Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 27 (1936)

Heft: 25

Artikel: Zur Begründung der Operatorenrechnung

Autor: Völlm, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1061532

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Diese Eigenschaften machen das Metall vorteilhaft zur Verwendung für Verschalungen von Maschinen, Bürstenbrücken, Käfiganker von Kurzschlussmotoren, Propellerräder, Getriebegehäuse, Schalterdeckel und Traversen, Kondensatorbeläge, Radio- und Telephonapparate und viele andere Gebiete.

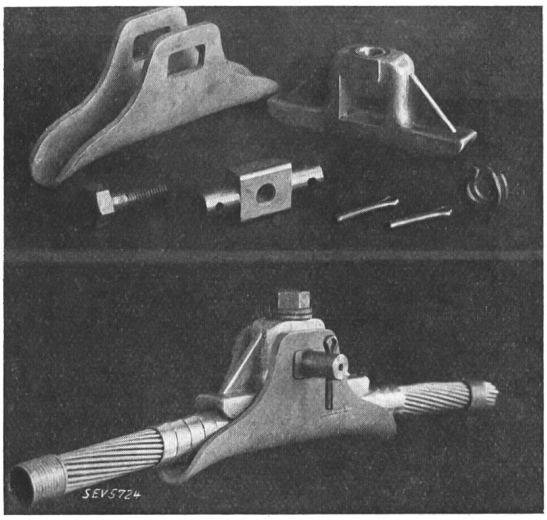

Fig. 14.
Leichte und bewegliche Tragklemme aus Anticorodal für Freileitungen, speziell für Seile aus Aluminium, Aldrey oder Stahl/Aluminium geeignet.

Leider hat die Verwendung von Aluminium, dieses jüngsten aller Metalle, in der Schweiz noch nicht die grosse Bedeutung erlangt wie in andern Ländern, besonders wie in dem devisenschwachen Deutschland [2]). Wenn wir hoffentlich in der Schweiz von Kupferverbot und ähnlichen Beschränkungen, die in Deutschland bestehen, verschont bleiben, dürfen wir doch nicht vergessen, dass das Aluminium das einzige in der Schweiz hergestellte Metall ist, für dessen Herstellung nur ein kleiner Prozentsatz für Rohprodukte ins Ausland geht, der Hauptanteil aber der schweizerischen Wirtschaft und der schweizerischen Arbeiterschaft verbleibt [3]).

Bei den ersten Anwendungen von Aluminium machte man nicht immer nur gute Erfahrungen. Der Fehler lag fast ausnahmslos daran, dass der neue Werkstoff ohne Rücksicht auf seine speziellen Eigenschaften angewendet wurde. Konstruktionen, die sich für Kupfer oder Bronze ergeben hatten, wurden kritiklos auf Aluminium übertragen. Es sei hier nur darauf hingedeutet, dass Aluminium im Freien, wo Feuchtigkeit zutreten kann, nur mit Metallen, mit denen es nicht korrodiert, in Kontakt kommen soll, also ja nicht etwa mit Kupfer oder kupferhaltigen Legierungen. Fast alle Korrosionsschäden sind auf Elementbildung mit Kupfer zurückzuführen.

Die Aluminiumwerke unterhalten Versuchs- und Materialprüflaboratorien und Auskunftsstellen, welche dieses noch so junge Metall nach allen erdenklichen Methoden untersuchen und Auskunft erteilen, damit Fehler nach Möglichkeit vermieden und die guten Eigenschaften richtig ausgenützt werden.

[2]) Siehe Bull. SEV 1934, Nr. 14, S. 393.

[3]) Bei der Exkursion nach Chippis am 9. September 1935 hatte man Gelegenheit, die Herstellung von Blechen, Profilen, Rohren aus diesen Legierungen zu sehen; die Vorstellung über Aluminium, die sich bei vielen noch mit dem Bild einer Pfanne mit verbeultem Boden deckt, hat dabei andern Vorstellungen gründlich Platz gemacht. Red.

Zur Begründung der Operatorenrechnung.

Von *Ernst Völlm*, Zollikon.

517.43

Der Autor gibt eine Uebersicht über die Begründung der Operatorenrechnung durch die Laplacesche Transformation und arbeitet die Voraussetzungen heraus, unter denen die Operatorenrechnung angewendet werden darf. Auf Einzelheiten wird nicht näher eingegangen.

L'auteur donne un aperçu des bases du calcul opératoriel par la transformation de Laplace et déduit les conditions à remplir pour pouvoir appliquer ce mode de calcul, sans entrer dans les détails de la méthode.

1. Einleitung.

Die Operatorenrechnung, ein von Heaviside eingeführtes Verfahren zur Integration von Differentialgleichungen, erfreut sich besonders bei den Elektroingenieuren steigender Beliebtheit. Es existieren bereits einige Lehrbücher über diesen Gegenstand. Wie wertvoll diese von Praktikern verfassten Werke hinsichtlich der gebotenen Anwendungsbeispiele auch sind, so befriedigen sie weder den Ingenieur noch den Mathematiker vollständig.

Heaviside selbst hat die Rechenregeln des nach ihm benannten symbolischen Kalküls zum Teil, von Analogien geleitet, ohne Beweis auf intuitivem Wege gewonnen. Andere Autoren haben die Richtigkeit der Ergebnisse der symbolischen Methode für gewisse Typen von Differentialgleichungen nachgewiesen, indem sie die Uebereinstimmung mit den auf klassischem Wege gewonnenen Lösungen feststellten. Dieses Verfahren ist offenbar unbefriedigend, da es weder neue Ergebnisse noch neue Begründungen bekannter Sätze liefert. Wieder andere, um eine selbständige Begründung bemühte Verfasser beweisen gewisse Sätze und wenden sie dann auf viel allgemeinere Fälle an, die den Voraussetzungen des Satzes nicht genügen.

Einwandfrei begründen und leichtfasslich herleiten lassen sich die bekannten Regeln der Operatorenrechnung, seitdem man weiss, dass sie eng mit der Laplaceschen Transformation zusammenhängt. Der Zweck der folgenden Zeilen ist, die Leser dieser

Zeitschrift mit dieser Begründung bekanntzumachen, nicht aber die Methode selbst bis in alle Einzelheiten darzulegen. Ich hoffe, ihnen durch Unterdrückung alles unnützen und verwirrenden Beiwerkes das Eindringen in die Methode zu erleichtern. Es wird sich ergeben, dass der Heaviside-Kalkül keineswegs nur bei Differentialgleichungen der Elektrotechnik angewandt werden kann.

2. Der symbolische Weg, erörtert an einem einfachen Beispiel.

Ist für eine gesuchte Funktion Y einer Unabhängigen x eine Differentialgleichung gegeben, so besteht der symbolische Weg darin, die Ableitungszeichen $\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, \ldots \frac{d^n}{dx^n}$ fälschlicherweise aufzufassen als Potenzen $p, p^2, \ldots p^n$ eines Parameters p, für die Ableitungen also zu setzen:

$$\frac{dY}{dx} = p \cdot Y, \quad \frac{d^2Y}{dx^2} = p^2 \cdot Y \ldots, \quad \frac{d^nY}{dx^n} = p^n \cdot Y \qquad (1)$$

Durch diesen Ersatz verschwinden die Ableitungen und wenn die Differentialgleichung weiter keine Funktionen von x enthielt, so ist aus ihr eine gewöhnliche Gleichung zwischen Y und p geworden, die Y als Funktion von p liefert. In Wirklichkeit ist Y eine Funktion von x und es fragt sich, ob auf irgendeine Weise aus der Kenntnis von $Y(p)$ auf $Y(x)$ geschlossen werden kann.

Wir betrachten als Beispiel die Differentialgleichung [1])

$$L \cdot \frac{dY}{dx} + RY = 1$$

des Stromes in einem Stromkreis, bestehend aus einem Widerstand R und einer Selbstinduktion L in Reihe, an den die Spannung 1 angelegt wird. Symbolisch aufgefasst, lautet sie

$$L\,p\,Y + R\,Y = 1$$

und die Funktion $Y(p)$ wird

$$Y(p) = \frac{1}{Lp + R}$$

Um von hier aus zu der Funktion von x zu gelangen, kann man mit den Symbolikern Y nach negativen Potenzen von p entwickeln und sie als Umkehrungen der Differentiation, als Integrale auffassen, also etwa setzen:

$$\frac{1}{p} = \int_0^x dx = x, \qquad \frac{1}{p^2} = \int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2!}$$

$$\frac{1}{p^n} = \int_0^x \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,dx = \frac{x^n}{n!}$$

[1]) John R. Carson, Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung, erweiterte deutsche Bearbeitung von Ollendorf und Pohlhausen, Springer 1929.

Auf diese Weise erhält man

$$Y = \frac{1}{Lp\left(1 + \frac{R}{Lp}\right)} = \frac{1}{Lp}\left[1 - \frac{R}{Lp} + \frac{R^2}{L^2p^2} - \ldots + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{Lp} - \frac{R}{(Lp)^2} + \frac{R^2}{(Lp)^3} - \ldots + \ldots$$

$$= \frac{1}{R}\left[\frac{R}{Lp} - \left(\frac{R}{Lp}\right)^2 + \left(\frac{R}{Lp}\right)^3 - \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{R}\left[\frac{Rx}{L} - \left(\frac{Rx}{L}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left(\frac{Rx}{L}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} - \ldots\right]$$

Bemerkt man, dass abgesehen vom Anfangsglied der Klammerausdruck entgegengesetzt gleich der Exponentialreihe vom Argument $-\frac{Rx}{L}$ ist, so hat man als gesuchtes Integral

$$Y = \frac{1}{R}\left[1 - e^{-\frac{Rx}{L}}\right]$$

Integriert man die vorgelegte Differentialgleichung auf wohlbekanntem klassischem Wege, so findet man, dass der symbolische Weg das Integral liefert, welches für $x = 0$ verschwindet. Nur dieser Vergleich rechtfertigt bis auf weiteres das symbolische Verfahren und es fragt sich, ob es auch in allgemeineren, näher zu umschreibenden Fällen zulässig ist. Um dies zu untersuchen, müssen wir uns mit der Laplace-Transformation beschäftigen.

3. Die Laplace-Transformation.

Ist eine Funktion $Y(x)$ gegeben im Intervall $0 < x < \infty$, so kann man ihr sogenanntes Laplace-Integral betrachten, nämlich das Gebilde $\int_0^\infty e^{-px} Y(x)\,dx$ wobei p die Rolle eines willkürlichen Parameters spielt. Unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen wird dieses Integral einen Sinn haben beispielsweise für alle $p > 0$. Zu diesen Voraussetzungen, die wir im übrigen nicht näher erörtern, gehört offenbar eine Vorschrift, wonach $Y(x)$ nicht allzu stark unendlich wird, wenn x gegen unendlich strebt. Dann ist das genannte Integral eine Funktion von p (nicht von x), die wir mit $y(p)$ bezeichnen, so dass wir schreiben können:

$$y(p) = \int_0^\infty e^{-px}\, Y(x)\,dx \qquad (2)$$

Durch diese Formel wird einer im Intervall $0 < x < \infty$ gegebenen Funktion $Y(x)$ eine bestimmte Funktion $y(p)$ zugeordnet, etwa im Intervall $0 < p < \infty$. Ist umgekehrt $y(p)$ gegeben, so ist durch die Integralgleichung (2) die Funktion $Y(x)$ eindeutig bestimmt, natürlich wiederum unter gewissen Voraussetzungen über die Funktion $y(p)$. Wir nennen $y(p)$ die Transformierte von $Y(x)$ und

die Funktion $Y(x)$ soll die Primitive von $y(p)$ heissen. Durch die Formel (2) werden also Funktionen $Y(x)$ als Primitive und $y(p)$ als Transformierte umkehrbar-eindeutig einander zugeordnet.

Von den Eigenschaften der Laplace-Transformation erwähnen wir zuerst ihre Additivität. Sind nämlich $y_1(p)$ und $y_2(p)$ die Transformierten von $Y_1(x)$ und $Y_2(x)$, so sieht man sofort durch Einsetzen in (2), dass $y_1(p) + y_2(x)$ die Transformierte von $Y_1(x) + Y_2(x)$ ist. Ferner ist offenbar $ay(p)$ die Transformierte von $aY(x)$, wenn a eine Konstante ist. Der Primitiven $aY_1(x) + bY_2(x)$ entspricht also die Transformierte $ay_1(p) + by_2(p)$.

Leitet man die Formel (2) nach p ab, so findet man

$$y'(p) = -\int_0^\infty e^{-px}\, xY(x)\, dx \qquad (3)$$

$$y^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-px}\, x^n\, Y(x)\, dx$$

Nehmen wir unter dem Integralzeichen die Ableitung $Y'(x)$ an Stelle von $Y(x)$, so erhalten wir durch partielle Integration

$$\int_0^\infty e^{-px}\, Y'(x)\, dx = [e^{-px}\, Y]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px}\, Y\, dx$$

$$= p\int_0^\infty e^{-px}\, Y\, dx - Y(0)$$

Denn für $x = \infty$ hat der Klammerausdruck den Wert 0, wenn die Transformierte von Y existiert. Setzen wir jetzt statt $Y'(x)$ höhere Ableitungen unter das Zeichen, so können wir sie mittels der eben hingeschriebenen Formel schrittweise ersetzen durch die jeweils vorhergehende und wir gelangen zur folgenden grundlegenden Formel:

$$\int_0^\infty e^{-px}\, Y^{(n)}(x)\, dx = p^n \int_0^\infty e^{-px}\, Y(x)\, dx$$

$$- [p^{n-1}\, Y(0) + p^{n-2}\, Y'(0) + \ldots + Y^{(n-1)}_{(0)}] \qquad (4)$$

Im ganz besonderen Fall verschwindender Anfangsbedingungen

$$Y(0) = Y'(0) = Y''(0) = \ldots Y^{(n-1)}_{(0)} = 0$$

hat man

$$\int_0^\infty e^{-px} Y^{(n)}(x)\, dx = p^n \int_0^\infty e^{-px}\, Y(x)\, dx = p^n \cdot Y(p)$$

Dann ist also die Transformierte der n-ten Ableitung $Y(x)$ gleich dem p^n-fachen der Transformierten $y(p)$ von $Y(x)$. Der Zusammenhang mit dem symbolischen Verfahren — vgl. Formel (1) — springt in die Augen. Er soll im nächsten Abschnitt näher beleuchtet werden.

Da $\lim\limits_{x=\infty} e^{-px} = 0$ für $p > 0$, wird

$$\int_0^\infty e^{-px}\, dx = \left[-\frac{e^{-px}}{p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p}$$

Setzt man $p + \lambda$ an Stelle von p, so wird

$$\int_0^\infty e^{-px} \cdot e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{p+\lambda}$$

Beide Formeln sind auch gültig, wenn p bzw. $p + \lambda$ zwar komplex, aber von positivem Realteil sind. Diese Voraussetzung sichert das Verschwinden der Exponentialfunktion in eckiger Klammer für $x = \infty$.

Weiter findet man durch partielle Integration, dass

$$\int_0^\infty e^{-px} x^n\, dx = \left[-\frac{e^{-px}\, x^n}{p}\right]_0^\infty + \frac{n}{p}\int_0^\infty e^{-px}\, x^{n-1}\, dx,$$

und da die eckige Klammer für $x = 0$ und $x = \infty$ verschwindet, erhält man schrittweise

$$\int_0^\infty e^{-px} x^n\, dx = \frac{n}{p}\int_0^\infty e^{-px} x^{n-1}\, dx = \ldots$$

$$= \frac{n!}{p^n}\int_0^\infty e^{-px}\, dx = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Setzt man $p + \lambda$ für p, so wird

$$\int_0^\infty e^{-px}\, e^{-\lambda x}\, x^n\, dx = \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}$$

Auch diese Formel bleibt richtig, wenn der Realteil eines komplexen $p + \lambda$ positiv bleibt. Wir haben also zusammenfassend folgende zusammengehörige Funktionspaare

Primitive	$Y(x) = 1$	Transformierte	$y(p) = \frac{1}{p}$	
»	$Y(x) = e^{-\lambda x}$	»	$y(p) = \frac{1}{p+\lambda}$	(5)
»	$Y(x) = e^{-\lambda x} x^n$	»	$y(p) = \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}$	

Sind allgemein $Y(x)$ und $y(p)$ einander entsprechend, so hat man nach (3) folgende zusammengehörige Paare

Primitive	$Y(x)$	Transformierte	$y(p)$	
»	xY	»	$-y'$	(6)
»	x^2Y	»	$+y''$ usw.	

Weiter ist nach Formel (4) $py - Y(0)$ die Transformierte von $Y'(x)$ und $p^2y - pY(0) - Y'(0)$ die Transformierte von $Y''(x)$. Nach Formel (3) muss man die Primitiven mit x, x^2 usw. multiplizieren und die Transformierten nach $-p$ fortgesetzt ableiten, um wieder Paare entsprechender Funktionen zu bekommen. Es entsprechen deshalb einander

Primitive	Y'	Transformierte	$py-Y(0)$
»	xY'	»	$-y-py'$
»	x^2Y'	»	$2y'+py''$ (6)
. . . . .		. . . . .	
»	Y''	»	$p^2y-pY(0)-Y'(0)$
»	xY''	»	$-p^2y'-2py+Y(0)$
»	x^2Y''	»	$p^2y''+4py'+2y$

4. Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen.

Wir betrachten zunächst als Beispiel die in Abschnitt 2 symbolisch gelöste Differentialgleichung

$$L\frac{dY}{dx}+RY=1$$

der wir die Anfangsbedingung $Y(0)=A$ auferlegen. Da nach (4) und (5) den Primitiven Y, $\frac{dY}{dx}$ und 1 die Transformierten y, $py-A$ und $\frac{1}{p}$ entsprechen, wird aus ihr, wenn wir beiderseits die Laplace-Transformation anwenden, die algebraische Gleichung

$$Lyp-LA+Ry=\frac{1}{p}$$

die, nach y aufgelöst,

$$y=\frac{pA+1/L}{p(p+R/L)} \tag{7}$$

ergibt.

Die erste Ableitung wird hier nicht symbolisch, sondern wirklich durch das p-fache der Funktion selbst ersetzt. Aber zugleich tritt an Stelle der Primitiven die Transformierte. In der Tat wird ja eine Differentialgleichung, trotz Beibehaltung der Bezeichnung, nach dem Symbolisieren eine neue Funktion der neuen Variablen p definieren. In den Fällen, wo der symbolische Weg zum Ziele führt, wird die an dieser Stelle begangene Konfusion wettgemacht durch eine weitere «symbolische» Handlung, den Uebergang von der Funktion von p zur Funktion von x. Weiter ist zu beachten, dass durch die Transformation der Ableitung $\frac{dY}{dx}$ die Anfangsbedingung $Y(0)=A$ in die transformierte Gleichung eingeht. Enthielte die Differentialgleichung noch höhere Ableitungen mit konstanten Koeffizienten, so würde kraft Formel (4) in die transformierte Gleichung ein Polynom von p eingehen, dessen Koeffizienten von den Anfangsbedingungen abhängen. Beim symbolischen Weg sind diese Anfangsbedingungen implizite als *0* angenommen. Zieht man noch in Betracht, dass beim Symbolisieren der obigen Differentialgleichung die Konstante 1 unverändert bleibt, während sie beim Transformieren in $\frac{1}{p}$ übergeht, so kann man sagen, dass die aus der symbolisierten Gleichung $LYp+RY=1$ gewonnene Funktion $Y=\frac{1}{Lp+R}$ das p-fache der durch Transformation erhaltenen Funktion $y(p)$ ist, wenn die Anfangsbedingung 0 ist.

Nachdem wir durch Transformation der Differentialgleichung y als Funktion von p bestimmen konnten, haben wir jetzt noch zur bekannten Funktion (7) die Primitive zu suchen. Mit Rücksicht auf die additive Eigenschaft der Transformation liegt es nahe, sie zu diesem Zwecke in Partialbrüche zu zerlegen. In bekannter Weise erhalten wir dabei

$$y=\frac{1}{Rp}+\frac{A-1/R}{p+R/L}$$

Nach (5) kennen wir die Primitiven beider Summanden und haben darum

$$Y(x)=\frac{1}{R}+\left(A-\frac{1}{R}\right)e^{-\frac{Rx}{L}}$$

Setzt man hier $A=0$, so erscheint die Lösung des Abschnittes 2 als Sonderfall.

Der hier befolgte Lösungsgang lässt sich allgemein wie folgt schildern: Gegeben ist eine Differentialgleichung der Funktion Y vom Argument x. Durch Transformation wird aus ihr möglicherweise eine einfachere und lösbare Gleichung zwischen der Transformierten und dem Argument p. Insbesondere wird die transformierte Gleichung dank Formel (4) keine Ableitungen mehr enthalten, wenn die Ableitungen nur als Summanden mit konstanten Koeffizienten auftreten. Dann kann man diese gewöhnliche Gleichung zwischen y und p nach y auflösen und hat $y(p)$ als bekannte Funktion von p gefunden. Die transformierte Gleichung kann auch wieder eine Differentialgleichung der transformierten Funktion $y(p)$ sein. Dies wird z. B. der Fall sein, wenn die gegebene Differentialgleichung linear ist mit Koeffizienten von der Form $K\cdot x^n$, wie Tabelle (6) zeigt. Sind die Koeffizienten oder die ganze Differentialgleichung komplizierter, so wird die Transformation möglicherweise undurchführbar und man wird auf die Methode verzichten. Es ist aber zu beachten, dass die symbolische Methode schon in Fällen versagen kann, wo die Transformationsmethode anwendbar bleibt. Hat etwa die gegebene Differentialgleichung von x abhängige Funktionen als Koeffizienten, so enthält die symbolisierte Gleichung ausser der Funktion Y und p auch noch x und es ist durchaus unklar, wie eine solche Gleichung symbolisch weiter zu behandeln ist.

In allen Fällen, wo die Transformation gelingt, folgt als zweiter Schritt die Bestimmung der Funktion $y(p)$, was in den oben betrachteten Fällen auf die Auflösung einer gewöhnlichen Gleichung oder einer neuen Differentialgleichung hinausläuft. Jetzt verbleibt noch die Aufgabe, zu der bekannten Transformierten $y(p)$ die zugehörige Primitive $Y(x)$ zu bestimmen. Ihre Lösung, nämlich die Auflösung der Integralgleichung (2), wird, wie das gewöhnliche Integrieren, manchmal durch die additive Eigenschaft der Laplace-Transformation erleichtert. Denn ist $y(p)$ eine Summe einfacherer Funktionen

von p, so genügt es, die Primitiven der einzelnen Summanden zu bestimmen, um in deren Summe die Primitive von $y(p)$ zu besitzen. Es kommt jetzt darauf an, eine Sammlung elementarer Funktionen $F(x)$ anzulegen, für die man $\int_0^\infty e^{-px} F(x)\,dx$ zu berechnen weiss. Jedes Integral dieser Art verschafft uns die Kenntnis einer Funktion und ihrer Transformierten, bzw. ihrer Primitiven. Einige Beispiele solcher zusammengehöriger Funktionspaare haben wir unter (5) im Abschnitt 3 kennen gelernt. Umfangreichere Verzeichnisse solcher Paare finden sich am Schlusse des zitierten Carsonschen Buches und in dem Werk von Pierre Humbert: Le calcul symbolique (Verlag Hermann & Co., Paris 1934), das eine klare, leichtfassliche und knappe Darstellung der symbolischen Rechenregeln gibt.

Die in diesem Abschnitt dargelegte Lösung des einfachen Beispiels ist eine Anwendung des «expansion theorem» von Heaviside, das im Lichte der Laplace-Transformation auf natürlichste Weise begründet werden kann. Es bezieht sich auf lineare homogene Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, also auf Gleichungen von der Form

$$a_n Y^{(n)}(x) + a_{n-1} Y^{(n-1)}(x) \dots + a_1 Y'(x) + a_0 Y(x) = 0 \tag{8}$$

Durch Laplace-Transformation wird aus ihr bei Anwendung von Formel (4)

$$a_n p^n \cdot y(p) + a_{n-1} p^{n-1} y(p) + \dots + a_1 p\, y(p) + a_0\, y(p) - P_{n-1}(p) = 0$$

wo $P_{n-1}(p)$ ein Polynom höchstens $(n\text{-}1)$-ten Grades in p ist, das von den Anfangsbedingungen herrührt. Löst man nach y auf, so erhält man

$$y(p) = \frac{P_{n-1}(p)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Nun lässt sich eine solche rationale Funktion, deren Nennergrad den Zählergrad um mindestens 1 übertrifft, in bekannter Weise in Partialbrüche zerlegen. Sind $p_1, p_2, \dots p_n$ die einfachen Nullstellen des Nenners, so hat die Zerlegung die Form

$$y(p) = \frac{\text{Const}}{p - p_1} + \frac{\text{Const}}{p - p_2} + \dots + \frac{\text{Const}}{p - p_n}$$

Ist eine Wurzel p_j 2- oder k-fach, so treten noch Summanden $\frac{\text{Const}}{(p-p_j)^2}$, $\frac{\text{Const}}{(p-p_j)^k}$ auf. Zu jedem dieser einzelnen Summanden wissen wir die Primitive zu finden. Nach (5) wird also im Falle nur einfacher Nullstellen des Nenners die Differentialgleichung (8) als Lösung eine Summe von Exponentialfunktionen haben

$$Y(x) = \sum \text{Const}\; e^{p_j x} \tag{9}$$

Die p_j dürfen auch komplex sein. Im Falle mehrfacher Nullstellen enthält die Lösung noch Summanden von der Form Const. $e^{p_j x} \cdot x$, Const. $e^{p_j x} \cdot x^2$ usw.

Das klassische Integrationsverfahren für die Differentialgleichung (8) besteht bekanntlich darin, die Lösung e^{px} zu probieren, was zu einer algebraischen Gleichung für p führt. Die so gefundene allgemeine Lösung hat natürlich die Form (9). Abgesehen vom Wert des Transformationsverfahrens als neuer, selbständiger Integrationsprozess, kann es im Falle einfacher Anfangsbedingungen Rechenvorteile bieten, da diese Bedingungen sofort berücksichtigt werden.

Die Differentialgleichung (8) kann nach dem Transformationsverfahren auch dann behandelt werden, wenn rechts statt der Null eine Funktion von x steht, nur muss diese Funktion mittransformiert werden. Es ist möglich, dass dann $y(p)$ keine rationale Funktion mehr ist.

5. Reihenentwicklungen.

Wir haben im zweiten Abschnitt eine Differentialgleichung symbolisch und mittels Reihenentwicklungen integriert. Den Wahrheitsgehalt dieses Verfahrens können wir abschätzen, indem wir von der wiederholt benützten Formel (4) ausgehen. Sie kann geschrieben werden:

$$p^n \int_0^\infty e^{-px}\, Y(x)\, dx = Y(0)\, p^{n-1} + Y'(0)\, p^{n-2} + \dots + Y^{(n-1)}_{(0)} + \int_0^\infty e^{-px}\, Y^{(n)}_{(x)}\, dx$$

Dividieren wir beiderseits durch p^{n-1} und beachten wir, dass das Integral zur Linken die Transformierte $y(p)$ von $Y(x)$ ist, so wird

$$p\, y(p) = \left[Y(0) + Y'(0) \cdot \frac{1}{p} + \dots + Y^{n-1}_{(0)} \cdot \frac{1}{p^{n-1}} \right] + \frac{1}{p^{n-1}} \int_0^\infty e^{-px}\, Y^{(n)}_{(x)}\, dx$$

Lassen wir n gegen ∞ streben, so wird aus dem Ausdruck in eckiger Klammer eine unendliche Reihe. Strebt dabei von einem genügend grossen p an das Restglied $\frac{1}{p^{n-1}} \int_0^\infty e^{-px}\, Y^{(n)}_{(x)}\, dx$ gegen 0, so haben wir für die Funktion $py(p)$ die Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{p}$:

$$p\, y(p) = Y(0) + Y'(0) \cdot \frac{1}{p} + Y''(0) \cdot \frac{1}{p^2} + \dots$$

Unsere Aufgabe ist, zu der durch Transformation einer Differentialgleichung gewonnenen bekannten Funktion $y(p)$ die Primitive $Y(x)$ zu bestimmen.

Wenn nun die ebenfalls bekannte Funktion py in eine Reihe von Potenzen von $\frac{1}{p}$ entwickelbar ist, die für genügend grosse p konvergiert, so sind ihre Koeffizienten eindeutig bestimmt und vermöge der eben hingeschriebenen Formel sind sie gleich den Anfangswerten $Y(0)$ aber nur falls das oben hingeschriebene Restglied für genügend grosse p gegen 0 strebt, wenn n gegen ∞ geht. Stellt man jener Entwicklung jene der Primitiven nach Potenzen von x gegenüber:

$$Y(x) = Y(0) + Y'(0)\frac{x}{1} + Y''(0)\frac{x^2}{2!} + Y'''(0)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

so erkennt man, dass aus der Entwicklung von $py(p)$ nach Potenzen von $\frac{1}{p}$ jene der Primitiven nach Potenzen von x hervorgeht, indem man in der ersten $\frac{1}{p^n}$ ersetzt durch $\frac{x^n}{n!}$.

Wie gesagt ist dieses Verfahren zulässig, falls die Entwicklung von py für genügend grosse p konvergiert und das Restglied gegen 0 strebt für $n = \infty$. Schwierigkeiten macht besonders die zweite Voraussetzung, da sie sich auf die gesuchte Funktion bezieht. Soll deshalb eine Differentialgleichung durch Reihen gelöst werden, so wird man py nach Potenzen von $\frac{1}{p}$ entwickeln und dann $\frac{1}{p^n}$ durch $\frac{x^n}{n!}$ ersetzen. Ist die Reihe py für genügend grosse p konvergent, so wird die von x abhängige Reihe für jedes x konvergieren (Cauchy-Hadamardscher Satz über den Konvergenzradius), also eine Funktion $Y(x)$ definieren, von der man nachzuweisen hat, dass für sie das Restglied gegen 0 strebt. Dann ist man sicher, dass $Y(x)$ der vorgelegten Differentialgleichung genügt. Ohne sich um das Restglied zu kümmern, kann man aber auch direkt durch Einsetzen der Reihe $Y(x)$ in die Differentialgleichung nachprüfen, ob sie eine Lösung ist. So wird man insbesondere verfahren, wenn $Y(x)$ für grosse $|x|$ nicht konvergiert, wenn also $py(p)$ eine divergente Entwicklung hat.

6. Anwendung auf partielle Differentialgleichungen.

Die Unbekümmertheit gewisser Symboliker (vgl. das zitierte Werk von Carson) in der Uebertragung ihrer Rechenregeln auf partielle Differentialgleichungen ist unzulässig. Dagegen kann man ohne weiteres die Laplace-Transformation auf solche Gleichungen anwenden. Das Verfahren sei an einem Beispiel erörtert [2]).

$$R\,I(x,t) = -\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \qquad C\cdot\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial I(x,t)}{\partial x}$$

[2]) Carson, a. a. O. S. 46/48. Man vergleiche die dortige undurchsichtige, mehreren Einwänden rufende Behandlung mit der obigen zwanglosen und klaren Ableitung. Insbesondere beachte man die unzulässige Behandlung der Anfangs- und Randbedingungen bei Carson.

sind die Differentialgleichungen eines unendlichlangen, induktionsfreien Kabels mit der Längenkoordinate $0 < x < \infty$ und der Zeit t als Unabhängigen. I ist der Strom, U die Spannung, R der verteilte Widerstand und C die verteilte Kapazität. Das System sei zu integrieren mit den Randbedingungen $U(0,t) = 1$, $\lim U(x,t) = 0$ gleichmässig für $x = \infty$ und der Anfangsbedingung $U(x,0) = 0$.

Wir wenden die Laplace-Transformation bezüglich der Zeit t an und bezeichnen die Transformierten mit $i(x,p)$ bzw. $u(x,p)$. Wegen (4) ist die Transformierte von $\frac{\partial U}{\partial t}$ gleich $pu(x,p) - U(x,0)$ und da $U(x,0) = 0$ ist, hat man das transformierte System

$$R\,i = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad p\cdot C\cdot u = -\frac{\partial i}{\partial x}$$

mit den transformierten Bedingungen

$$u(0,p) = \int_0^\infty e^{-pt}\cdot 1\cdot dt = \frac{1}{p}$$

$$u(\infty,p) = \lim_{x=\infty}\int_0^\infty U(x,t)\,e^{-pt}\,dt = 0$$

Indem man die beiden Gleichungen nach x ableitet, kann man je eine der Funktionen eliminieren und das Ergebnis ist:

$$C\,R\,p\,i = \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \qquad C\,R\,p\,u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Beide Differentialgleichungen sind zweiter Ordnung und enthalten nur eine Unabhängige x. Das allgemeine Integral der zweiten ist bekanntlich

$$u(x,p) = D_1(p)\,e^{x\sqrt{CRp}} + D_2(p)\,e^{-x\sqrt{CRp}}$$

mit Integrationskonstanten $D_1(p)$ und $D_2(p)$, die von p abhängen können. Mit Rücksicht auf die zweite Randbedingung muss $D_1 = 0$ sein und die erste zeigt, dass $D_2(p) = \frac{1}{p}$ ist. So bekommt man

$$u(x,p) = \frac{1}{p}\cdot e^{-x\sqrt{CRp}}$$

und

$$i(x,p) = -\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{p}\sqrt{CRp}\cdot e^{-x\sqrt{CRp}}$$

oder

$$i(x,p) = \sqrt{\frac{C}{Rp}}\cdot e^{-x\sqrt{CRp}}$$

Wir haben noch die zugehörige Primitive zu suchen. Diese Aufgabe ist sofort gelöst, wenn man weiss, dass [3])

$$\int_0^\infty \frac{e^{-pt}\,e^{-\frac{\lambda}{t}}\,dt}{\sqrt{\pi t}} = \frac{e^{-2\sqrt{\lambda p}}}{\sqrt{p}}$$

[3]) Vgl. Carson, Integraltafel am Schluss des Werkes, Beispiel (g).

Setzen wir $x\sqrt{CRp} = 2\sqrt{\lambda p}$, also $\lambda = \frac{x^2 CR}{4}$, so finden wir die Primitive

$$I(x, t) = \sqrt{\frac{C}{\pi R}} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2 CR}{4}}}{\sqrt{t}}$$

Man beachte die bedeutende Vereinfachung der Aufgabe infolge der Transformation, die die partiellen Differentialgleichungen mit zwei Unabhängigen in gewöhnliche mit einer überführt.

7. Schlussbemerkungen.

Wenn es zwar gelingt, die transformierte Gleichung zu lösen, nicht aber zu $y(p)$ die Primitive $Y(x)$ zu bestimmen, so wird man versuchen, wenigstens das asymptotische Verhalten von $Y(x)$ aufzuklären, d. h. das Verhalten der Funktion für x in der Umgebung von 0 oder ∞. Solche Untersuchungen funktionentheoretischer Natur sind ziemlich subtil. Ohne auf sie einzugehen, weisen wir darauf hin, dass sie besonders von G. Doetsch gefördert wurden, dem auch um die Aufdeckung des Zusammenhanges zwischen Symbolismus und Laplace-Transformation besondere Verdienste zukommen [4]). Dadurch wurde der Symbolismus seiner Mystik entkleidet, auf solide Grundlage gestellt und zugleich verallgemeinert auf Fälle nicht verschwindender Anfangsbedingungen. Besser als vom symbolischen Verfahren wird man von der Transformationsmethode sprechen. Sie ist eine Methode unter vielen zur Auflösung von Differentialgleichungen. Einer ihrer Vorteile besteht darin, dass sie die durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmte Lösung ohne den Umweg über das allgemeine Integral liefert. Dass sie Aufgaben wesentlich zu vereinfachen gestattet, dürfte besonders das Beispiel von Abschnitt 6 gezeigt haben.

[4]) G. Doetsch, Die Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode, Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 43. Bd. 1934, Heft 9/12, S. 238 u. f.

G. Doetsch, Sätze von Tauberschem Charakter im Gebiet der Laplace- und Stieltjes-Transformation, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, 1930. X.

Ueber die maximale mechanische, thermische und elektrische Belastbarkeit von Bimetallen.

Von *Enrico Erni*, Solothurn.

621.315.554

Der Verfasser untersucht die Spannungsverhältnisse im Innern eines Bimetallstreifens, leitet Gesichtspunkte für die Wahl der Metallegierungen ab und berechnet schliesslich die höchstzulässige Temperatur, Kraft und Stromstärke, die das Bimetall ohne Schaden noch zu ertragen vermag.

L'auteur étudie les conditions de tension à l'intérieur d'une lame bimétallique, en déduit des considérations pour le choix des alliages et calcule les températures, efforts et courants maximum que peut supporter la lame sans subir aucun dommage.

Bimetall wird im Apparatebau gerne zur Messung und Steuerung thermisch bedingter Vorgänge verwendet. Die Genauigkeit hängt in erster Linie von der Reproduktion des Nullpunktes ab. Darunter versteht man die Fähigkeit, immer wieder nach erfolgter Belastung und Entlastung, in den Nullpunkt zurückzukehren. Sie wird verbessert durch thermische Behandlung vor dem Einbau (Alterung) und durch Vermeidung von überelastischen Deformationen während des Betriebes.

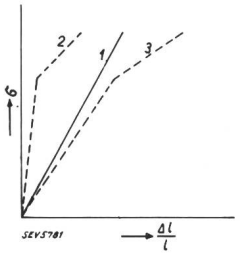

Fig. 1.
1 federnde Dehnung.
2 bleibende „
3 gesamte „

In jedem Bimetallkatalog sind Angaben zu finden, wie diese künstliche Alterung durchzuführen ist. Sie bezweckt, durch Ausglühen eine Stabilisierung des Zustandes und der elastischen Eigenschaften, die sonst während des Betriebes stattfinden würde [1]). Empfehlenswert ist auch, das Bimetall wiederholt mechanischen Beanspruchungen, die praktisch im Betrieb vorkommen, zu unterwerfen. Dadurch bleiben nur die federnden Deformationen wirksam (Fig. 1). Wie wichtig eine fachgemässe Alterung ist, lässt sich im Laufe dieser Untersuchung zeigen.

Es ist selbstverständlich, dass die Temperatur nicht nur eine Durchbiegung des Bimetalls, sondern auch innere Spannungen hervorruft, deren Maximalwerte, wie bereits betont, die zulässigen Grenzen nicht überschreiten dürfen.

Sie sollen nun unter folgenden Annahmen berechnet werden:

1. dass auf das Bimetall nur die Temperatur wirkt,
2. dass das Bimetall als einen einseitig eingespannten Balken angesehen wird,
3. dass das Bimetall bei Raumtemperatur (20° C) spannungslos und gerade ist, d. h. dass alle Fasern der beiden Metallschichten gleiche Länge besitzen,
4. dass vor und nach der Deformation ebene Querschnitte eben bleiben,
5. dass die elastische Linie durch einen Kreisbogen ersetzt werden darf [2]),
6. dass das Hooksche Gesetz gültig ist.

Es bedeuten:

die Indices 1 und 2 die Zugehörigkeit der betreffenden Grössen zu den Komponenten mit dem grössern, bzw. mit dem kleineren Wärmeausdehnungskoeffizienten,

a die Länge der neutralen Schichten der Komponenten 1 und 2 vor den Erwärmungen,

[1]) M. J. Colonna-Ceccaldi: Note sur l'utilisation des bilames comme moteur thermique. Electricité, mai 1936.

[2]) Acieries d'Imphy. Note sur les bilames de précision.