Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 26 (1935)

Heft: 22

Artikel: Ueber die Verwendung sogenannter Operatoren in der Theorie der Wechselströme

Autor: Boveri, Th.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1060342

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ueber die Verwendung sogenannter Operatoren in der Theorie der Wechselströme.

Von *Th. Boveri*, Baden.

517.433 : 621.3.025

Der Autor stellt sich die Aufgabe, auf Grund einschlägiger, am Schlusse angegebener Literatur eine kurze Darstellung der besonders in Amerika viel angewendeten Rechnung mit Operatoren anstatt mit Differentialquotienten zu geben und ihre Anwendung auf die Behandlung von Schwingungsvorgängen zu zeigen. Er hofft, dass der Ingenieur darnach die Methode anwenden könne, ohne unbedingt die grundlegenden Arbeiten studieren zu müssen. Dies erfordert allerdings die Mitteilung von Beweisen für alle wichtigen Ausdrücke, selbst wenn dabei volle mathematische Strenge dem Autor nicht möglich war, denn das stark abgekürzte, beinahe stenographische Verfahren der Operatorenrechnung erschwert an sich die Beurteilung, ob eine bestimmte Formel für den gerade vorliegenden Fall auch wirklich passt. Nur durch die Kenntnis der Beweise, wenigstens in ihren Grundzügen, kann das unbedingt nötige Sicherheitsgefühl erzeugt werden.

L'auteur se propose d'exposer brièvement, en se basant sur la documentation citée à la fin, une méthode de calcul fort usitée en Amérique et qui se sert d'opérateurs au lieu de dérivées, puis en donne des applications aux phénomènes d'oscillation. Il espère que cela permettra à l'ingénieur de se servir de cette méthode sans devoir nécessairement étudier les travaux fondamentaux. Pour cela l'auteur a cependant dû donner des démonstrations pour toutes les expressions importantes, même lorsqu'il lui a été impossible de s'en tenir rigoureusement aux mathématiques, car la méthode abrégée, presque sténographique, du calcul opératoriel ne permet qu'assez difficilement de se rendre compte si telle ou telle formule doit s'appliquer au cas envisagé. Seule la connaissance au moins élémentaire des démonstrations est capable de donner le sentiment de sûreté indispensable.

I.

Unter einem Operator versteht man in der Mathematik ein Symbol p, welches man wie einen Faktor vor ein anderes Symbol x setzt, wobei aber px nicht eine Multiplikation, sondern eine Differentiation, und zwar in unserem Falle nach der Zeit, bedeuten soll. Wir schreiben deshalb

$$p\,x = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}; \qquad p^2 x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} \quad \text{etc.}$$

und unter Umkehrung der Operation

$$\frac{x}{p} = \int x \,\mathrm{d}\,t$$

Ob man jede Differentiation nach der Zeit so darstellen darf, steht von vornherein nicht fest; man überzeugt sich aber zunächst leicht, dass es jedenfalls bei der Exponentialfunktion zulässig ist, denn es gilt ja

$$x = Ae^{pt}; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p\,Ae^{pt} = px;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = p^2 Ae^{pt} = p^2 x$$

Da pt eine reine Zahl sein muss, hat p die Dimension einer Frequenz.

Allgemein prüft man die Zulässigkeit der Operatorenschreibweise dadurch, dass man einmal alle durch die p vorgeschriebenen Differentiationen und Integrationen wirklich anschreibt, bzw. ausführt und parallel dazu mit den p nach den Regeln der Algebra rechnet. Bei sinngemässer Umdeutung der p von gewöhnlichen Zahlwerten in Differentialoperatoren im Schlussresultat der zweiten Methode muss sich derselbe Ausdruck wie nach der ersten Methode ergeben. Umgekehrt können auch, um dieses Resultat zu erreichen, eventuell auftretenden, komplizierten Operator-Ausdrücken bestimmte, allgemein gültige Bedeutungen beigelegt werden. Es ergibt sich [vgl. z. B. Sokolnikoff [1])], dass die Operatorenschreibweise bei linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung zulässig ist, wenn sie konstante Koeffizienten haben. Eine solche Gleichung hat den Typus

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}\,t^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n x = \mathrm{f}(t) \quad (1)$$

wobei die a Konstanten sind. Dieselbe Gleichung, jedoch mit $\mathrm{f}(t) = 0$ heisst die zugehörige homogene Gleichung.

In Operatorenform schreibt sich Gl. (1)

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n) \cdot x = \mathrm{f}(t) \quad (2)$$

Für die homogene Gleichung kann dieser Ansatz sofort gerechfertigt werden, wenn man in Gl. (1) als Lösung einsetzt

$$x = e^{pt}$$

Die in Gl. (2) auftretende Klammer muss dann Null werden und liefert, wenn alle Wurzeln verschieden sind, n verschiedene p-Werte. Somit erhält man aus Gl. (2) auch n verschiedene partikulare Lösungen

$$x_1 = e^{p_1 t}; \qquad x_2 = e^{p_2 t} \quad \text{etc.}$$

Man überzeugt sich leicht, dass jede davon eine Lösung bleibt, wenn man sie mit einer beliebigen Konstanten multipliziert und daher ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$x = c_1 \cdot e^{p_1 t} + c_2 \cdot e^{p_2 t} + \ldots + c_n \cdot e^{p_n t} \quad (3)$$

Die p-Werte heissen die Eigenwerte des Problems, weil mit andern Werten eine Lösung, selbst mit ganz beliebigen Konstanten, überhaupt nicht möglich ist.

Um nun endlich auch noch die inhomogene Gl. (1) zu lösen, genügt es, irgendeine partikulare Lösung

$$x = \mathrm{u}(t) \quad (4)$$

für diese zu finden. Da diese Gl. (1) befriedigt und da Gl. (3) dieselbe Gleichung mit $\mathrm{f}(t) = 0$ erfüllt, so befriedigt auch die Summe von Gl. (3) plus Gl. (4) Gl. (1) und da sie n Konstanten enthält, ist es die allgemeine Lösung.

[1]) Siehe Literatur am Schluss der Arbeit.

II.

Die Schreibweise mit Operatoren bedeutet nichts anderes als eine Ausdehnung der in der Wechselstromtechnik schon lange bekannten, hauptsächlich von Kennelly und Steinmetz in die Praxis eingeführten «symbolischen» Methode auf nicht rein sinusförmig verlaufende Vorgänge.

Die symbolische Methode hat sich mit der Zeit immer mehr in der Elektrotechnik eingebürgert, trotzdem sie anfänglich von Manchen scharf bekämpft wurde, wobei man aber eben übersehen hatte, dass es sich nicht um besondere, für die Elektrotechnik ersonnene Kunstgriffe handelt, sondern um in der Mathematik allgemein mit grossem Erfolg verwendete Methoden.

Eine zeitlich sinusförmig schwingende Grösse kann bekanntlich durch einen mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi f$ (f = Frequenz) rotierenden Vektor dargestellt werden. Multiplikation desselben mit -1 ist gleichbedeutend mit einer Drehung um 180°; multipliziert man statt dessen zweimal hintereinander je mit $\pm\sqrt{-1} = \pm j$, so erhält man dasselbe Endresultat; die Zwischenstufe, Multiplikation mit $\pm j$, bedeutet daher Drehung in positivem, bzw. negativem Sinne um 90°. Besonders wichtig ist diese Schreibweise bei der Differentiation. Bedeutet in Fig. 1 V einen Vektor und dV seine Aenderung bei Drehung um den Winkel $d\varphi$, wobei die Länge $/V/$ konstant bleibe, so gilt, weil der Kreisbogen überall senkrecht zum Radius verläuft

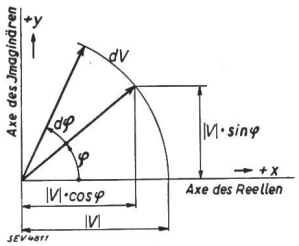

Fig. 1.

$$dV = j\,V\,d\varphi \qquad (5)$$

und nach Differentiation nach der Zeit t

$$\frac{dV}{dt} = j\,V\,\frac{d\varphi}{dt} = j\,V\,\omega \qquad (5a)$$

Hiermit kann man sofort einen berühmten Satz von Euler ableiten. Man drehe den Vektor V aus seiner Anfangslage, in der er mit der positiven Axe des Reellen, $+x$, zusammenfallen möge, um den Winkel φ in positivem Sinne. Es wird nach Fig. 1

$$V = |V| \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$$

Anderseits denke man sich die Drehung durch vektorische Summierung vollzogen, d. h. Integration der vielen kleinen Kreisbogensehnen dV; aus Gl. (5) erhält man

$$\int_{|V|}^{V} \frac{dV}{V} = j\int_0^{\varphi} d\varphi = j\varphi = \ln\frac{V}{|V|}$$

oder

$$V = |V| \cdot e^{j\varphi}; \qquad e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \qquad (6)$$

Die Bedeutung der symbolischen Methode liegt hauptsächlich in Gl. (5a). Sie gestattet, Differentialquotienten nach der Zeit unmittelbar durch die zu differenzierende Grösse zu ersetzen, ebenso Zeitintegrale durch die zu integrierende Grösse wegen

$$V = \frac{d}{dt}\int V\,dt = j\omega \cdot \frac{1}{j\omega}V; \qquad \int V\,dt = -\frac{jV}{\omega}$$

Differentialgleichungen werden damit also formell in algebraische verwandelt.

Das Auftreten der Exponentialfunktion in Gl. (6) wird noch besser an Hand der Differentialgleichung für eine Sinusschwingung verständlich. Es seien L die Induktivität einer Spule, i der Strom in ihr, C die Kapazität eines damit in Reihe geschalteten Kondensators und $\pm q$ die Ladungen auf dessen Belegungen; dann ergibt der Energiesatz

$$\frac{L\,i^2}{2} + \frac{q^2}{2\,C} = \text{konstant}$$

Wir differenzieren nach t und beachten

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Es wird

$$L\,i\,\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\,i = 0$$

Mit i gekürzt und nochmals nach t differenziert, folgt die bekannte Differentialgleichung der harmonischen Schwingung

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0; \qquad \frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{1}{L\,C}\,i = -\omega^2 i \qquad (7)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L\,C}}$$

Man soll also eine Funktion finden, die gleich ihrer negativ genommenen zweiten Ableitung ist. Dies leistet neben sin und cos auch die Exponentialfunktion, die ja an sich gleich ihren sämtlichen Ableitungen ist. Damit die zweite Ableitung gleich der negativ genommenen Ausgangsfunktion wird, hat man den Exponenten imaginär zu machen, wie sich aus folgender Rechnung ergibt:

$$i = Ae^{pt}; \qquad \frac{di}{dt} = p\,Ae^{pt}; \qquad \frac{d^2 i}{dt^2} = p^2 Ae^{pt}$$

somit aus Gl. (7):

$$p^2 Ae^{pt} = -\omega^2 Ae^{pt};\ p^2 = -\omega^2;\ p = \pm j\omega \qquad (8)$$

$\omega = \sqrt{\frac{1}{L\,C}}$ bedeutet nichts anderes als die Kreisfrequenz, denn nach Gl. (6) ist ja

$$i = Ae^{pt} = Ae^{\pm j\omega t} = A\,(\cos\omega t \pm j\sin\omega t)$$

und da sin und cos die Periode 2π haben, gilt eben für die Periodendauer T

$$\omega T = 2\pi;\ f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

p hat nach Gl. (8) zwei Werte; die allgemeine Lösung von Gl. (7) ist also zu schreiben:

$$\begin{aligned} i &= A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t} = \\ &(A_1 + A_2)\cos\omega t + j(A_1 - A_2)\cdot\sin\omega t = \\ &A'\cos\omega t + A''\sin\omega t; \end{aligned} \tag{8a}$$

$$A' = A_1 + A_2;\ A'' = j(A_1 - A_2)$$

Sollen hierbei A' und A'' reell sein, so müssen A_1 und A_2 wie man sagt konjugiert komplex sein, d. h. die Form haben

$$A_1 = a + jb;\ A_2 = a - jb;\ A' = 2a;\ A'' = -2b$$

worin a und b reell sind. Sie bestimmen die Phase der Schwingung, denn

$$A\sin(\omega t + \psi) = A(\sin\omega t\cos\psi + \cos\omega t\sin\psi)$$

also $\quad A\cdot\sin\psi = A';\ A\cdot\cos\psi = A''$

Um eine erzwungene Sinusschwingung darzustellen, kann man sich auch mit *einer* Exponentialfunktion begnügen, muss sich dann aber entscheiden, ob der reelle oder der imaginäre Teil für sich den Vorgang beschreiben soll. Meist nimmt man den imaginären Teil, setzt also

$$\begin{aligned} A\cdot\sin(\omega t + \psi) &= \text{Im. } Ae^{j(\omega t + \psi)} = \\ &\text{Im. } Ae^{j\psi}\cdot e^{j\omega t} = \text{Im. } A_0 e^{j\omega t} \text{ mit } A_0 = Ae^{j\psi} \end{aligned}$$

III.

In den soeben angestellten Rechnungen haben wir schon die Operatorenmethode benützt, jedoch die Exponentialfunktion noch angeschrieben. Wir behandeln nun die gedämpfte Schwingung, bei der in Reihe mit der Induktivität L und der Kapazität C noch ein Widerstand R liegt unter Weglassung dieser Zwischenstufe. Der Energiesatz ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) + i^2R &= 0 \\ = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}i + i^2R \end{aligned} \tag{9a}$$

Durch Kürzung mit i, nochmalige Differentiation nach t und leichte Umgruppierung wird hieraus

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{di}{dt} + \frac{i}{CL} = 0 \tag{9}$$

Gegenüber Gl. (7) tritt das Dämpfungsglied $\frac{R}{L}\cdot\frac{di}{dt}$ neu auf. Da sich auch Gl. (9) durch Exponentialfunktionen befriedigen lässt, führen wir den Operator p ein.

$$p^2 i + \frac{R}{L}pi + \frac{i}{CL} = 0 \tag{9b}$$

Es hebt sich i weg

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL} = 0$$

woraus

$$\begin{aligned} p &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}} = \\ &-\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}} = -a \pm jb \end{aligned} \tag{10}$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (9) wird

$$\begin{aligned} i &= A_1 e^{-at+bt} + A_2 e^{-at-bt} = e^{-at}[(A_1 + A_2)\cos bt \\ &+ j(A_1 - A_2)\sin bt] = e^{-at}(A'\cos bt + A''\sin bt) \end{aligned}$$

Sie unterscheidet sich von Gl. (8a) durch das Dämpfungsglied e^{-at} und durch die von $\omega = \sqrt{\frac{1}{CL}}$ leicht verschiedene Kreisfrequenz

$$b = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}},\ \text{wobei } \frac{1}{CL} > \frac{R^2}{4L^2}$$

Im übrigen muss für die Diskussion von Gl. (10) auf die Literatur verwiesen werden. Bei von Brunn [2]) findet man sie ausgedehnt auf den Fall negativer Widerstände, dort Expedanzen genannt, und es resultieren

für $\frac{1}{C} > \frac{R^2}{4L}$ eigentliche Schwingungen,

für $\frac{1}{C} < \frac{R^2}{4L}$ aperiodische Vorgänge,

für $R > 0$ gedämpfte Vorgänge,
für $R < 0$ anschwellende Vorgänge.

Letztere Möglichkeit erwähnt übrigens schon K. W. Wagner [3]).

Theoretisch ist besonders auch der Spezialfall

$$\frac{1}{C} = \frac{R^2}{4L}$$

d. h. verschwindende Quadratwurzel, zu beachten. Man erhält dann nur einen p-Wert, muss aber trotzdem zwei Integrationskonstanten unterbringen. Dies geschieht für den uns hier allein beschäftigenden Fall einer Differentialgleichung zweiter Ordnung durch den z. B. bei von Brunn (l. c.) zu findenden Ansatz

$$i = (A_1 + A_2 t)e^{pt} \tag{10a}$$

in welchem nur ein einziger p-Wert, aber zwei Konstanten A_1 und A_2 vorkommen. Aus naheliegenden Gründen nennt man diesen Wert eine zweifache Wurzel von Gl. (10).

IV.

Die Operatorenmethode gestattet nicht nur Differentialgleichungen in algebraische zu verwandeln, sondern, mit der nötigen Vorsicht, sie sogar von vornherein in der letztgenannten Form anzusetzen. Wir schreiben dazu (Gl. (9a) als Spannungsgleichung, indem wir beachten, dass eine äussere, «eingeprägte» Klemmenspannung nicht angenommen war, es sich also um sogenannte freie Schwingungen

handelt. Mathematisch entspricht dem eine homogene Differentialgleichung. Wir dividieren also durch i

$$0 = iR + L \cdot \frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} + \frac{q}{C} = iR + L \cdot \frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} + \frac{1}{C} \int i\,\mathrm{d}\,t$$

Die drei Glieder bedeuten die drei Klemmenspannungen an Widerstand, Induktivität und Kapazität, deren Summe gleich Null ist. In Operatorenform geschrieben erhalten wir

$$0 = iR + pLi + \frac{1}{pC}\,i \qquad (11)$$

oder, durch i gekürzt

$$0 = R + pL + \frac{1}{pC} = Z \qquad (11a)$$

woraus wieder Gl. (10) folgt. Da nun p nichts anderes als eine Erweiterung des Begriffes $j\omega$ ist, wie sich aus dem Vergleich von Gl. (8) und Gl. (10) ergibt, so können wir auch pL bzw. $\frac{1}{pC}$ als Erweiterungen der üblichen symbolischen Blindwiderstandsbegriffe $j\omega L$ bzw. $\frac{1}{j\omega C}$ ansehen und die Gl. (11) für die gedämpfte Schwingung formal so anschreiben, wie wenn ein stationärer Wechselstrom vorläge, allerdings wegen der Homogenität von Gl. (9) unter verschwindender Klemmenspannung. Daraus ergeben sich dann die p-Eigenwerte.

Wie eben bemerkt, bedeutet der Ausdruck (11a) eine Art erweiterte Impedanz für den freien Strom, weshalb wir ihn wie üblich mit Z bezeichnen. Wir wollen aber den Begriff gleich noch in anderer Art erweitern, nämlich auf andere Zustandsgrössen. Soll etwa die Klemmenspannung am Widerstand, $U_R = iR$ erfasst werden, so gilt statt Gl. (11)

$$0 = U_R + \frac{pL}{R}\,U_R + \frac{U_R}{R\;C}$$

und durch Kürzen mit U_R statt Gl. (11a)

$$0 = 1 + \frac{pL}{R} + \frac{1}{RpC} = Z_1 \qquad (11b)$$

Analog ergäbe sich für die Kondensatorspannung

$$U_c = \frac{1}{C} \int i\,\mathrm{d}\,t = \frac{i}{pC}$$

$$0 = U_c pCR + U_c p^2\,\frac{L}{C} + U_c = 0$$

und

$$0 = pCR + p^2\,\frac{L}{C} + 1 = Z_2 \qquad (11c)$$

Man erhält Ausdrücke wie Gl. (11b) und Gl. (11c), indem man die Ausgangsgleichung multipliziert mit dem Quotienten alte Variable in der Ausgangsgleichung durch neue, gesuchte Variable.

Die Ausdrücke (11a), (11b) und (11c) führen offensichtlich alle zu denselben p-Werten. Dies rührt im Grunde genommen daher, dass jede Differentialgleichung von der Form der Gl. (9), die man nach Gl. (9b) auch in Operatorenform schreiben kann, auch durch pi und $\frac{i}{p}$ erfüllt wird, wenn sie i selbst befriedigt, weil ja i in jedem Gliede vorkommt, und die Gleichung ohne weiteres mit p erweitert oder gekürzt werden kann. Gl. (9) ist also nicht nur die Differentialgleichung des Stromes, sondern auch der Spannung an Widerstand, bzw. Kondensator, bzw. Drosselspule, sowie der Kondensatorladung usw.

Viele Autoren, z. B. K. W. Wagner [3]) und Fraenckel [4]), nennen Z Widerstandoperator, doch wollen wir hier diesen Ausdruck vermeiden, da Z infolge der soeben vorgenommenen Erweiterung des Begriffes weder die Dimension eines Widerstandes zu haben braucht, noch ein Operator im ganz engen Sinne der eingangs gegebenen Definition ist.

In den Gl. (9), (9a) und (9b) waren wir von einer Reihenschaltung von R, L und C ausgegangen. Das ist nicht unbedingt nötig. Es möge, gleichzeitig als erstes Beispiel, für die Anwendung der Operatorenmethode überhaupt, die Eigenfrequenz einer Parallelschaltung von Induktivität L und Kapazität C berechnet werden. Bei der Eigenfrequenz herrscht Resonanz; der Strom schliesst sich vollständig im Innern des durch L und C gebildeten Kreises, während die äussern Zuleitungen zu den Verzweigungspunkten keinen freien Strom führen. Anderseits herrscht eine endliche Spannung zwischen diesen Punkten, also ist, im Gegensatze zu Gl. (11a), die Impedanz des freien Stromes zwischen den Verzweigungspunkten nicht 0, sondern unendlich zu setzen. Man überzeugt sich leicht, dass diese Regel den richtigen p-Wert liefert, denn

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{pL} + pC;\; Z = \frac{pL}{1 + p^2 LC} = \infty$$

Der Nenner muss Null sein:

$$1 + p^2 LC = 0;\; p = j\sqrt{\frac{1}{LC}};\; \omega = \frac{p}{j} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Einer unveröffentlichten Studie von Herrn Dr. W. Wanger entnehme ich die Berechnung der Eigenfrequenz einer verlustlosen Doppelleitung von der totalen Induktivität L, bzw. Kapazität C, bei der im Resonanzfalle ebenfalls kein freier Strom in den Zuleitungen vom Generator fliesst, während doch Spannung zwischen den Klemmen herrscht, so dass der soeben geschilderte Ansatz am Platze ist. Nach Fraenckel, l. c., Seite 158, bestehen zwischen Spannung und Strom am Anfang (1) und Ende (2) der Leitung unter sinngemässer Berücksichtigung der geänderten Bezeichnungen die Beziehungen

$$U_1 = U_2 \cos \omega \sqrt{LC} + j I_2 \sqrt{\frac{L}{C}} \sin \omega \sqrt{LC}$$

$$I_1 = I_2 \cos \omega \sqrt{LC} + j U_2 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega \sqrt{LC}$$

Leerlauf bedeutet $I_2 = 0$, also

$$Z = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \cos \omega \sqrt{LC}}{j U_2 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega \sqrt{LC}} = -j \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\operatorname{tg} \omega \sqrt{LC}} = \infty$$

$$\operatorname{tg} \omega \sqrt{LC} = 0; \ \omega \sqrt{LC} = k\pi \ (k = 1, 2, 3 \ldots)$$

$$\omega = \frac{k\pi}{\sqrt{LC}}$$

Für den Kurzschluss, $U_2 = 0$, erhält man analog

$$Z = \frac{j I_2 \sqrt{\frac{L}{C}} \sin \omega \sqrt{LC}}{I_2 \cos \omega \sqrt{LC}} = j \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\operatorname{cotg} \omega \sqrt{LC}} = \infty$$

$$\operatorname{cotg} \omega \sqrt{LC} = 0; \omega \sqrt{LC} = (2k-1) \cdot \frac{\pi}{2}; \ \omega = \frac{(2k-1)\pi}{2\sqrt{LC}}$$

Im Verhältnis 2 : 1 der Eigenfrequenzen für die Grundwellen kommt die Tatsache zum Ausdruck, dass die einfache Leitungslänge bei Leerlauf gleich einer halben und bei Kurzschluss gleich einer viertel Wellenlänge ist.

V.

Die Operatorenmethode gestattet auch, mittels eines von Heaviside entdeckten und von K. W. Wagner [2]) zuerst bewiesenen Satzes die Anfangsbedingungen zu berücksichtigen. Freie Schwingungen entstehen dadurch, dass dem System zur Zeit $t = 0$ eine elektrische Grösse, etwa eine Klemmenspannung aufgedrückt wird, welche vorher, für $t < 0$, Null war, und nachher, für $t > 0$, im einfachsten Falle konstant bleibt. Dieses Verhalten stellen wir dar, indem wir die als dauernd konstant angenommene Grösse mit der Einheits- oder Stossfunktion

$$S(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{»} \ t = 0 \\ 1 & \text{»} \ t > 0 \end{cases} \qquad (12)$$

multiplizieren [Berg [5])].

Für die Zwecke der Operatorenrechnung ist es bedeutungsvoll, dass man nach K. W. Wagner, l. c., Gl. (12) in folgender Form darstellen kann:

$$S(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{tp} \cdot \frac{dp}{p} \qquad (12a)$$

Hierin ist die Integrationsvariable p eine komplexe Grösse von der Dimension einer Frequenz; die Werte, die sie annehmen kann, werden durch die Punkte der X-Y-Ebene dargestellt, wobei, wie oben, die X-Achse diejenige des Reellen, die Y-Achse diejenige des Imaginären sei. Das bestimmte Integral (12a) ist längs eines ganz bestimmten Weges auszuwerten, als solcher ist in Gl. (12a) derjenige längs der Y-Achse vorgeschrieben, wobei der Nullpunkt durch einen kleinen Halbkreis zu umfahren ist, weil e^{tp}/p dort unendlich wird, d. h., wie man in der Funktionentheorie sagt, singulär ist.

Eine Ableitung von Gl. (12a) auf Grund funktionentheoretischer Ueberlegungen wäre den in diesem Aufsatze angedeuteten Zusammenhängen besonders angepasst [Rothe [6]), S. 50 ff.]. Dem Ingenieur liegt es aber im allgemeinen näher, von der bekannten Fourierschen Reihe auszugehen (Fraenckel, l. c., Seite 71 ff.)

$$y = \frac{b_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \sin n\varphi + \sum_1^\infty b_n \cos n\varphi \qquad (13)$$

worin

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin n\varphi \, d\varphi; \ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos n\varphi \, d\varphi \qquad (13a)$$

Wir dürfen in Gl. (13) auch von $-\infty$ bis $+\infty$ summieren, denn es ist

$\cos n\varphi = \cos(-n\varphi)$; $\sin n\varphi = -\sin(-n\varphi)$
$b_{-n} = b_n$; $a_{-n} = -a_n$, also
$b_n \cos n\varphi = b_{-n} \cos(-n\varphi)$; $a_n \sin n\varphi = a_{-n} \cdot \sin(-n\varphi)$

haben aber dann für die Koeffizienten a'_n und b'_n nur die halben Werte von Gl. (13a) einzusetzen. Ausserdem wollen wir die Exponentialfunktion einführen. Es ist

$$a'_n \sin n\varphi + b'_n \cos n\varphi = \text{Realteil } (-j a'_n + b'_n) e^{jn\varphi} = Re\,(C_n e^{jn\varphi})$$

$$C_n = -j a'_n + b'_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(-j \sin n\varphi + \cos n\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y e^{-jn\varphi} \, d\varphi$$

Nun führen wir eine Längenkoordinate x ein und denken uns die Periode von $-l$ bis $+l$ erstreckt; dann wird

$$y = Re \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{jn\pi x}{l}};$$

$$C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} y \, e \cdot dx^{\frac{-jn\pi x}{l}}$$

Endlich strecken wir die Periode beidseitig ins Unendliche und führen eine dritte Variable $z = \frac{x}{l}$ ein. Es wird

$$y = Re \int_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\pi z} \cdot dn; \qquad C_n = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-jn\pi z} \cdot dz$$

Das erste dieser beiden letzten Integrale nennt man ein Fouriersches Integral. Die Ausrechnung für unsere spezielle Stossfunktion ergibt

$$C_n = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jn\pi z}\cdot dz = -\left.\frac{e^{jn\pi z}}{2\,jn\,\pi}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{2\,jn\,\pi}$$

$$y = Re\,\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{jn\pi z}}{n}\,dn \qquad (14)$$

mit

$$pt = jn\,\pi\,z; \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dn}{n}$$

folgt nun wirklich Gl. (12a).

Dabei ist, entsprechend der Multiplikation der Variablen z mit j der Integrationsweg um 90° nach vorwärts gedreht, verläuft also, wie schon erwähnt, nun von $-j\infty$ bis $+j\infty$, d. h. längs der Axe des

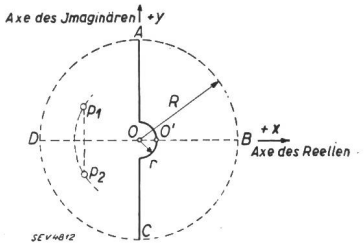

Fig. 2.

Imaginären, statt wie in Gl. (14) von $-\infty$ bis $+\infty$ längs der Axe des Reellen. Für das Folgende ist es von Bedeutung, ob auf dem soeben genannten Wege der Nullpunkt nach rechts, wie in Fig. 2 angedeutet, oder nach links zu umfahren ist. Um dies in einfacher Weise zu prüfen, setzen wir in Gl. (12a) $t = 0$, betrachten also die Funktion $\frac{dp}{p}$. Ist r der Radius des kleinen Umgehungskreises, so können wir schreiben:

$$p = r\cdot e^{j\varphi};\ dp = j\cdot r\cdot e^{j\varphi}d\varphi;\ \frac{dp}{p} = j\,d\,\varphi$$

Beim Umfahren nach rechts liefert der Kreis dann zum Integral den Beitrag

$$I = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\frac{dp}{p} = +\frac{1}{2} \qquad (14\,a)$$

und beim Umfahren nach links

$$I' = -\frac{1}{2\pi j}\int_{\pi/2}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dp}{p} = -\frac{1}{2}$$

Da nun $S(t)$ für $t = 0$ gerade gleich $+\frac{1}{2}$ sein soll, so gibt das Umfahren nach rechts den richtigen Wert, sofern das Integral auf dem übrigen Teil des Weges verschwindet. Das ist nun in der Tat der Fall. Es ist nämlich

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-jR}^{-jr}\frac{dp}{p} + \frac{1}{2\pi j}\int_{+jr}^{+jR}\frac{dp}{p} = \frac{1}{2\pi j}\left(\ln p\Big|_{-jR}^{-jr} + \ln p\Big|_{+jr}^{+jR}\right) \qquad (15)$$

Allgemein gilt aber für eine komplexe Zahl (Rothe, l. c., S. 8)

$$\ln z = \ln|z| + j\cdot \text{arcus}\ (z)$$

Damit wird aus Gl. (15)

$$\frac{1}{2\pi j}\left[\ln r - \ln R + \ln R - \ln r + kj\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 0$$

VI.

In Abschnitt IV wurde der Begriff Z der Impedanz des freien Stromes derart erweitert, dass für irgendeine Systemgrösse S, die unter dem Einfluss einer äussern Wirkung P zustande kommt, gesetzt werden darf

$$S = \frac{P}{Z}$$

P spielt dabei die Rolle der Funktion $u(t)$ in der Lösung der inhomogenen Gl. (1).

Wird nun P als Stoss einer für $t > 0$ konstanten Grösse Q im Sinne von Gl. (12) eingeführt, so haben wir zu schreiben

$$S = \frac{Q}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\frac{e^{pt}}{pZ} \qquad (16)$$

Dabei wurde Z unter das Integralzeichen genommen, weil es ja z. B. nach Gl. (11a), (11b) und (11c) eine Funktion des Operators p ist und indem wir gleichzeitig die Integrationsvariable p in Gl. (12a) als Operator p ansehen, was uns vollständig frei steht, da p in Gl. (12a) nur die Bedingung erfüllen muss, von der Dimension einer Frequenz zu sein.

Nach K. W. Wagner wird nun das Integral (16) berechnet, indem man den Integrationsweg längs der Axe des Imaginären durch einen sehr grossen Halbkreis vom Radius R, sei es nach links oder nach rechts, zu einem geschlossenen ergänzt (vgl. Fig. 2). Damit gewinnt man den Vorteil, den sogenannten Hauptsatz der Funktionentheorie anwenden zu können, laut welchem das Linienintegral einer Funktion längs einer geschlossenen Kurve in der Ebene der komplexen Zahlen gleich 0 ist, wenn die Funktion im Innern der Kurve keine sogenannten singulären Stellen hat. Ist hingegen p_ν eine solche Stelle, so gilt, wenigstens wenn sie isoliert ist, die sogenannte Laurentsche Reihe:

$$f(p) = \frac{b_1}{p - p_\nu} + \frac{b_2}{(p - p_\nu)^2} + \ldots + \sum_0^\infty a_n(p - p_\nu)^n \qquad (17)$$

Dieser Ausdruck wird tatsächlich für $p = p_\nu$ unendlich. Man nennt b_1 das Residuum von p_ν und das soeben erwähnte Linienintegral wird im Falle von Singularitäten im Innern gleich der Summe von deren Residuen mal $2\pi j$. Diese Tatsache kam schon in Gl. (14a) zum Ausdruck, denn das Residuum

von $\frac{1}{p-0}$ ist einfach gleich 1 und daher das Linienintegral von $\frac{1}{p}$ rund um den Nullpunkt herum gleich $2\pi j$, da andere singuläre Stellen nicht vorhanden sind .

Die Eigenwerte von p sind nach Gl. (11a), (11b) und (11c) dadurch ausgezeichnet, dass für sie $Z = 0$ wird; da also dort $\frac{e^{pt}}{pZ}$ unendlich wird, bedeuten sie bezüglich der eben genannten Funktion singuläre Stellen. Setzt man voraus, dass die reellen Teile aller p-Eigenwerte wie in Gl. (10) negativ sind, so liegen die sie repräsentierenden Punkte alle links der Ordinatenachse. Es sind also keine «Expedanzen» angenommen und das Folgende gilt daher nicht für Selbsterregungsvorgänge.
Längs des Weges OABC ist also sicher

$$\frac{1}{2\pi j}\int \frac{e^{pt}\,dp}{pZ} = 0$$

Wie man sieht, spielt es hierbei eine Rolle, dass unser kleiner Halbkreis um 0 sich nach rechts erstreckt, so dass der Nullpunkt, der ja singulär ist, sich nicht innerhalb der umfahrenen Fläche befindet.

Es sei nun t negativ, dann ist auch

$$S(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}\,dp}{p} = 0$$

und da man für diesen Fall unmöglich annehmen kann, dass die betrachtete Systemgrösse von 0 verschieden ausfällt, so gilt auch

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}\,dp}{Zp} = 0$$

und endlich längs ABC

$$\frac{1}{2\pi j}\int \frac{e^{pt}\,dp}{Zp} = 0 \qquad (18)$$

wobei natürlich ABC einen sehr grossen Radius R haben muss. Hat nun t denselben Absolutwert wie vorher, aber positives Vorzeichen, und schreibt man dafür statt p in Gl. (18) $-p$, so hat jedenfalls $\int \frac{e^{pt}\,dp}{p}$ längst CDA denselben Wert wie längs ABC. Setzt man mit K. W. Wagner weiter voraus, dass $\frac{1}{Z}$ wenigstens auf gewissen Kreisen CDA um 0 mit sehr grossem Radius, die alle singulären Stellen umfassen, eine bestimmte endliche Grenze nirgends überschreitet, so ist längs CDA auch

$$\frac{1}{2\pi j}\int \frac{e^{pt}\,dp}{pZ} = 0$$

gewährleistet. Damit bleibt dann endlich

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{pZ} = \varrho_0 + \sum \varrho_\nu \qquad (18a)$$

wobei ϱ_0 das Residuum des Nullpunktes und $\Sigma\varrho_\nu$ die Summe der Residuen an den Stellen p_ν, für welche pZ gleich Null wird, bedeuten. Um nun diese Residuen zu berechnen, bezeichnen wir mit

$$z = p - p_\nu$$

den Radius von kleinen Kreisen um die verschiedenen Punkte p_ν in der p-Ebene. Nach der bekannten Reihe für die Exponentialfunktion wird

$$e^{pt} = e^{p_\nu t}\cdot e^{zt} = e^{p_\nu t}\left(1 + zt + \frac{z^2 t^2}{2!} + \ldots\right) \qquad (19)$$

Für $\frac{1}{pZ}$ schreiben wir die schon unter Gl. (17) erwähnte Laurentsche Reihe an

$$f(z) = \frac{1}{pZ} = \sum_0^\infty a_n z^n + \frac{b_k}{z^k} + \frac{b_{k-1}}{z^{k-1}} + \ldots + \frac{b_1}{z} \qquad (19a)$$

Indem wir die Ausdrücke (19) und (19a) miteinander multiplizieren und den Faktor von $\frac{1}{z}$ herausgreifen, erhalten wir

$$\varrho_\nu = e^{p_\nu t}\left(b_1 + b_2\frac{t}{1!} + b_3\cdot\frac{t^2}{2!} + \ldots\right)$$

als das gesuchte Residuum für den Punkt p_ν.

Für den Punkt $p = 0$ sei $Z = Z(0)$ und in einem kleinen Abstand z vom Nullpunkt auf Grund der bekannten Taylorschen Reihe

$$Z = Z(0) + zZ' + \frac{z^2}{2!}Z'' + \ldots$$

$$zZ = zZ(0) + z^2 Z' + \frac{z^3}{2!}Z'' + \ldots \cong zZ(0)$$

Da für $p = 0$ $e^{pt} = 1$ wird, gilt also

$$\left(\frac{e^{pt}}{pZ}\right)_{p=0} = \frac{1}{Z(0)z}, \text{ also } \varrho_0 = \frac{1}{Z(0)}$$

Damit folgt aus Gl. (16) und (18a) endlich der Satz von Heaviside-Wagner

$$S = \frac{Q}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{pZ} = \frac{Q}{Z(0)} + Q\sum_\nu e^{p_\nu t}\left(b_1 + b_2\frac{t}{1!} + \ldots\right) \qquad (20)$$

Für die praktische Benützung eignet sich besser eine noch etwas einfachere Form, die sich ergibt, wenn in Gl. (19a) die Koeffizienten b_k b_{k-1} usw. bis auf b_1 alle Null sind; dann wird, bei sehr kleinem z,

$$\frac{1}{pZ} = \frac{b_1}{z}; \qquad Z = \frac{z}{b_1 p}$$

Man setzt für Z wieder eine Taylorsche Reihe an

$$Z = Z(p_\nu) + Z'(p_\nu)z + \ldots \cong Z'(p_\nu)z$$

letzteres, da ja $Z(p_\nu) = 0$, und erhält endlich

$$Z'z = Z = \frac{z}{b_1 p_\nu}; \quad b_1 = \frac{1}{p_\nu Z'(p)_\nu}$$

Damit schreibt sich (20)

$$S = \frac{Q}{Z(0)} + Q \sum_\nu \frac{e^{p_\nu t}}{(pZ')_\nu} \qquad (20a)$$

VII.

Um die Bedeutung der Formel klar zu machen, behandeln wir gleich das einfache Beispiel des Einschaltens einer Drosselspule an eine Gleichstromquelle auf die gewöhnliche Art und nach Heaviside. Die Differentialgleichung des freien Stromes ist

$$0 = i_f R + L \cdot \frac{di_f}{dt}; \quad \frac{di_f}{i_f} = -\frac{R}{L}\, dt$$

woraus integriert folgt

$$\ln i_f = -\frac{R}{L} t + C; \quad i_f = e^{-\frac{R}{L}t + C} = C_1\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

Der erzwungene Strom ist $i_e = \frac{U}{R}$ und der Gesamtstrom

$$i = i_f + i_e = C_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}$$

Es sei

für $t = 0 \quad i = 0$ also

$$0 = C_1 + \frac{U}{R}; \qquad C_1 = -\frac{U}{R}$$

somit endgültig

$$i = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

In Operatorenform schreibt sich

$$Z = R + pL; \; Z' = L; \; p_\nu = p_1 = -\frac{R}{L}$$
$$(pZ')_1 = -R; \qquad Z(0) = R$$

also aus Gl. (20a) mit $Q = U$ und $S = i$ direkt

$$i = \frac{U}{R} + U \cdot \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{-R} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Es bedeutet also hier $\frac{Q}{Z(0)} = \frac{U}{R}$ den durch die Gleichstromquelle erzwungenen Endstrom, der nach Abklingen des freien Stromes $-\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ allein übrig bleibt. Wir haben noch zu prüfen, ob in Gl. (19a) alle b_k bis auf b_1 null sind. Dies kann auf Grund einer einfachen allgemeinen Ueberlegung geschehen. Wenn die Wurzeln p_1, p_2, p_3 usw. alle verschieden sind, so gilt

$$pZ = Z_1 (p - p_1)(p - p_2) \ldots\ldots (p - p_\nu) = Z_1 z_1 z_2 \ldots\ldots z_\nu \qquad (21)$$

wobei Z_1 eine Funktion von p ist, die in p_1, p_2, p_3 usw. endlich bleibt. Tatsächlich ist ja dann $pZ = 0$, sobald $p = p_1$ oder $= p_2$ oder $= p_3$ usw.

Entwickelt man $\frac{1}{pZ}$ in die Reihe (19a), so ist man also sicher, dass z in keinem Nenner mit höherer Potenz als 1 vorkommt, denn in

$$\frac{1}{pZ} = \frac{1}{Z_1 z_1 z_2 \ldots\ldots z_\nu}$$

sind alle z verschieden und mit Ausnahme des gerade betrachteten z_ν als konstant zu betrachten. Fallen hingegen in Gl. (21) gewisse Wurzeln zusammen, so wird

$$pZ = Z_1 (p - p_1)^{k_1} \cdot (p - p_2)^{k_2} (p - p_3)^{k_3}$$

und es ist Gl. (20) statt (20a) anzuwenden. Diesem Fall sind wir schon bei der Erwähnung der Gl. (10a) begegnet und es traten in derselben wie in (20) im Faktor der Exponentialfunktion Potenzen von t auf. Da im Falle unserer Drosselspule überhaupt nur ein p-Wert vorkommt, ist es klar, dass Gl. (20a) angewendet werden durfte.

Ganz ähnlich verläuft die Verfolgung des Einschaltens eines Kondensators. Es ist

$$Z = R + \frac{1}{pC}; \; p_1 = -\frac{1}{RC}; \; Z' = -\frac{1}{p^2 C} \qquad (22)$$
$$(pZ')_1 = R; \; Z(0) = \infty$$

also

$$i = \frac{U}{\infty} + \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Um auch die Ladung

$$q = \int i\, dt = \frac{i}{p}$$

darzustellen, bilden wir aus Gl. (22) das neue zugehörige Z nach der nach Gl. (11c) angegebenen Regel. Der Quotient aus alter und neuer Variablen ist $\frac{i}{q} = p$ und daher

$$Z_q = Rp + \frac{1}{C}$$

Weiter wird

$$p_1 = -\frac{1}{RC}; \; Z' = R; \; (pZ'_q)_1 = -\frac{1}{C}; \; Z_q(0) = \frac{1}{C}$$
$$q = UC\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

[vgl. Fraenckel l. c., Seite 195, Gl. (28) und (27)].

Wir betrachten endlich als Beispiel für das Auftreten zweier p-Werte noch das Einschalten einer Reihenschaltung von R, L und C an eine Gleichstromquelle. Für den Strom gilt hier

$$Z = R + pL + \frac{1}{pC} = 0 \qquad (11a)$$

und für p

$$p = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -a \pm jb, \qquad (10)$$

ferner mit direkter Benützung von Gl. (11a)

$$Z' = L - \frac{1}{p^2 C};\ pZ' = pL - \frac{1}{pC} = R + 2pL$$

Der letzte Ausdruck wird für die beiden Eigenwerte

$$pL - \frac{1}{pC} = R - R \pm 2j\beta L;\ Z(0) = \infty$$

also

$$i = \frac{U \cdot e^{-at}}{2jbL}(e^{jbt} - e^{-jbt}) =$$

$$\frac{U e^{-at}}{2jbL}(\cos bt + j\sin bt - \cos bt + j\sin bt) =$$

$$\frac{U \cdot e^{-at}}{bL} \sin bt$$

[Fraenckel l. c., S. 199, Gl. (58)].

Es stellt sich naturgemäss die Frage, ob mit der Operatorenmethode statt Einschalt- auch Ausschaltvorgänge behandelt werden können. Dies trifft grundsätzlich zu, doch ist zu beachten, dass ein Ausschaltlichtbogen keinen konstanten Widerstand aufweist. Da konstante Koeffizienten in der Ausgangs-Differentialgleichung eine Voraussetzung für die Zulässigkeit der Operatorenrechnung sind, müssen wir ein Beispiel wählen, bei dem die Verhältnisse im Ausschaltlichtbogen zahlenmässig keine Rolle spielen. Gleichzeitig können wir dabei den Fall behandeln, dass die eingeprägte Grösse Q keine Spannung, sondern ein Strom ist. Es handle sich nach Fig. 3 um das Ueberbrücken einer Drosselspule L und ihres Parallelwiderstandes R durch den Schalter S zur Zeit $t = 0$, wodurch also der «eingeprägte» Strom I in der Parallelschaltung von L und R plötzlich zum Verschwinden gebracht wird. Da in Gl. (20) $\frac{Q}{Z(0)}$ den stationären Endwert der betrachteten Variabeln bedeutet, denke man sich einfach dem Einschaltvorgang den Wert $-\frac{Q}{Z(0)}$ überlagert. Es stellt dann

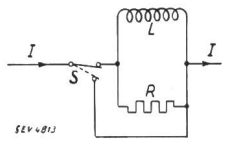

Fig. 3.

$$S = Q \sum_{\nu} \frac{e^{p_\nu t}}{(pZ')_\nu}$$

den Ausschaltvorgang der Grösse $-\frac{Q}{Z(0)}$ dar, oder

$$S = -Q \sum_{\nu} \frac{e^{p_\nu t}}{(pZ')_\nu} \tag{23}$$

den Ausschaltvorgang der Grösse $Q/Z(0)$. Als Variable wählen wir die Klemmenspannung U an L und R und erhalten damit

$$Z = \frac{I}{U} = \frac{1}{R} + \frac{1}{pL} = \frac{R + pL}{RpL}$$

Z ist also hier eine Leitfähigkeit. Für die freie Schwingung ist $I = 0$, also auch $Z = 0$. Es folgt für p

$$R + pL = 0;\ p = -\frac{R}{L}$$

Ferner

$$Z' = \frac{L}{RpL} - \frac{R + pL}{R^2 p^2 L^2} = -\frac{L}{R^2}$$

$$pZ' = \frac{R}{L} \cdot \frac{L}{R^2} = \frac{1}{R}$$

Damit schreibt sich Gl. (23)

$$U = -IRe^{-\frac{R}{L}t}$$

Für $t = 0$ wird $U = -IR$, worin die bekannte Regel für die Dimensionierung eines Parallelwiderstandes zum Schutze einer Spule zum Ausdruck kommt.

Viele andere, kompliziertere Beispiele, die die Vorteile des Heavisideschen Satzes besonders klar in Erscheinung treten lassen, findet man bei K. W. Wagner, l. c.

VIII.

Zum Schlusse soll noch gezeigt werden, wie der Heavisidesche Satz in seiner ursprünglichen Form 20a erweitert werden kann auf kompliziertere Stossfunktionen und besonders auf das Einschalten sinusförmig variierender Grössen. Zu diesem Zwecke schreibt man die Stossfunktion mit einer neuen Integrationsvariabeln

$$p' = p - \gamma$$

worin γ eine komplexe Konstante ist.

$$S(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{tp'}\,dp'}{p'} = \frac{e^{-\gamma t}}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{tp}\,dp}{p - \gamma}$$

und daher

$$S(t) \cdot e^{\gamma t} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{tp}\,dp}{p - \gamma} \tag{24}$$

Das Multiplizieren von $S(t)$ mit $e^{\gamma t}$ bedeutet bei negativ reellem γ das Abklingen der zur Zeit $t = 0$ eingeschalteten Grösse mit dem Dämpfungsfaktor $-\gamma$ und bei komplexem γ das Einschalten einer gedämpften Sinusschwingung. Praktisch besonders wichtig ist natürlich das Einschalten einer reinen, ungedämpften Sinusschwingung von der Kreisfrequenz ω, wofür also

$$\gamma = j\omega$$

wird. Für diesen Fall schreibt sich die Stossfunktion nach Gl. (24)

$$S(t)\, e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{tp}\,dp}{p - j\omega}$$

Es ist nun im ersten Gliede von Gl. (20a) Z statt von 0 von demjenigen Argumente zu nehmen, für

welches, wie in der ursprünglichen Ableitung, der Nenner des Stossintegrales verschwindet, also von $p = j\omega$. Ebenso ist im Nenner des zweiten Gliedes als Faktor von Z' der Eigenwert derjenigen Grösse zu setzen, die im Nenner des Stossintegrales steht, also $p_\nu - j\omega$. Endlich setzen wir, entsprechend der Multiplikation von $S(t)$ mit $e^{j\omega t}$ statt der konstanten eingeprägten Grösse Q die Sinusschwingung in komplexer Form

$$Q_{mo} \cdot e^{j\omega t} = Q_m \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t} = Q_m\, e^{j(\omega t + \psi)}$$

wo ψ der Phasenwinkel ist, und erhalten aus Gl. (20a)

$$S = \frac{Q_m\, e^{j(\omega t + \psi)}}{Z\,(j\omega)} + \sum_\nu \frac{Q_m\, e^{j(\omega t + \psi)} \cdot e^{(p_\nu - j\omega)t}}{(p^\nu - j\omega)\, Z'_\nu}$$

$$= \frac{Q_m\, e^{j(\omega t + \psi)}}{Z\,(j\omega)} + \sum_\nu \frac{Q_m\, e^{p_\nu t + j\psi}}{(p_\nu - j\omega) Z'_\nu} \qquad (25)$$

Diese Formel findet sich, ohne Beweis, bei Fraenckel, Seite 203.

Ein einfaches Beispiel bildet das Einschalten einer Drosselspule an Wechselspannung; vgl. Fraenckel, Seite 204.

Als etwas komplizierteren Fall betrachten wir zum Schlusse das Einschalten eines kurzgeschlossenen ganz symmetrisch gebauten Transformators vom Uebersetzungsverhältnis 1 : 1 an eine Wechselspannung. K. W. Wagner hat diesen Fall für Gleichstrom behandelt. Die Transformatorgleichungen lauten symbolisch mit $R_1 = R_2 = R$; $L_1 = L_2 = L$

$$U = i_1 R + i_1 pL + i_2 pM; \quad 0 = i_2 R + i_2 pL + i_1 pM$$

$$i_2 = -\, i_1 \frac{p\,M}{R + pL} \text{ also}$$

$$U = i_1 \left(R + pL - \frac{p^2 M^2}{R + pL} \right)$$

Für den freien Strom ist

$$Z = R + pL - \frac{p^2 M^2}{R + pL} = 0 \text{ oder } (R + pL)^2 = p^2 M^2;$$

$$R + pL = \pm\, pM; \; p_1 = -\frac{R}{L - M}; \; p_2 = -\frac{R}{L + M}$$

p hat also hier zwei Werte, trotzdem kein Schwingungskreis mit Kondensator vorliegt.

$$Z' = L - \frac{2p\,M^2}{R + pL} + \frac{p^2 M^2 L}{(R + pL)^2} = 2\,(L \mp M)$$

$$(pZ')_1 = -\frac{R}{L - M} \cdot 2\,(L - M) = -\,2R$$

$$(pZ')_2 = -\frac{R}{L + M} \cdot 2\,(L + M) = -\,2R$$

$$(j\omega\, Z')_1 = 2\, j\omega\,(L - M); \; (j\omega\, Z')_2 = 2\, j\omega\,(L + M)$$

Damit folgt aus Gl. (25) mit $Z(j\omega) = Z_K =$

$$\frac{R^2 - \omega^2 L^2 + \omega^2 M^2 + 2\, j\omega L R}{R + j\omega L}$$

$$i = U \left[\frac{e^{j(\omega t + \psi)}}{Z_K} - \frac{e^{-\frac{R}{L-M} t + j\psi}}{[2\,R + j\omega\,(L - M)]} - \frac{e^{-\frac{R}{L+M} t + j\psi}}{2\,[R + j\omega (L + M)]} \right] \qquad (26)$$

Wir schalten im Nullpunkt der Spannung ein. Benützen wir, wie im Schluss des Abschnittes II angegeben wurde, als Schwingungsausdruck den imaginären Teil von $e^{j(\omega t + \psi)}$, so ist $\psi = 0$ zu setzen. Für $t = 0$ bleibt

$$i = U \left[\frac{1}{Z_K} - \frac{1}{2\,[R + j\omega\,(L - M)]} - \frac{1}{2\,[R + j\omega\,(L + M)]} \right] \qquad (26a)$$

Da im Einschaltmoment der Strom 0 ist, muss der Ausdruck 26a auch Null sein. Man überzeugt sich leicht hiervon, indem man Z_k aus dem oben gegebenen Ausdruck einsetzt. Der freie Strom, welcher den erzwungenen Strom im Zeitpunkte Null zu Null ergänzen muss, besteht aus zwei Teilen, die sehr verschieden rasch abklingen. Der Teil mit der grossen Zeitkonstante $\frac{L + M}{R}$ entspricht dem Hauptfeld, der Teil mit der kleinen Zeitkonstante $\frac{L - M}{R}$ dem Streufeld. Nach Gl. (26) ist der zweite Teil viel grösser als der erste. Ist die Zeitkonstante $\frac{L - M}{R}$ trotz ihrer relativen Kleinheit infolge kleinen ohmschen Widerstandes immer noch gross gegen die Periodendauer, so erreicht der Einschaltstromstoss nahezu die doppelte Amplitude des Dauerkurzschlußstromes.

Literatur.

1. Sokolnikoff, Higher mathematics for Engineers and Physicists. New York and London. Mc. Graw Hill, 1934, Chapter X.
2. A. von Brunn, Die Expedanz als Ursache der Selbsterregung und der allgemeinen Resonanz. Bull. SEV, 13. 3. 1935.
3. K. W. Wagner, Ueber eine Formel von Heaviside zur Berechnung von Einschaltvorgängen. Archiv für Elektrotechnik, IV. Band, 1916, Heft 5 und 6.
4. Fraenckel, Theorie der Wechselströme. 3. Auflage, Berlin, Springer, 1930, Kapitel XIII.
5. Gramisch-Tropper-Berg, Rechnung mit Operatoren. München und Berlin, Oldenbourg, 1932.
6. Rothe, Ollendorf, Pohlhausen, Funktionentheorie. Berlin, Springer, 1931.