigung der Verbindungsgeraden der Aufhängepunkte gegen die Horizontale nicht über 30° beträgt. Sie gibt für p etwas kleinere Werte, als eine genaue Berechnung gemäss der Kettenlinie ergeben würde. Wird also der Leiter nach dem berechneten Horizontalzug gespannt, so wird der Zug im oberen Aufhängepunkt etwas kleiner als nach Starkstromverordnung zulässig, was in bezug auf die Sicherheit gegen Seilbruch nur von Vorteil ist. Der so berechnete Zug p wird für weitere Berechnungen an Stelle von p_0 in die Gl. (1) eingesetzt.

2. Die Berechnung des Durchhanges auf Grund der im Abschnitt I ermittelten Zugspannungen.

Als Durchhang sei im folgenden immer der Abstand zwischen dem Berührungspunkt der parallel

zur Verbindungsgeraden der beiden Aufhängepunkte an die Seilkurve gezogenen Tangente und dem lotrecht darüberliegenden Punkt auf der Verbindungsgeraden verstanden. Bei gleich hohen Aufhängepunkten fällt dieser Berührungspunkt mit dem Scheitel der Kettenlinie zusammen; die vertikale Gerade, in welcher der Durchhang liegt, halbiert also die Spannweite sowie die Seilkurve zwischen den Aufhängepunkten. Bei ungleich hohen Aufhängepunkten liegt diese Gerade aus der Mitte etwas gegen den oberen Aufhängepunkt verschoben, jedoch ist diese Abweichung nicht sehr gross. Es

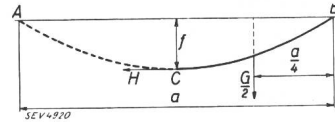


Fig. 1.

kann ohne grossen Fehler auch der Abstand zwischen dem Mittelpunkt der Verbindungsline der Aufhängepunkte und dem lotrecht darunter liegenden Punkt der Seillinie als Durchhang genommen werden, was die Berechnungen bedeutend vereinfacht.

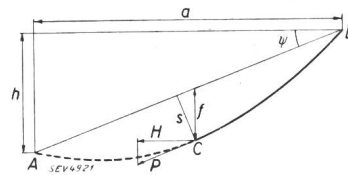


Fig. 2.

Die Grösse des Durchhanges ergibt sich aus folgenden Ueberlegungen:

Man denkt sich im Berührungspunkt der zur Verbindungsline AB (Fig. 1 und 2) parallelen Tangente das gespannte Seil durchgeschnitten; die beiden Teile bleiben in ihrer Lage, wenn man an der Trennstelle den entsprechenden Seilzug ansetzt. Wird mit G das Gewicht des Seiles zwischen A und B und mit H der Horizontalzug im Punkt C bezeichnet, so lautet die Momentengleichung für Punkt B:

$$a) f \cdot H = \frac{G}{2} \cdot \frac{a}{4} \text{ für die horizontale Spannweite (Fig. 1),}$$

$$b) s \cdot P = \frac{G}{2} \cdot \frac{a}{4} \text{ für die geneigte Spannweite (Fig. 2).}$$

Es ist nun $s = f \cdot \cos \psi$ und $P = \frac{H}{\cos \psi}$, womit die beiden Gleichungen a und b identisch werden.

Für nicht allzu grosse Spannweiten ist es zulässig, die Bogenlänge gleich der Geraden AB zu setzen. Bezeichnen wir das Gewicht pro Längeneinheit mit g , so ist $G = g \cdot a$ (Fig. 1) und $G = \frac{g \cdot a}{\cos \psi}$ (Fig. 2), und es wird

$$f = \frac{g \cdot a^2}{8 \cdot H} \text{ (Fig. 1) und } f = \frac{g \cdot a^2}{8 \cdot H \cos \psi} \text{ (Fig. 2)}$$

Dividiert man noch g und H durch den Seilquerschnitt q , so ist $\frac{g}{q} = \gamma$ und $\frac{H}{q} = p$ und man erhält schliesslich

für die horizontale Spannweite

$$f = \frac{\gamma \cdot a^2}{8 \cdot p} \text{ und} \quad (4)$$

für die geneigte Spannweite

$$f = \frac{\gamma \cdot a^2}{8 \cdot p \cos \psi} \quad (4a)$$

Bezeichnet man den Durchhang der horizontalen Spannweite mit f_0 , denjenigen einer gleich grossen, aber um den Winkel ψ geneigten Spannweite mit f , so ist

$$f = \frac{f_0}{\cos \psi} \quad (5)$$

Mit Hilfe der Gl. (4) und (5) lassen sich die Durchhänge für horizontale Spannweiten bis zu 300 Meter und nicht über 30° geneigte Spannweiten bis 500 Meter mit praktisch genügender Genauigkeit berechnen.

Für noch grössere Spannweiten ist es nicht mehr zulässig, die Bogenlänge der Kettenlinie durch die Sehne zu ersetzen, es müssen dann die genaueren, aus den Eigenschaften der Kettenlinie abgeleiteten, wesentlich komplizierteren Gleichungen angewendet werden. Der Parameter der Kettenlinie c ist p/γ . Bei gleich hohen Aufhängepunkten ist die Ordinate des Kettenlinienscheitels (Punkt C in Fig. 1) gleich c ; die Ordinaten der Punkte A und B berechnen sich zu ³⁾:

$$y = \frac{c}{2} (e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}) = c \cdot \mathfrak{C}08 \left(\frac{x}{c} \right) \quad (6)$$

wobei $x = \frac{a}{2}$.

Der Durchhang wird somit:

$$f = y - c = c \left[\mathfrak{C}08 \left(\frac{a}{2 \cdot c} \right) - 1 \right] \quad (7)$$

oder, in eine Potenzreihe entwickelt:

$$f = \frac{a^2}{8 \cdot c} + \frac{a^4}{384 \cdot c^3} + \dots \quad (8)$$

Die höheren Glieder der Reihe können vernachlässigt werden. Wird das Glied mit der vierten Potenz weggelassen und für $c = \frac{p}{\gamma}$ eingesetzt, so wird Gl. (8) mit Gl. (4) identisch.

Die in Gl. (5) dargestellte Beziehung zwischen den Durchhängen einer horizontalen und einer gleich grossen geneigten Spannweite $f = f_0/\cos \psi$

³⁾ Ableitung siehe Anhang I, Gl. 1* bis 5*.

gilt nun mit grosser Genauigkeit auch für die Kettenlinie ⁴⁾, wodurch die Durchhangsberechnungen ungemein erleichtert werden.

Zum bequemerem logarithmischen Rechnen kann, wenn Tafeln der Hyperbelfunktionen vorliegen, Gl. (7) noch folgendermassen umgeformt werden:

$$f = 2 \cdot c \cdot \mathfrak{C}11^2 \left(\frac{a}{4 \cdot c} \right) \quad (7a)$$

3. Die Seilkurve.

Bestimmung von Abständen gegen den Erdboden oder die Leitung querende Objekte.

Die Starkstromverordnung schreibt gewisse minimale Abstände der Leiter gegen den Erdboden sowie gegen andere kreuzende Starkstrom- oder Schwachstrom-Leitungen vor. Für die Bestimmung dieser Abstände ist der grösste vorkommende Durchhang (mit oder ohne Zusatzlast) massgebend. Durch die Durchhangsberechnung ist zunächst zu untersuchen, ob der Durchhang bei 0° und 2 kg Schneeanatz pro Meter oder der Durchhang bei der grössten vorkommenden Temperatur grösser ist. Als grösste Temperatur ist gemäss Starkstromverordnung + 40° C einzusetzen. Für die Bestimmung der Abstände ist die Kenntnis der Seilkurve erforderlich.

Die Gleichung der Kettenlinie lautet, wie bereits erwähnt:

$$y = \frac{c}{2} (e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}) = c \cdot \mathfrak{C}08 \frac{x}{c} \quad (6)$$

oder, zu einer Potenzreihe entwickelt:

$$y = c + \frac{x^2}{2c} + \frac{x^4}{24c^3} + \frac{x^6}{720c^5} + \dots \quad (6a)$$

wobei der Parameter $c = \frac{p}{\gamma}$ ist. Die Glieder höherer als der vierten Potenz können vernachlässigt werden. Zur bequemen Rechnung soll die Gl. (6a) etwas umgeformt werden. Man verlegt die Abszissenaxe durch Einführung der neuen Ordinate $y' = y - c$ in den Scheitel, erweitert sämtliche Glieder mit c und erhält:

$$y' = c \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{c} \right)^2 + \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{x}{c} \right)^4 + \frac{1}{720} \cdot \left(\frac{x}{c} \right)^6 + \dots \right] \quad (9)$$

Da der Parameter c für praktisch vorkommende Fälle ungefähr im Bereich von 500 bis 1500 m

liegt, so ist der Quotient $\frac{x}{c}$ meistens < 1 und die Potenzen sind leicht zu berechnen. An Hand der Gl. (9) kann also die Seilkurve aufgezeichnet werden.

Gewöhnlich liegt ein aufgenommenes Längenprofil der Leitung vor. Wenn dessen Höhenmassstab genügend gross gewählt wird, so kann die Seil-

⁴⁾ Ableitung s. ETZ 1925, S. 989, und 1932, S. 28 und 29.

kurve eingezeichnet und die Distanzen gegen den Erdboden oder gegen kreuzende Leitungen u. dgl. können direkt abgemessen werden. Dieses einfache Verfahren ist allerdings für Leitungen mit fixen Aufhängepunkten im allgemeinen nicht geeignet. Da infolge der Terrainneigung die Horizontalkomponente der Zugspannung und somit der Parameter von Spannweite zu Spannweite verschieden ist, so müsste für jede geneigte Spannweite eine besondere Seilkurve berechnet und gezeichnet werden. Bei Leitungen mit Hängeisolatoren weisen die Seilkurven aller Spannweiten denselben Parameter auf, gehören somit alle der gleichen Kettenlinie an. Es genügt daher, diese Seilkurve zu berechnen, aufzuzeichnen und danach eine Schablone herzustellen, mit deren Hilfe die Seilkurve in das Längenprofil eingetragen werden kann.

In Fällen, wo vorspringende Geländepunkte oder kreuzende Leitungen sich der Seillinie stark nähern, ist eine rechnerische Bestimmung des kleinsten Abstandes erwünscht. Die exakte Berechnung nach den Gesetzen der Kettenlinie führt dabei zu umständlichen Rechnungen, während der Ersatz der Kettenlinie durch eine Parabel gleichen Para-

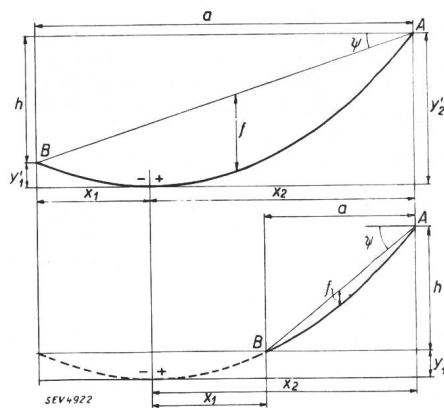


Fig. 3.

eters meist zu ungenau ist. Die Aufgabe lässt sich aber mit guter Näherung für Spannweiten bis 400 m und Neigungswinkeln bis 30° folgendermassen lösen:

Man geht wieder von den Durchgangsgleichungen (4) und (4a) aus:

$$f = \frac{\gamma \cdot a^2}{8p} = \frac{a^2}{8c} \quad (4)$$

$$f = \frac{\gamma \cdot a^2}{8p \cdot \cos \psi} = \frac{a^2}{8c \cdot \cos \psi} = \frac{a^2}{8c'} \quad (4a)$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass für die geneigte Spannweite der Parameter c ersetzt werden muss durch $c' = c \cdot \cos \psi$, wenn die Seilkurve als Parabel dargestellt wird. Mit diesem neuen Parameter lässt sich nun die Berechnung der Koordinaten der Seilkurve nach den folgenden Formeln berechnen⁵⁾:

⁵⁾ Ableitung siehe Anhang I (Gl. 12* und 13*).

$$x_1 = \frac{c' \cdot h}{a} - \frac{a}{2} = c \cdot \frac{h}{a} \cos \psi - \frac{a}{2} = \frac{p \cdot h \cdot \cos \psi}{\gamma \cdot a} - \frac{a}{2} \quad (10)$$

$$x_2 = \frac{p \cdot h \cdot \cos \psi}{\gamma \cdot a} + \frac{a}{2} \quad (11)$$

$$x_2 - x_1 = a$$

$$y'_1 = \frac{\gamma \cdot x_1^2}{2p \cdot \cos \psi}$$

$$y'_2 = y'_1 + h \text{ oder, allgemein } y' = \frac{\gamma \cdot x^2}{2p \cdot \cos \psi} + h \quad (12)$$

Erhält man für x_1 einen negativen Wert, so liegt der Scheitel der Seillinie innerhalb, im andern Fall ausserhalb der Spannweite.

Die Anwendung dieser Gleichungen soll nun an 2 Beispielen gezeigt werden, wobei jeweils die genau nach der Kettenlinie gerechneten Werte zum Vergleich in Klammern beigelegt sind.

Beispiel 1.

Ueber eine Spannweite von $a = 451$ m mit einer Höhendifferenz von $h = 92,8$ m gemäss Fig. 4 soll ein Kabel aus Halbhartkupfer von $1,5 \text{ cm}^2$ Querschnitt gezogen werden, so

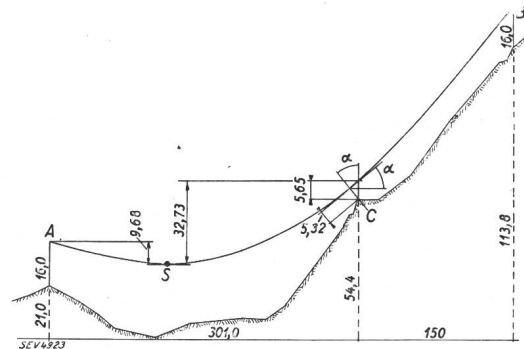


Fig. 4.

dass die maximale Zugspannung im ungünstigsten Fall (0° und 2 kg/m Schnee) höchstens 85 % der nach Starkstromverordnung zulässigen Höchstbeanspruchung von 1800 kg/cm^2 beträgt. Es ist der Abstand des Leiters von dem vorspringenden Geländepunkt C am oberen Strasseneinschnitt bei 0° und 2 kg/m Schnee zu bestimmen.

Man berechnet zuerst γ_{schnee} nach Gl. 2. Das spezifische Gewicht des Kupfers ist $8,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$; folglich ist

$$\gamma_{\text{schnee}} = 0,0089 + \frac{0,02}{1,5} = 0,0221 = 22,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^2.$$

Als dann ist die Horizontalkomponente p der Höchstbeanspruchung p_z nach Gl. 3 zu berechnen; man setzt darin

$$p_z = 85 \% \text{ von } 1800 = 1530 \text{ kg/cm}^2$$

$$a = 451 \cdot 10^2 \text{ cm, } \quad \gamma_{\text{schnee}} = 22,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$$

ein und erhält damit

$$p^2 \left(\frac{92,8^2}{451^2} + 2 \right) - p (2 \cdot 1530 - 92,8 \cdot 10^2 \cdot 22,1 \cdot 10^{-3}) + \frac{22,1^2 \cdot 10^{-6} \cdot 451^2 \cdot 10^4}{4} = 0$$

$$2,042 p^2 - 2864 p + 250 \cdot 10^3 = 0$$

$$p = \frac{2864 + \sqrt{820,2^2 \cdot 10^4 - 204 \cdot 10^4}}{4,08}$$

Man erhält 2 Werte für p , nämlich 1310 kg/cm² und 364 kg/cm². Der zweite Wert hat keine praktische Bedeutung. Man setzt also

$$p = 1310 \text{ kg/cm}^2$$

$$c = \frac{p}{\gamma} = \frac{1310}{22,1 \cdot 10^3} = 59,275 \text{ cm} = 592,75 \text{ m}$$

$$\text{tg } \psi = \frac{h}{a} = \frac{92,8}{451} = 0,205; \quad \psi = 11^\circ 37'; \quad \cos \psi = 0,9795$$

Nach Gl. (10) erhält man für den untern Abspannpunkt A:

$$x_1 = \frac{592,75 \cdot 92,8 \cdot 0,9795}{451} - 225,5 = -106 \text{ m} (-107,1 \text{ m})$$

$$y'_1 = \frac{106^2}{2 \cdot 592,75 \cdot 0,9795} = 9,68 \text{ m} (9,71 \text{ m})$$

Der Scheitel der Seillinie befindet sich also um $y'_1 = 9,68$ m unter den untern Aufhängepunkt A. Die Abszisse des Leitungspunktes über Punkt C ist $x = 301 - 106 = 195$ m; die zugehörige Ordinate (Höhe über dem Kurvenscheitel) berechnet sich zu

$$y' = \frac{195^2}{2 \cdot 592,75 \cdot 0,9795} = 32,73 \text{ m} (32,01 \text{ m}).$$

Die Höhendifferenz zwischen dem Kurvenpunkt über C und dem Punkt A (Fig. 4) beträgt somit: $32,73 - 9,68 = 23,05$ m (22,27 m). Der Punkt C liegt um $54,4 - (21 + 16) = 17,4$ m höher als Punkt A, folglich beträgt die Höhe der Leitung über dem Terrainpunkte C (oberer Punkt des Strasseneinschnitts, Fig. 4) nach der Berechnung mit der Parabel $23,05 - 17,4 = 5,65$ m, während die genaue Berechnung nach der Kettenlinie einen Abstand von nur 4,9 m ergibt. Sie entspricht also nicht den Vorschriften der Starkstromverordnung (Art. 86). Die Differenz beträgt 75 cm (15 % Fehler). Bei gewöhnlichen Distanzen von 200 bis 300 Meter werden aber beide Werte beinahe übereinstimmen; es lohnt sich dann kaum, wegen der kleinen Differenz die viel umständlichere Berechnung mit der Kettenlinie durchzuführen. Um sicher zu gehen, wird zweckmässig die minimal zulässige Distanz zwischen Leiter und Erdboden um 1 m grösser angenommen, als in der Starkstromverordnung verlangt ist.

Der Durchhang dieser Spannweite berechnet sich zu

$$f = \frac{451^2}{8 \cdot 592,75 \cdot 0,9795} = 43,8 \text{ m}$$

Die genaue Berechnung nach der Kettenlinie ergibt dafür 44,1 m. Der Fehler beträgt 30 cm, also weniger als 1 %.

Beispiel 2.

Ein Aluminiumstahlseil von 2,103 cm² Querschnitt ist zwischen den Punkten A und B (Fig. 5) so gespannt worden, dass die Horizontalbeanspruchung bei einer zusätzlichen Schneelast von 2 kg/m 1177 kg/cm² beträgt. Das Gewicht des Seiles beträgt 815 Gramm pro Laufmeter.

$$\gamma_{\text{schnee}} \text{ wird somit} = \frac{0,00815 + 0,02}{2,103} = 13,45 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3.$$

Gesucht ist der Abstand der Leitung vom Terrainpunkt C (Fig. 5).

Es ist also $a = 406 \text{ m}$ $\gamma = 13,45 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$
 $h = 250 \text{ m}$ $p = 1177 \text{ kg/cm}^2$

$$\cos \psi = 0,8515 \quad c = \frac{p}{\gamma} = 875 \text{ m}$$

$$\psi = 31^\circ 37' \frac{1}{2}$$

(Fortsetzung folgt.)

Anhang I.

Ableitung der wichtigsten Formeln für die Leitungsberechnung.

I. Die grundlegende Theorie (Kettenlinie).

Nimmt man an, ein biegsames gewichtsloses Seil sei an verschiedenen Punkten mit vertikalen Kräften belastet, dann

Nach Gl. (10) erhält man für den untern Abspannpunkt A

$$x_1 = 875 \cdot \frac{250}{406} \cdot 0,8515 - 203 = 256 \text{ m} (302,57)$$

$$y'_2 = \frac{256^2}{2 \cdot 875 \cdot 0,8515} = 44 \text{ m} (52,83)$$

Höhe des Kurvenpunktes über C über dem Kurvenscheitel

$$y' = \frac{(256 + 176)^2}{2 \cdot 875 \cdot 0,8515} = 125,3 \text{ m} (134,04)$$

Die Höhendifferenz zwischen dem Kurvenpunkt über C und dem Punkt A beträgt somit:

$$125,3 - 44 = 81,3 \text{ m} (81,21)$$

und somit der Abstand der Seilkurve von Punkt C = $81,3 - 75 = 6,3$ m (6,21).

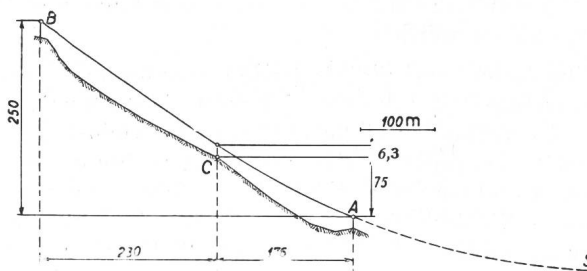


Fig. 5.

Die Differenz zwischen angenäherter Berechnung und genauer Berechnung nach Kettenlinie beträgt bei diesem Beispiel nur 9 cm; die Uebereinstimmung ist um so besser, je kleiner die Spannweite und je grösser der Parameter der Kurve sind.

Für den Durchhang erhält man:

$$f = \frac{406^2}{8 \cdot 875 \cdot 0,8515} = 27,65 \text{ m} (27,62)$$

Wie aus diesen Zahlen (x_1, x_2, y'_1, y'_2) ersichtlich ist, weicht der Scheitel der fiktiven Parabel erheblich von demjenigen der Kettenlinie ab. Da der Scheitel aber ausserhalb der Spannweite und der materiellen Seillinie liegt, so hat dies nichts zu bedeuten. Wie aus den Berechnungen hervorgeht, stimmen berechnete und wirkliche Seillinie innerhalb der Spannweite A B gut überein.

Zur Berechnung des kürzesten Abstandes eines Punktes von der Seillinie ist die Kenntnis des Neigungswinkels der Seillinie gegen die Horizontale erforderlich. Bezeichnet man diesen Winkel mit τ , so erhält man für irgendeinen Punkt der Seilkurve die Beziehung:

$$\text{tg } \tau = \frac{x}{c'} = \frac{x}{c \cdot \cos \psi} \tag{13}$$

wenn x die Abszisse des Punktes in der als fiktive Parabel dargestellten Seilkurve bedeutet. Der kürzeste Abstand eines Terrainpunktes von der Seillinie ist alsdann gleich dem lotrechten Abstand, multipliziert mit $\cos \tau$.

ist das Seilpolygon im Gleichgewicht, wenn die Summe der Projektionen aller Kräfte auf zwei zueinander senkrecht stehende Axen gleich Null ist. Es muss also in Fig. 1^a sein:

$$H_1 = H_2$$

$$V_1 + V_2 = P_1 + P_2 + P_3$$

d. h. die horizontalen Komponenten der Spannungen in den einzelnen Seilstücken sind alle gleich gross und die Summe der vertikalen Spannungskomponenten beliebiger Seilstücke

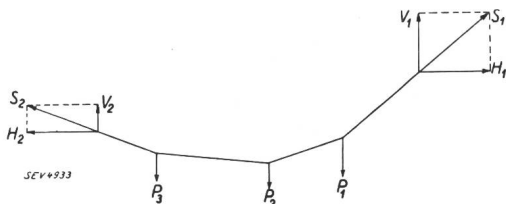


Fig. 1*.

ist gleich der Summe aller zwischen ihnen liegenden Belastungen.

Ist also eine Polygonseite horizontal, so ist die in ihr vorhandene Spannung gleich H , d. h. sie ist die überhaupt kleinste im System auftretende Spannung.

Die Vertikalkomponente der Spannung in irgendeinem Punkte des Seilpolygons ist gleich der Summe der Belastungen zwischen diesem Punkt und dem untersten Punkt.

Bei Freileitungen kommt als Belastung in erster Linie das Eigengewicht der Leiter in Frage; dieses ist bei konstantem Seilquerschnitt gleichmässig über die Bogenlänge verteilt. Bei Zusatzlasten infolge Schnee- oder Rauhreifansatz wird dies allerdings im allgemeinen nicht der Fall sein. Zur Vereinfachung der Berechnung werden indessen auch diese Zusatzlasten als gleichmässig über den Leiter verteilt angenommen. Die totale Belastung (Eigengewicht + Zusatzlast) pro Einheit der Länge (cm) sei g . Das Seilpolygon wird dann zur Kettenlinie. Es wird nämlich aus Fig. 2*, wo H die hori-

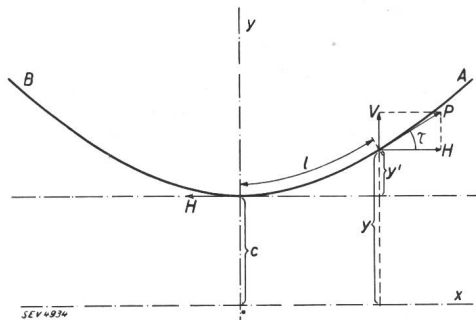


Fig. 2*.

zontale, V die vertikale Komponente des im Seile wirkenden Zuges P ist:

$$V = g \cdot l \tag{1*}$$

$$\text{tg } \tau = \frac{V}{H} = \frac{g \cdot l}{H} \tag{2*}$$

Aus Gl. (2*) folgt, dass die Seilkurve ihre Form nicht ändert, wenn man V und H , resp. g und H einander proportional ändern lässt. Man kann also setzen:

$$H = c \cdot g \tag{3*}$$

Der Proportionalitätsfaktor c wird als Parameter der Seilkurve bezeichnet. Aus Gl. (2*) erhält man

$$\text{tg } \tau = \frac{l}{c} \tag{4*}$$

Die Tangente des Winkels der Kurve gegen die x -Axe ist demnach dem Bogen proportional. Durch Differentiation der letzten Formel ergibt sich:

$$\frac{d \text{tg } \tau}{dx} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dl}{dx}$$

Darin ist:

$$\text{tg } \tau = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d(\text{tg } \tau)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2};$$

Ferner:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

somit

$$dl = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

woraus man die Gleichung der Kettenlinie erhält:

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right) \tag{5*}$$

wobei (Fig. 2*) die x -Axe in einem Abstand gleich dem Parameter c von der Scheiteltangente und parallel zu derselben

liegt. Der Ausdruck: $\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right)$ wird auch mit $\text{CoDsh} \left(\frac{x}{c} \right)$

(cosinus hyperbolicus) bezeichnet; Gl. (5*) erhält dann die Form:

$$y = c \cdot \text{CoDsh} \left(\frac{x}{c} \right) \tag{5a*}$$

Zur bequemerer Rechnung entwickelt man Gl. (5) nach Mac-Laurin in eine Potenzreihe und erhält:

$$y = c + \frac{x^2}{2c} + \frac{x^4}{24c^3} + \frac{x^6}{720c^5} + \dots \tag{6*}$$

Mit Hilfe dieser Gl. (6*) lässt sich für jede beliebige Abszisse x die zugehörige Ordinate y ermitteln. Die Glieder höherer als der vierten Potenz können in allen praktisch vorkommenden Fällen wegen ihrer relativen Kleinheit vernachlässigt werden.

Für den Fall mässig grosser und wenig geneigter Spannweiten genügt bereits die Berücksichtigung nur der beiden ersten Glieder. Man erhält in diesem Fall aus Gl. (6*):

$$y = c + \frac{x^2}{2c}$$

Verlegt man noch die Abszissenaxe in die Scheiteltangente durch Einführung der neuen Ordinate $y' = y - c$, so wird:

$$y' = \frac{x^2}{2c} \tag{6a*}$$

d. h. die Kettenlinie wird für diesen Fall zur Parabel.

Die Parabel stellt die Seilkurve dar für den Fall, dass die Belastung gleichmässig über die Horizontalprojektion der Seillinie verteilt ist. Es ist dann:

$$V = g \cdot x; \quad H = g \cdot c$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg } \tau = \frac{V}{H} = \frac{x}{c}$$

woraus man durch Integration erhält $y' = \frac{x^2}{2c}$, welche Formel mit Gl. (6a*) identisch ist.

Es wird in der Folge bei Berücksichtigung der Zustandsänderungen von grossem Interesse sein, die Bogenlänge l ermitteln zu können. Diese beträgt gemäss Gl. (4*):

$$l = c \cdot \text{tg } \tau = c \cdot \frac{dy}{dx}$$

Daraus erhalten wir nach Gl. (5*):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right)$$

und somit:

$$l = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right) \tag{7*}$$

Der Ausdruck: $\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right)$ wird auch mit $\text{Sin} \left(\frac{x}{c} \right)$

(sinus hyperbolicus) bezeichnet; Gl. (7*) erhält dann die Form:

$$l = c \cdot \text{Sin} \left(\frac{x}{c} \right) \quad (7^*)$$

Für die Funktionen Sin und Cos gibt es in gleicher Weise wie für die Kreisfunktionen fertig ausgerechnete Tabellen.

Man kann Gl. (7*) in analoger Weise wie Gl. (6*) in eine Potenzreihe entwickeln und erhält:

$$l = x + \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{c^2} + \frac{1}{120} \cdot \frac{x^5}{c^4} + \dots \quad (8^*)$$

Für die praktische Rechnung genügt in den meisten Fällen die Berücksichtigung nur der beiden ersten Glieder. Aus den Gl. (5a*) und (7a*) folgt ferner, da

$$\text{Cos}^2 \left(\frac{x}{c} \right) - \text{Sin}^2 \left(\frac{x}{c} \right) = 1: \quad (9^*)$$

$$l^2 = \gamma^2 - c^2$$

Der aus obigen Formeln berechnete Wert für l bedeutet die Länge der Kettenlinie vom Kurvenscheitel bis zum Punkt mit der Ordinate y .

Der Parameter bestimmt sich nach Gl. (3*) zu

$$c = \frac{H}{g} \quad (3a^*)$$

durch Division durch den Seilquerschnitt erhält man:

$$c = \frac{p}{\gamma}$$

wo p den spezifischen horizontalen Leiterzug in kg/cm², γ das Gewicht des Seiles + Zusatzlast, bezogen auf 1 cm Länge und 1 cm² Querschnitt bedeutet. Ist keine Zusatzlast vorhanden, so ist γ gleich dem spezifischen Gewicht des Leiters, ausgedrückt in kg/cm³.

Die Zugbeanspruchung des Leiters in irgendeinem Punkt setzt sich zusammen aus der horizontalen und vertikalen Komponente, also

$$P = \sqrt{V^2 + H^2}$$

Die minimale Beanspruchung ist im Kurvenscheitel vorhanden, ihre Grösse ist H ; die maximale Zugbeanspruchung herrscht in den Aufhängepunkten, bzw., bei geneigten Spannweiten, im oberen Aufhängepunkt. Aus den Gl. (1*), (3*) und (9*) und Einsetzung der spezifischen Belastung g folgt:

$$P = \sqrt{g^2 \cdot l^2 + g^2 \cdot c^2} = g \cdot \sqrt{l^2 + c^2} = g \cdot \gamma \quad (10a^*)$$

oder beiderseits durch den Seilquerschnitt dividiert:

$$p_n = \gamma \cdot y \quad (10^*)$$

Darin ist y die Ordinate der Kettenlinie, bezogen auf die um die Distanz c unterhalb des Kurvenscheitels liegende Abszissenaxe. Für den Scheitel als Nullpunkt erhält man: $y' = y - c$ oder

$$p_n = p + \gamma \cdot y' \quad (11^*)$$

p = die Scheitelbeanspruchung; p_n = Beanspruchung in irgendeinem Punkt mit der Ordinate y , bzw. y' .

Für eine mässig grosse Spannweite mit gleich hohen Aufhängepunkten kann p_n ohne grossen Fehler gleich p gesetzt werden.

2. Berechnung von Seilkurven für Leitungen mit verschiedenen hohen Aufhängepunkten.

Zur Bestimmung der Seilkurven muss der Parameter sowie die Lage der Koordinatenachsen bekannt sein. Dies ist bei Spannweiten mit gleich hohen Aufhängepunkten ohne weiteres der Fall, da die Ordinatenaxe die Verbindungsgerade der beiden Aufhängepunkte halbiert und auf dieser senkrecht steht.

Bei ungleich hohen Aufhängepunkten sind indessen ausser dem Parameter c nur die Differenz der Abszissen der Auf-

hängepunkte gleich der Spannweite a und die Differenz der Ordinaten gleich der Höhendifferenz h gegeben. Aus diesen Werten müssen die Koordinaten der beiden Aufhängepunkte A und B (Fig. 3, Hauptteil, Kap. 3) und somit die Lage der Koordinatenachsen bestimmt werden.

Man löst diese Aufgabe zunächst unter der Annahme einer parabelförmigen Seillinie. Gemäss Fig. 3 ist:

$$x_2 - x_1 = a \text{ und } y'_2 - y'_1 = h$$

Da gemäss Gl. (6a*):

$$y'_2 = \frac{x_2^2}{2c} \text{ und } y'_1 = \frac{x_1^2}{2c}$$

so ist

$$h = \frac{1}{2c} (x_2^2 - x_1^2) = \frac{a}{2c} (x_2 + x_1)$$

oder

$$x_2 + x_1 = \frac{2 \cdot c \cdot h}{a}$$

und

$$x_2 - x_1 = a$$

Durch Addition und Subtraktion der beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= c \frac{h}{a} + \frac{a}{2} \text{ und} \\ x_1 &= c \frac{h}{a} - \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \quad (12^*)$$

oder, da $c = \frac{p}{\gamma}$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{p \cdot h}{\gamma \cdot a} + \frac{a}{2} \text{ und} \\ x_1 &= \frac{p \cdot h}{\gamma \cdot a} - \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \quad (12a^*)$$

Für die Kettenlinie als Seilkurve lässt sich die Aufgabe analog lösen. Man geht am besten von der expliziten Form der Kettenliniengleichung aus, wobei höhere Potenzen der Abszisse als die vierte vernachlässigt werden können.

Es ist wie bei der Parabel:

$$x_2 - x_1 = a; \quad y'_2 - y'_1 = h$$

Die Ordinaten sind jedoch:

$$y'_2 = \frac{x_2^2}{2c} + \frac{x_2^4}{24c^3}; \quad y'_1 = \frac{x_1^2}{2c} + \frac{x_1^4}{24c^3}$$

woraus sich ergibt:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad x_2 - x_1 &= a \\ b) \quad h &= \frac{a}{2c} (x_1 + x_2) \cdot \left[1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{12c^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (13^*)$$

Bei der Auflösung der Gl. (13*) nach x_1 und x_2 stösst man auf Gleichungen dritten Grades, deren Auflösung sehr umständlich ist. Es ist aber statthaft, den Ausdruck $x_1^2 + x_2^2$ durch die nach Gl. (12*) bzw. (12a*) berechneten Näherungswerte $x_1'^2 + x_2'^2$ zu ersetzen, worauf Gl. (13b*) sich auf eine solche ersten Grades reduziert, aus welcher sich die Summe $x_1 + x_2$ und sodann mit Hilfe der Gl. (13a*) die Werte für x_1 und x_2 berechnen lassen.

Erhält man für x_1 einen negativen Wert, so liegt der Scheitel der Seilkurve innerhalb, im andern Fall ausserhalb der Spannweite.

Wie aus Gl. (11*) hervorgeht, darf bei Spannweiten mit verschiedenen hohen Aufhängepunkten die für den Parameter c massgebende Horizontalbeanspruchung p nicht mehr der Höchstbeanspruchung p_n im oberen Aufhängepunkt gleich gesetzt werden. p_n darf auf keinen Fall grösser gewählt werden als die nach Starkstromverordnung höchst zulässige Beanspruchung p_2 . Setzt man $p_n = p_2$, so darf die Scheitelbeanspruchung nach Fig. 3 und Gl. (11*) höchstens betragen:

$$p = p_z - \gamma_{\text{Schnee}} \cdot y'_2 = p_z - \gamma_{\text{Schnee}} (h + y'_1)$$

Für eine parabelförmige Seilkurve kann man setzen:

$$y'_1 = \frac{\gamma_{\text{Schnee}} \cdot x_1^2}{2 \cdot p}$$

und

$$x_1 = \frac{p \cdot h}{\gamma \cdot a} - \frac{a}{2}$$

woraus sich die folgende Gleichung berechnen lässt:

$$p^2 \left(\frac{h^2}{a^2} + 2 \right) - p(2p_z - h \cdot \gamma_{\text{Schnee}}) + \frac{\gamma_{\text{Schnee}}^2 \cdot a^2}{4} = 0 \quad (14^*)$$

Bei Auflösung der letzten Gleichung erhält man zwei Werte, nämlich einen für den Fall, dass der Scheitel der Seilkurve innerhalb der Spannweite ist und einen solchen für den Fall, dass der Scheitel ausserhalb fällt. Ein imaginärer Wert von p bedeutet, dass bei den gegebenen Verhältnissen überhaupt keine Lösung möglich ist, d. h. es ist dann nicht möglich, den gegebenen Leiter über die gegebene Spannweite und Höhendifferenz so zu spannen, dass die maximale Zugspannung p_n nicht über die festgesetzte Grenze p_z hinausgeht. In einem solchen Fall wird man einen Leiter mit grösserer Querschnitt oder aus einem Material mit grösserer Bruchfestigkeit wählen müssen, wie folgendes Beispiel zeigt:

Eine Spannweite von 400 m mit einer Höhendifferenz von 200 m sollte mit einem 5 mm-Eisendraht von 4500 kg/cm² Bruchfestigkeit überbrückt werden.

Die maximal zulässige Beanspruchung beträgt dann $\frac{2}{3}$ von 4500 = 3000 kg/cm², das virtuelle spezifische Gewicht für 2 kg Schnee pro Laufmeter: $\gamma_{\text{Schnee}} = 109,8 \cdot 10^{-3}$ kg/cm³.

Diese Werte in Gl. (14^{*}) eingesetzt ergeben:

$$p^2 \cdot \left(\frac{200^2}{400^2} + 2 \right) - p(2 \cdot 3000 - 2 \cdot 10^4 \cdot 109,8 \cdot 10^{-3}) + \frac{109,8^2 \cdot 10^{-6} \cdot 4^2 \cdot 10^8}{4} = 0,$$

$$2,25 p^2 - 3800 p + 48 \cdot 10^5 = 0,$$

daraus

$$p = \frac{3800 \pm \sqrt{144 \cdot 10^5 - 432 \cdot 10^5}}{4,5}$$

Da das Glied unter der Quadratwurzel negativ wird, so ergibt sich für p ein imaginärer Wert. Es ist also nicht möglich, den Draht unter den gegebenen Voraussetzungen zu spannen.

[Ueber Gültigkeitsbereich und Anwendung von Gl. (14^{*}) siehe Kapitel 1 dieser Abhandlung, Gl. (3).]

3. Die Zustandsgleichung einer Freileitung für Spannweiten mit beidseitig gleich hoch liegenden Aufhängepunkten.

Bei Aenderung der Temperatur um die Differenz $t - t_0$ ändert sich bekanntlich die Länge l_0 eines Drahtes vom Wärmeausdehnungskoeffizienten α um: $(t - t_0) \alpha l_0$.

Aehnlich ändert sich bei einer Aenderung der spezifischen Zugbeanspruchung um $p - p_0$ der gleiche Draht vom Elastizitätsmodul E um:

$$(p - p_0) \cdot \frac{l_1}{E}.$$

Hierin bedeuten p und p_0 die wirklich vorkommenden spezifischen Zugbeanspruchungen. Diese sind genau genommen, wie bereits gesagt, in jedem Zustand von Punkt zu Punkt verschieden, ansteigend vom tiefsten Punkte der Kettenlinie aus. Für absolut genaue Rechnung wären daher hier für « p » wie für « p_0 » entsprechende *mittlere* Werte (auf die ganze Bogenlänge bezogen) einzusetzen. Man begeht aber nach *Hook*, wie späterhin noch gezeigt werden soll (Kapitel 4) einen für gewöhnliche Fälle bei gleich hohen Aufhängepunkten ohne Schaden vernachlässigbaren Fehler, wenn man dafür die (geringste) spezifische Zugbeanspruchung am tief-

sten Punkt einsetzt. « p » und « p_0 » behalten also mit dieser Annäherung auch in diesen Formeln ihre frühere Bedeutung der Beanspruchungen am Scheitel der Kurve.

Demnach gilt allgemein für eine Zustandsänderung von zusammengehörigen l_0, p_0, t_0 zu zusammengehörigen l, p, t :

$$l - l_0 = (t - t_0) \alpha l_0 + (p - p_0) \frac{l_0}{E} \quad (15^*)$$

Für die halbe Spannweite $\frac{a}{2}$ ist aber bei beidseitig gleich

hoher Aufhängung nach Formel (8^{*}) und weil $c = \frac{p}{\gamma}$ für einen Anfangszustand:

$$\frac{l_0}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a^3 \gamma_0^2}{48 p_0^2} + \frac{a^5 \gamma_0^4}{3840 p_0^4} + \dots$$

wobei in den meisten Fällen (d. h. abgesehen von sehr grossen Spannweiten) die Glieder vom dritten Glied an wegen ihrer Kleinheit weggelassen werden können, so dass wir angenähert erhalten:

$$\frac{l_0}{2} = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{a^2 \gamma_0^2}{24 p_0^2} \right)$$

Denken wir uns, es ändere sich gleichzeitig mit p_0 und t_0 auch noch durch Zusatzlast das virtuelle spezifische Gewicht von γ_0 auf γ , so wird im neuen Zustand:

$$\frac{l}{2} = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{a^2 \gamma^2}{24 p^2} \right)$$

Aus den letzten zwei Gleichungen und (15^{*}) ergibt sich dann:

$$l - l_0 = a \frac{a^2}{24} \left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2} \right) = (t - t_0) \alpha \cdot l_0 + (p - p_0) \frac{l_0}{E}$$

$$\text{oder } \frac{a^2}{24} \left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2} \right) = (t - t_0) \alpha \cdot \frac{l_0}{a} + (p - p_0) \cdot \frac{l_0}{a} \cdot \frac{1}{E}$$

In diesen Formeln darf man noch mit genügender Annäherung setzen

$$\frac{l_0}{a} = 1.$$

Da dieses Verhältnis tatsächlich etwas > 1 ist, so hat diese Vereinfachung dieselbe Wirkung wie ein zu klein angenommenes α oder ein zu gross angenommenes E , was nach Formel (15^{*}) beides eine etwas zu geringe Längenänderung ergibt. Dass dieser Fehler aber in den gewöhnlichen Fällen bedeutungslos ist, wird späterhin (Kapitel 4) noch besonders gezeigt werden.

Mit dieser Vereinfachung hat man dann:

$$\frac{a^2}{24} \left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2} \right) = (t - t_0) \alpha + (p - p_0) \cdot \frac{1}{E} \quad (16a^*)$$

woraus wir durch Umformung die *Zustandsgleichung einer Freileitung* (mit gleich hohen Aufhängepunkten, in Parabelform) erhalten:

$$p^3 + p^2 \left[\frac{\gamma_0^2 \cdot a^2 \cdot E}{24 \cdot p_0^2} + (t - t_0) \alpha \cdot E - p_0 \right] = \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot E}{24} \quad (16^*)$$

4. Die Zustandsgleichung für Spannweiten mit verschiedenen hohen Aufhängepunkten.

Kurz wiederholt wissen wir also, dass jede zwischen zwei beliebigen festen Punkten gespannte flexible Leitung immer die Form einer Kettenlinie annimmt, die in den meisten in der Praxis vorkommenden Fällen von der Parabel so wenig abweicht, dass die Abweichung vernachlässigt werden kann. Die Zugbeanspruchungen in jedem Punkt können daher nach der bekannten Beziehung $p' = p + \gamma \cdot y'$ berechnet werden. Dabei ist die Grösse y' in jedem Punkt gleich seiner Ordinate über die als x -Axe gewählte Scheiteltangente (Fig. 3^{*}). Die Zugbeanspruchung wird somit beim oberen Aufhänge-

punkt am grössten sein, und ihr maximal zulässiger Wert p_z ergibt sich aus der Bruchfestigkeit des Materials und der durch die Vorschriften festgesetzten Sicherheit gegen Bruch. Im zweiten Kapitel haben wir in der Formel (14*) eine Methode entwickelt, um aus der nun bekannten zulässigen maximalen Beanspruchung p_z die zugehörige Scheitelbeanspruchung p zu ermitteln.

Es bleibt uns hier noch übrig, die einem neuen Zustande γ und t entsprechende Zugbeanspruchung p in Funktion der bekannten Anfangsdaten p_0, γ_0 und t_0 zu setzen, ähnlich wie

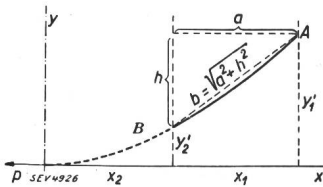


Fig. 3*.

wir dies im vorigen Kapitel für Spannweiten mit horizontaler Verbindungslinie der Aufhängepunkte bereits ausgeführt haben.

Eine genaue Betrachtung der Verhältnisse zeigt sofort, dass die obgenannte für gleich hohe Aufhängepunkte gültige Formel (16*) für schiefe Spannweiten keine Verwendung finden kann. In erster Linie könnten wir als Spannweite nicht ohne weiteres die horizontale Distanz a in diese Formel einsetzen, denn es muss hier die Aenderung der Beanspruchung als Funktion der Längenänderung $(l - l_0)$ des Bogens mit der Sehne $b = f(a, h)$ abhängig sein. In zweiter Linie haben wir uns bei der Entwicklung der Formel (16*) einer Näherung bedient, die hier nicht mehr angewendet werden darf. Wir setzen nämlich dort für die Längenänderung infolge der Elastizität $(l - l_0) = (p - p_0) \frac{1}{E}$, wobei die Grössen p und p_0 Scheitelbeanspruchungen bezeichnen, währenddem es sich eigentlich nur um die Aenderungen der mittleren Beanspruchungen $(\bar{p} - \bar{p}_0)$ auf der ganzen Kettenlinie handeln kann. Für die Berechnung der Längen l und l_0 kommen hingegen die Scheitelbeanspruchungen p und p_0 in Frage. Wir haben also bei der Entwicklung der Formel (16*) zwei in Wirklichkeit verschiedene Beanspruchungen einander gleichgesetzt und miteinander vermengt. Dies war dort zulässig, denn der begangene Fehler wird im allgemeinen einige % nicht übersteigen. Wie am Schluss dieses Kapitels gezeigt wird, lässt sich Formel (16*) für horizontale Spannweiten ohne weiteres

$$\text{d. h. } \bar{p} = p_{\text{mittel}} = p + \frac{\gamma^2}{2p} \left(\frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{3} \right) + \frac{\gamma^4}{24 p^3} \left(\frac{x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3 + x_2^4}{5} \right)$$

der horizontalen Distanz a der Aufhängepunkte und reduziert auf diese Grösse als Basis. (Siehe Fig. 4*.) Zeichnen wir also für eine Spannweite AC die Kurve AEG der Beanspruchungen $p' = p + \gamma \cdot y'$, so ist nach obiger Definition die mittlere Beanspruchung \bar{p} gleich der Höhe desjenigen Rechteckes über $MN = a = x_1 - x_2$ als Basis, das den gleichen Inhalt wie die Fläche $AEGMN$ aufweist.

Es sei in einem beliebigen Punkt P die Beanspruchung $p' = p + \gamma \cdot y'$, wobei

$$y' = \frac{\gamma \cdot x^2}{2 p} + \frac{\gamma^3 \cdot x^4}{24 p^3} + \dots$$

so können wir schreiben:

$$p' \cdot dx = p \cdot dx + \frac{\gamma^2 \cdot x^2}{2 p} \cdot dx + \frac{\gamma^4 \cdot x^4}{24 p^3} \cdot dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} p' \cdot dx = p \int_{x_1}^{x_2} dx + \frac{\gamma^2}{2p} \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot dx + \frac{\gamma^4}{24 p^3} \int_{x_1}^{x_2} x^4 \cdot dx =$$

$$p (x_1 - x_2) + \frac{\gamma^2}{2p} \left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{3} \right) + \frac{\gamma^4}{24 p^3} \left(\frac{x_1^5 - x_2^5}{5} \right)$$

wobei das dritte Glied gegenüber den zwei ersten vernachlässigt werden darf, so dass wir für die mittlere Beanspruchung eines beliebigen Kettenelementes AOC allgemein schreiben können:

$$\bar{p} = p + \frac{\gamma^2}{6 p} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$$

In dieser Form ist diese Gleichung jedoch für den Gebrauch unbequem, da sie die Berechnung der Abszissenwerte x_1 und x_2 voraussetzt. Sie kann aber leicht in eine Funktion der gegebenen Grössen h und a umgewandelt werden. Wir setzen:

$$h = y'_1 - y'_2 = \frac{\gamma x_1^2}{2 p} - \frac{\gamma x_2^2}{2 p}$$

und

$$a = x_1 - x_2$$

woraus wir durch Elimination der Grössen x_1 und x_2 die Beziehung erhalten:

$$\bar{p} = p + \frac{p h^2}{2 a^2} + \frac{\gamma^2 a^2}{24 p} \tag{17*}$$

Daraus ersehen wir, dass die Grösse \bar{p} bei schiefen Spannweiten je nach den Werten von h und a viel grösser als p werden kann. Für horizontale Spannweiten hingegen fällt das Glied mit h weg und wir erhalten:

$$\bar{p} = p + \frac{\gamma^2 a^2}{24 p} = p + \frac{1}{3} \gamma \cdot f$$

Da auch bei sehr grossen Spannweiten γ niemals 10^{-1} kg/cm^3 erreicht und der Durchhang selten die Grössenordnung von 100 m überschreitet, ferner in diesen Fällen ein Material von höchster Bruchfestigkeit ($p_z = 40$ bis 80 kg/mm^2) gewählt werden muss, so ergibt sich aus obiger Gleichung die Tatsache, dass \bar{p} auch in den extremsten Fällen höchstens einige % grösser als p sein kann.

Wir dürfen somit bei horizontalen Spannweiten allgemeiner $\bar{p} \sim p$ setzen.

Wir sind nun in der Lage, die allgemeine Zustandsgleichung zu entwickeln und schreiben in ähnlicher Weise wie für Formel (16*):

$$l - l_0 = (t - t_0) \alpha l_0 + (\bar{p} - \bar{p}_0) \frac{1}{E} \cdot l_0$$

Dabei beträgt die Länge l nach Fig. 4* und Gl. (8*):

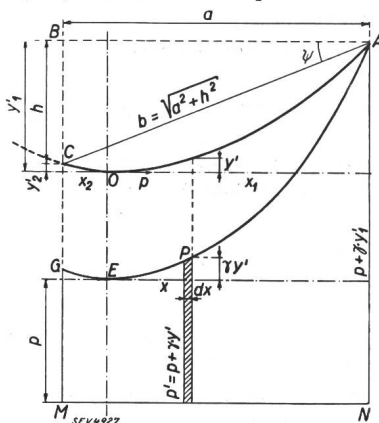


Fig. 4*.

als Spezialfall aus der allgemeinen Formel für schiefe Spannweiten herleiten. Bei Spannweiten mit verschiedenen hohen Aufhängepunkten kann hingegen die mittlere Beanspruchung ganz andere Werte annehmen.

Die mittlere Beanspruchung \bar{p} können wir definieren als die Beanspruchung $p' = p + \gamma \cdot y'$ der Parabel, integriert über

$$l = (x_1 - x_2) + \frac{1}{6} \gamma^2 \left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{p^2} \right)$$

$$l = a + \frac{\alpha \gamma^2}{6 p^2} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$$

Für x_1 und x_2 können wir nach Formel (12a*) setzen:

$$x_1 = \frac{p h}{\gamma a} + \frac{a}{2}$$

$$x_2 = \frac{p h}{\gamma a} - \frac{a}{2}$$

woraus wir ermitteln:

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3 p^2 h^2}{\gamma^2 a^2}$$

Dieser Wert oben eingesetzt ergibt:

$$l = a + \frac{h^2}{2 a} + \frac{\gamma^2 a^3}{24 p^2}$$

Entsprechend ist:

$$l_0 = a + \frac{h^2}{2 a} + \frac{\gamma_0^2 a^3}{24 p_0^2}$$

$$l - l_0 = a \cdot \frac{a^2}{24} \left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2} \right) = (t - t_0) \alpha \cdot l_0 + (\bar{p} - \bar{p}_0) \frac{1}{E} \cdot l_0$$

$$= b \cdot \cos \psi \cdot \frac{a^2}{24} \left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2} \right) = (t - t_0) \alpha \cdot l_0 + (\bar{p} - \bar{p}_0) \frac{1}{E} \cdot l_0$$

Wir setzen nun wie früher $\frac{l_0}{b} \sim 1$ und erhalten:

$$\cos \psi \cdot \frac{a^2}{24} \left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2} \right) = (t - t_0) \alpha + \frac{1}{E} (\bar{p} - \bar{p}_0)$$

Wir setzen ferner nach Formel (17*):

$$\bar{p} = p + \frac{p h^2}{2 a^2} + \frac{\gamma^2 a^2}{24 p}$$

$$\bar{p}_0 = p_0 + \frac{p_0 h^2}{2 a^2} + \frac{\gamma_0^2 a^2}{24 p_0}$$

$$\bar{p} - \bar{p}_0 = p + \frac{p h^2}{2 a^2} + \frac{\gamma^2 a^2}{24 p} - p_0 - \frac{p_0 h^2}{2 a^2} - \frac{\gamma_0^2 a^2}{24 p_0}$$

Dieser Wert eingesetzt ergibt:

$$\frac{\gamma^2 a^2}{24 p^2} E \cdot \cos \psi - \frac{\gamma_0^2 a^2}{24 p_0^2} E \cdot \cos \psi = (t - t_0) \alpha E + p + \frac{p h^2}{2 a^2} + \frac{\gamma^2 a^2}{24 p} - p_0 - \frac{p_0 h^2}{2 a^2} - \frac{\gamma_0^2 a^2}{24 p_0}$$

woraus wir durch Umformung erhalten:

$$p^3 \left(1 + \frac{h^2}{2 a^2} \right) + p^2 \left[\frac{\gamma_0^2 a^2}{24 p_0^2} E \cdot \cos \psi + (t - t_0) \alpha \cdot E - p_0 \left(1 + \frac{h^2}{2 a^2} \right) - \frac{\gamma_0^2 a^2}{24 p_0} \right] + \frac{\gamma^2 a^2}{24} p = \frac{\gamma^2 a^2}{24} E \cdot \cos \psi$$

Das Glied $\frac{\gamma_0^2 a^2}{24 p_0}$ fällt gegenüber dem ersten in der grossen Klammer weg, ebenso kann in den meisten Fällen $\frac{\gamma^2 a^2}{24} \cdot p$ vernachlässigt werden, so dass wir als

Allgemeine Zustandsgleichung einer Freileitung

in Parabelform erhalten:

$$p^3 \left(1 + \frac{h^2}{2 a^2} \right) + p^2 \left[\frac{\gamma_0^2 a^2 \cdot E}{24 \cdot p_0^2} \cos \psi + (t - t_0) \alpha \cdot E - p_0 \left(1 + \frac{h^2}{2 a^2} \right) \right] = \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot E}{24} \cdot \cos \psi \quad (18^*)$$

Diese Gleichung kann im Gegensatz zu Gl. (16*) als allgemeine Zustandsgleichung bezeichnet werden, denn sie gilt in allen Fällen. Sie ist bei $\psi = 0, h = 0$ gleich der früher für horizontale Spannweiten entwickelten Gl. (16*).

5. Die Zustandsgleichungen für Freileitungen mit beweglichen Isolatoren (Hängeketten).

Wie im Kapitel 5, Abschnitt c, dargestellt wurde, gleichen sich bei Leitungen mit Hängeisolatoren die infolge von Zustandsänderungen in den einzelnen Spannweiten verschieden werdenden Seilzüge durch die Auslenkung der Isolatorenketten aus, so dass schliesslich die Horizontalspannungen in allen Spannweiten als gleich gross betrachtet werden können.

Es sollen nun im folgenden die Zustandsgleichungen für Leitung mit Hängeisolatoren, mit gleich hohen und verschiedenen hohen Aufhängepunkten abgeleitet werden:

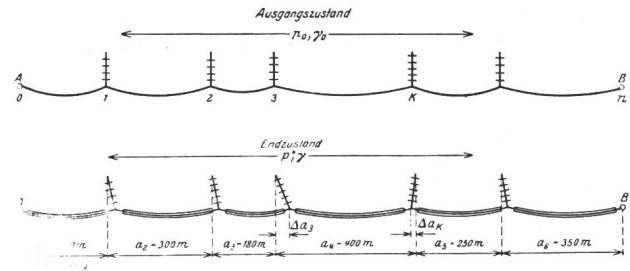


Fig. 5* und 6*.

Ein Leiter sei zwischen zwei Abspannpunkten A und B in n Spannweiten im Ausgangszustand p_0, γ_0, t_0 mit senkrecht stehenden Hängeketten montiert worden (Fig. 5*). Bei einer Zustandsänderung auf γ, t wird die ausgeglichene horizontale Seilspannung gleich p^* . Bei jeder derartigen Zustandsänderung werden die Isolatorenketten um gewisse Beträge Δa auslenken.

Bezeichnet man mit

p_0 die horizontale Seilbeanspruchung in kg/cm² im Ausgangszustand bei senkrechten Hängeketten,

$p_1 \dots p_k \dots p_n$ die in jeder Spannweite verschiedenen, beim Uebergang vom Anfangszustand in den Endzustand, aber bei festgehalten gedachten Aufhängepunkten entstehenden Seilspannungen,

p^* die ausgeglichene Seilspannung im Endzustand γ, t (Fig. 6*), so gilt für die Längenänderung jeder Spannweite (vereinfachte Formel von Bourquin):

$$\delta_k = \frac{\alpha_k^3 \cdot \gamma^2}{24} \left(\frac{1}{p_k^2} - \frac{1}{p^{*2}} \right) + \frac{\alpha_k}{E} \cdot (p^* - p_k) \quad (19^*)$$

Dabei bedeutet δ_k eine Verlängerung, wenn $p^* > p_k$
Verkürzung, wenn $p^* < p_k$

Ordnet man Gl. (19*) nach Gliedern von p_k und p^*

$$\delta_k = \left[\frac{\alpha_k^3 \cdot \gamma^2}{24 \cdot p_k^2} - \frac{\alpha_k}{E} \cdot p_k \right] - \left[\frac{\alpha_k^3 \cdot \gamma^2}{24 \cdot p^{*2}} - \frac{\alpha_k}{E} \cdot p^* \right] \quad (19a^*)$$

und vergleicht sie mit der Zustandsgleichung (16a*) für die k te Spannweite, indem man jene mit α_k multipliziert und in gleicher Weise wie Gl. (19a*) ordnet

$$\frac{\alpha_k^3 \cdot \gamma^2}{24 \cdot p_k^2} - \frac{\alpha_k}{E} \cdot p_k = (t - t_0) \alpha \cdot \alpha_k + \left[\frac{\alpha_k^3 \cdot \gamma^2}{24 \cdot p_0^2} - \frac{\alpha_k \cdot p_0}{E} \right] \quad (16a^*)$$

Man sieht, dass der linke Klammerausdruck der Gl. (19a*) mit der linken Seite der Gl. (16a*) identisch ist. Durch Sub-

stitution von Gl. (16a*) in Gl. (19a*) erhält man

$$\delta_k = \frac{\alpha_k^3}{24} \cdot \left(\frac{\gamma_0^2}{p_0^2} - \frac{\gamma^2}{p^{*2}} \right) + (t - t_0) \alpha \cdot \alpha_k + (p^* - p_0) \frac{\alpha_k}{E}$$

Die totale Isolatorenauslenkung Δa_k am k ten Mast ist gleich der Summe der Längenänderungen δ in allen Spannweiten von 1 bis k , also

$$\Delta a_k = \sum_1^k \delta =$$

$$\sum_1^k \frac{a^3}{24} \left(\frac{\gamma_0^2}{p_0^2} - \frac{\gamma^2}{p^{*2}} \right) + \left[(t - t_0) \alpha + (p^* - p_0) \frac{1}{E} \right] \sum_1^k a \quad (20^*)$$

An der Endabspannung (n te Spannweite) ist $\Delta a_n = 0$, da der Punkt B ein Fixpunkt ist. Man setzt in Gl. (20*) $\Delta a = 0$, dividiert durch $\sum a$ und erhält die Zustandsgleichung für Sektionen von Leitungen mit Hängeisolatoren zwischen 2 Abspannpunkten:

$$\delta_k = \frac{a_k^3 \cos \psi}{24} \left(\frac{\gamma_0^2}{p_0^2} - \frac{\gamma^2}{p^{*2}} \right) + (t - t_0) \alpha a_k + (p^* - p_0) \frac{a_k}{E} \left(1 + \frac{h_k^2}{2 a_k^2} \right)$$

$$\sum_1^n a^3 \left(\frac{\gamma_0^2}{24 p_0^2} - \frac{\gamma^2}{24 p^{*2}} \right) + (t - t_0) \alpha + (p^* - p_0) \frac{1}{E} = 0 \quad (20a^*)$$

Man setzt ferner:

$$\frac{\sum_1^n a^3}{\sum_1^n a} = a^{*2} \quad (21^*)$$

ordnet Gl. (20a*) nach Potenzen von p^* und erhält

$$p^{*3} + p^{*2} \left[\frac{\gamma_0^2 \cdot a^{*2} \cdot E}{24 \cdot p_0^2} + (t - t_0) \alpha E - p_0 \right] = \frac{\gamma^2 \cdot a^{*2} \cdot E}{24} \quad (22^*)$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Zustandsgleichung Gl. (16*), wobei an Stelle der Spannweiten a die Spannweite a^* tritt. Man hat also bei Leitungen mit Hängeisolatoren die angenehme Tatsache, dass die Seilspannungen für Sektionen zwischen zwei Abspannpunkten nicht mehr Spannweite für Spannweite berechnet werden müssen, sondern für alle Spannweiten gemeinsam mit einer mittleren Spannweite a^* , welche die *Berechnungsspannweite* genannt werden soll; ihre Grösse ergibt sich aus Gl. (21*).

Für Leitungen mit ungleich hohen Aufhängepunkten lässt sich die Zustandsgleichung in analoger Weise ableiten. Die für diesen Fall modifizierte Formel von Bourquin lautet:

$$\delta_k = \frac{a_k^3 \gamma^2 \cos \psi}{24} \left(\frac{1}{p_k^2} - \frac{1}{p^{*2}} \right) + \frac{a_k}{E} (p^* - p_k) \quad (23^*)$$

Darin bedeuten p^* und p_k die Scheitelbeanspruchungen, während \bar{p} und \bar{p}_k die mittleren Beanspruchungen gemäss Kapitel 4 bedeuten. Gemäss Formel (17*) ist nun:

$$\begin{aligned} \bar{p}^* &= p^* + p^* \frac{h^2}{2 a^2} + \frac{\gamma^2 a^2}{24 p^*} \\ \bar{p}_k &= p_k + p_k \frac{h^2}{2 a^2} + \frac{\gamma^2 a^2}{24 p_k} \end{aligned} \quad (17^*)$$

Das letzte Glied in den Gl. (17*) ist von geringem Einfluss und kann vernachlässigt werden. Durch Einsetzung der Werte für \bar{p}^* und \bar{p}_k aus Gleichungen (17*) in Gleichung (23*) erhält man:

$$\delta_k = \frac{a_k^3 \gamma^2 \cos \psi}{24} \left(\frac{1}{p_k^2} - \frac{1}{p^{*2}} \right) + \frac{a_k}{E} (p^* - p_k) \left(1 + \frac{h_k^2}{2 a_k^2} \right) \quad (23a^*)$$

oder

$$\begin{aligned} \delta_k &= \left[\frac{a_k^3 \gamma^2 \cos \psi}{24 p_k^2} - \frac{a_k p_k}{E} \left(1 + \frac{h_k^2}{2 a_k^2} \right) \right] \\ &\quad - \left[\frac{a_k^3 \gamma^2 \cos \psi}{24 p^{*2}} - \frac{a_k p^*}{E} \left(1 + \frac{h_k^2}{2 a_k^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (23b^*)$$

Die umgeformte Gl. (18*) für eine einzelne Spannweite lautet:

$$\frac{a_k^3 \gamma^2 \cos \psi}{24 p_k^2} - \frac{a_k p_k}{E} \left(1 + \frac{h_k^2}{2 a_k^2} \right) = (t - t_0) \alpha a_k + \frac{a_k^3 \gamma_0^2 \cos \psi}{24 p_0^2} - \frac{a_k p_0}{E} \left(1 + \frac{h_k^2}{2 a_k^2} \right) \quad (18a^*)$$

Durch Substitution von Gl. (18a*) in Gl. (23b*) erhält man

und für die totale Isolatorenauslenkung am k ten Mast:

$$\Delta a_k = \sum_1^k \frac{a^3 \cos \psi}{24} \left(\frac{\gamma_0^2}{p_0^2} - \frac{\gamma^2}{p^{*2}} \right) + (t - t_0) \alpha \sum_1^k a + (p^* - p) \frac{1}{E} \sum_1^k a \left(1 + \frac{h^2}{2 a^2} \right) \quad (24^*)$$

Wir setzen in Gl. (24*) $\Delta a_k = 0$, dividieren durch $\sum a$ und erhalten die Zustandsgleichung für Sektionen von Leitungen mit Hängeisolatoren und geneigten Spannweiten zwischen zwei Abspannungen:

$$\frac{\sum_1^n a^3 \cos \psi}{\sum_1^n a} \left[\frac{\gamma_0^2}{24 p_0^2} - \frac{\gamma^2}{24 p^{*2}} \right] + (t - t_0) \alpha + (p^* - p) \frac{1}{E} \frac{\sum_1^n a \left(1 + \frac{h^2}{2 a^2} \right)}{\sum_1^n a} = 0 \quad (24a^*)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Wir setzen} \quad & \frac{\sum_1^n a^3 \cos \psi}{\sum_1^n a} = a^{*2} \\ & \frac{\sum_1^n a \left(1 + \frac{h^2}{2 a^2} \right)}{\sum_1^n a} = u \end{aligned} \right\} \quad (25^*)$$

und benennen a^* die *Berechnungsspannweite* und u den *mittleren Neigungsfaktor*.

Durch Ordnen der Gl. (24a*) nach Potenzen von p^* erhält man schliesslich:

$$u \cdot p^{*3} + p^{*2} \left[\frac{\gamma_0^2 a^{*2} E}{24 p_0^2} + (t - t_0) \alpha E - u \cdot p_0 \right] = \frac{\gamma^2 a^{*2} E}{24} \quad (26^*)$$

Gl. (26*) kann als allgemeine Zustandsgleichung für Leitungen mit Hängeisolatoren bezeichnet werden. Ist h in allen Spannweiten gleich Null, so ist die Gleichung identisch mit Gl. (1a) resp. (22*). Weisen alle Spannweiten die gleiche Neigung ψ auf, so wird die Gleichung identisch mit Gl. (1).

6. Physikalische Konstanten eines Leiters aus zwei verschiedenen Metallen.

Wie im Kapitel 7 gesagt wurde, lassen sich die physikalischen Konstanten eines Seiles aus zwei verschiedenen Metallen (Elastizitätsmodul, Wärmeausdehnungskoeffizient und spez. Gewicht) aus den entsprechenden Konstanten der Komponenten berechnen. Bezeichnet

q_1 den Gesamtquerschnitt der Drähte des einen Metalles,
 q_2 den Gesamtquerschnitt der Drähte des andern Metalles,
 q den totalen Querschnitt des kombinierten Seiles,
 P_1 den Anteil des Seilzuges, den die Drähte q_1 aufnehmen,
 P_2 den Anteil des Seilzuges, den die Drähte q_2 aufnehmen,
 P den totalen Seilzug,
 E_1 den Elastizitätsmodul der Drähte q_1 ,
 E_2 » » » » q_2 ,
 E_s » » des kompletten Seiles,
 α_1 den Wärmeausdehnungskoeffizienten der Drähte q_1 ,
 α_2 » » » » q_2 ,
 α_s » » des kompletten Seiles,
 so bestimmt man zunächst den

Elastizitätsmodul eines Seiles aus zwei verschiedenen Metallen.

Wird ein solches Seil, welches in den Endabspannklemmen so eingespannt ist, dass eine Verschiebung der Drähte der einzelnen Komponenten gegeneinander ausgeschlossen ist, mit einer Zugkraft von P kg belastet, so erfahren beide Metalle die gleiche Verlängerung Δl . Für beide gilt die Gleichung:

$$\Delta l = l - l_0 = (t - t_0) \alpha l_0 + (p - p_0) \frac{l_0}{E} \quad (15^*)$$

In unserem Fall ist $t = t_0$, $p_0 = 0$ und $p = P/q$ und man erhält

$$\left. \begin{aligned} \text{für das erste Metall: } \Delta l &= \frac{P_1 \cdot l_0}{q_1 \cdot E_1} \\ \text{» » zweite Metall: } \Delta l &= \frac{P_2 \cdot l_0}{q_2 \cdot E_2} \\ \text{» » ganze Seil: } \Delta l &= \frac{P \cdot l_0}{q \cdot E_s} \end{aligned} \right\} 27^*$$

oder, nach den Zugkräften aufgelöst:

$$\left. \begin{aligned} \text{für das erste Metall: } P_1 &= \frac{\Delta l}{l_0} q_1 \cdot E_1 \\ \text{» » zweite Metall: } P_2 &= \frac{\Delta l}{l_0} q_2 \cdot E_2 \\ \text{» » ganze Seil: } P &= \frac{\Delta l}{l_0} q \cdot E \end{aligned} \right\} (27a^*)$$

oder, da $P = P_1 + P_2$: $P = \frac{\Delta l}{l_0} (q_1 \cdot E_1 + q_2 \cdot E_2)$

Aus Gl. (27a*) erhält man für den auf jedes Metall entfallenden Teilzug P_1 , bzw. P_2 , sowie für den kombinierten Elastizitätsmodul E_s die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{q_1 \cdot E_1}{q_1 \cdot E_1 + q_2 \cdot E_2} \right) \cdot P \\ P_2 &= \left(\frac{q_2 \cdot E_2}{q_2 \cdot E_2 + q_1 \cdot E_1} \right) \cdot P \\ E &= \frac{q_1}{q} \cdot E_1 + \frac{q_2}{q} \cdot E_2 \end{aligned} \right\} (28^*)$$

Wärmeausdehnungskoeffizient eines Seiles aus zwei verschiedenen Metallen.

Man geht wieder von der Gl. (15*) aus, wobei jedoch an dem mit einer Anfangszugspannung p_0 gespannten Seil die Temperatur sich von t_0 auf t Grad ändert, die Distanz der Aufhängepunkte aber unverändert bleibt. Infolge der Temperaturänderung ändern sich auch die Zugspannungen, und zwar in verschiedenem Mass für beide Metalle. Die Bedingung, dass schliesslich die Verlängerung oder Verkürzung sowohl der beiden Komponenten als auch des kompletten Seiles gleich gross sein müssen, gilt jedoch auch für diesen Fall.

Aus Gl. (15*) erhält man: (29*)

$$\left. \begin{aligned} \text{für das erste Metall: } \frac{\Delta l}{l_0} &= (t - t_0) \alpha_1 + (P_1 - P_{1_0}) \frac{1}{q_1 \cdot E_1} \\ \text{» » zweite Metall: } \frac{\Delta l}{l_0} &= (t - t_0) \alpha_2 + (P_2 - P_{2_0}) \frac{1}{q_2 \cdot E_2} \\ \text{» » ganze Seil: } \frac{\Delta l}{l_0} &= (t - t_0) \alpha + (P - P_0) \frac{1}{q \cdot E_s} \end{aligned} \right\} \text{oder nach den Zugkräften aufgelöst: } (29a^*)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{für das erste Metall: } P_1 - P_{1_0} &= \left[\frac{\Delta l}{l_0} - (t - t_0) \alpha_1 \right] q_1 \cdot E_1 \\ \text{» » zweite Metall: } P_2 - P_{2_0} &= \left[\frac{\Delta l}{l_0} - (t - t_0) \alpha_2 \right] q_2 \cdot E_2 \\ \text{» » ganze Seil: } P - P_0 &= \left[\frac{\Delta l}{l_0} - (t - t_0) \alpha_s \right] q \cdot E_s \end{aligned} \right\}$$

oder, wenn für $q \cdot E_s$ der entsprechende Wert aus Gl. (28*) eingesetzt wird:

$$P - P_0 = \left[\frac{\Delta l}{l_0} - (t - t_0) \alpha_s \right] (q_1 \cdot E_1 + q_2 \cdot E_2) \quad (30^*)$$

Es ist ferner $P_1 + P_2 = P$ und $P_{1_0} + P_{2_0} = P_0$, womit man durch Addition der beiden ersten Gl. (29a*) erhält:

$$P - P_0 = \frac{\Delta l}{l_0} (q_1 \cdot E_1 + q_2 \cdot E_2) - (t - t_0) \cdot (q_1 E_1 \alpha_1 + q_2 E_2 \alpha_2) \quad (31^*)$$

Aus den Gl. (30*) und (31*) ergibt sich schliesslich

$$\alpha_s = \frac{q_1 E_1 \alpha_1 + q_2 E_2 \alpha_2}{q_1 E_1 + q_2 E_2} \quad (32^*)$$

(Anhang II folgt.)

Technische Mitteilungen. — Communications de nature technique.

Eine grosse Warmwasseranlage.

621.364 6: 725.21

Das grosse, neue Warenhaus Decré in Nantes verlangte für das Restaurant, die Bar, den Coiffeursalon und die Toiletten täglich 5000 Liter warmes Wasser, das stets die Temperatur von 90° C haben muss. Die Warmwasserverbrauchsstellen sind in den verschiedenen Stockwerken vertikal untereinander gruppiert. Dies führte zur Wahl eines einzigen Warmwasserkessels, der natürlich wirtschaftlicher ist als einige kleine. Er arbeitet nach dem Heisswasserspeicherprinzip, indem er die billige Nachtenergie ausnützt und das warme Wasser aufspeichert.

Wegen seines Volumens war es unmöglich, ihn im Warenhaus selber unterzubringen; er wurde deswegen auf dem Dach aufgestellt, wodurch sich auch eine äusserst einfache Verteilung des warmen Wassers ergab.

Das von der Stadt gelieferte Wasser war seiner Qualität nach für galvanisiertes Eisen gefährlich, und sein Druck zu gross, als dass ein kupferner Druck-Behälter in Frage gekommen wäre; so entschloss man sich, einen Auslaufspeicher aus 6 mm Kupfer, innen verzinkt, mit 5100 l Nutzinhalt und mit einem Leergewicht von 1600 kg zu bauen, der von einem 10 cm dicken, geteerten und mit einer Zementschicht und ölgestrichenem Segeltuch umgebenen Korkmantel isoliert wurde. Dessen drucklose Speisung erfolgt aus einem separaten Becken mit Schwimmer. Eine elektromagnetische Drosselklappe sorgt dafür, dass ausser der Heizzeit kein kaltes Wasser einfließen kann, damit das warme Wasser bis auf den letzten Tropfen tatsächlich warm ausfliesst. Sechs elektrische Heizrohre von je 10 kW Leistung besorgen die Heizung; sie sind im Reservoir unterhalb der Warmwasserausflussöffnung eingebaut, so dass sie stets in mindestens 250 l Wasser tau-