

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 26 (1935)  
**Heft:** 9

**Artikel:** La courbe d'échauffement exacte et universelle  
**Autor:** Jaques, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1060305>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SCHWEIZERISCHER ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

# BULLETIN

## REDAKTION:

Generalsekretariat des Schweiz. Elektrotechn. Vereins und des Verbandes Schweiz. Elektrizitätswerke, Zürich 8, Seefeldstr. 301

## VERLAG UND ADMINISTRATION:

A.-G. Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei, Zürich 4  
Stauffacherquai 36/40

Nachdruck von Text oder Figuren ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit Quellenangabe gestattet

XXVI. Jahrgang

Nº 9

Mittwoch, 24. April 1935

## La courbe d'échauffement exacte et universelle.

Par R. Jaques, Aix-les-Bains.

621.3.017.7

*Le calcul pratique des échauffements nécessite souvent la connaissance de la courbe d'échauffement exacte. La courbe classique ne permet cependant pas de tenir compte des facteurs qui varient avec la température, tels que le coefficient de transmission de la chaleur, ou la résistivité du cuivre. L'auteur décrit la construction de courbes qui répondent à ces exigences. Puis il montre comment, pour un mode de refroidissement déterminé, il n'est besoin de tracer une fois pour toutes qu'une seule courbe-type qui, moyennant un diagramme fort simple, interprétera tous les problèmes courants de l'échauffement des machines électriques. Des cycles complexes peuvent ainsi être facilement résolus.*

*Zur Berechnung von Erwärmungen elektrischer Maschinen ist in der Praxis oft die Kenntnis der genauen Erwärmungskurve nötig. Die Kurve der klassischen Erwärmungsgleichung erlaubt jedoch nicht, denjenigen Größen Rechnung zu tragen, welche mit der Temperatur ändern, z. B. der Wärmeübergangszahl, oder dem Kupferwiderstand. Im folgenden wird die Konstruktion von Kurven abgeleitet, welche alle diese Einflüsse berücksichtigen. Ferner wird gezeigt, wie, für eine bestimmte Kühlungsart, ein- für allemal eine Kurve gezeichnet werden kann, die mit Hilfe eines einfachen Diagrammes die Lösung aller praktischen Erwärmungsprobleme der elektrischen Maschinen ergibt. Komplizierte Erwärmungszyklen können damit leicht gelöst werden.*

L'étude de l'échauffement des machines électriques et des transformateurs travaillant en surcharge ou avec de fréquentes variations de charge, au moyen des formules connues, demande de multiples opérations si l'on veut suivre les variations progressives de la température avec une précision suffisante. C'est le cas surtout dès que l'échauffement ne suit plus exactement la courbe classique définie par la formule  $\vartheta = \vartheta_\infty (1 - e^{-\frac{t}{T}})$ , p. ex. pour le refroidissement naturel d'un appareil. Pourtant, lorsqu'il s'agit d'un cycle de charges imposé, il est indispensable, pour le constructeur aussi bien que pour l'exploitant, de suivre la courbe de température à travers tout le cycle pour se rendre compte où se trouve la meilleure solution des problèmes qui se posent.

Si les courbes de température sont assez faciles à construire pour le cas classique où le coefficient de transmission de la chaleur reste constant, il n'en est plus de même lorsqu'il varie avec la température. Nous nous proposons dans cette étude d'indiquer la construction de courbes universelles qui, établies une fois pour toutes, seront applicables telles quelles à tous les cas de la pratique, et cela avec une précision rigoureuse quelle que soit la loi de l'échauffement. Ces courbes nous permettront de tenir compte également d'autres facteurs qui varient avec la température, tel que p. ex. la résistivité du cuivre, dont la variation entraîne une variation des pertes.

### A. Courbe pour un coefficient de transmission de la chaleur constant.

On a l'équation classique

$$\vartheta = \vartheta_\infty (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (1)$$

$\vartheta$  étant l'échauffement qui s'établit après un temps  $t$ ,  $\vartheta_\infty$  la température finale pour une durée indéfinie du régime,  $T$  la constante de temps.

Cette équation permet de tracer la courbe d'échauffement bien connue.

A chaque cas qui se présentera avec un  $\vartheta_\infty$  ou un  $T$  différents correspondra une autre courbe. Cependant toutes ces courbes peuvent être réduites en une seule; autrement dit, nous pouvons dessiner une courbe qui à elle seule représentera la courbe d'échauffement pour n'importe quel cas, quitte à conformer chaque fois les axes du système des coordonnées aux nouvelles données.

A cet effet nous écrirons l'équation (1) sous la forme suivante

$$\frac{t}{T} = \ln \frac{1}{1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}} \quad (1 \text{ bis})$$

et nous tracerons la courbe dans un système de coordonnées rectilignes ayant pour abscisses  $\frac{t}{T}$  et pour ordonnées  $\frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}$  (fig. 1). Dans le quadrant I du système figure un rayon  $\vartheta$  portant une graduation en

degrés de température, et dans le quadrant III un rayon  $t$  portant une graduation en heures, établie à la même échelle que la graduation de  $\frac{t}{T}$  sur l'axe X. Parallèlement à l'axe X nous tracerons une horizontale  $g_{\vartheta_\infty}$  par le point  $\frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} = 1$ .

Le point d'intersection du rayon  $\vartheta$  avec  $g_{\vartheta_\infty}$  marquera sur la graduation une température qui sera, par hypothèse, la température finale  $\vartheta_\infty$  du régime; alors, une horizontale par un point  $P$  quelconque de la courbe indiquera sur le rayon  $\vartheta$  la température instantanée  $\vartheta_1$ , tandis que la verticale par  $P$  indiquera sur l'axe  $X$  la valeur du  $\frac{t}{T}$  correspondant, puis sur le rayon  $t$  directement le temps  $t_1$ , étant entendu que ce rayon devra former avec l'axe  $X$  un angle  $\beta$  dont le cosinus soit égal  $\frac{1}{T}$ .

Nous allons exposer ci-après l'établissement et l'utilisation pratique d'un diagramme, illustré par un exemple.

On travaillera avantageusement avec un graphique omnibus qu'il suffira de compléter, dans chaque cas, par les deux rayons  $\vartheta$  et  $t$  qui feront fonction d'axes des coordonnées pour la lecture de la courbe. Ce graphique omnibus contiendra (voir le tracé en traits pleins de la fig. 2) les axes du système cartésien,  $X$  et  $Y$ , portant les graduations

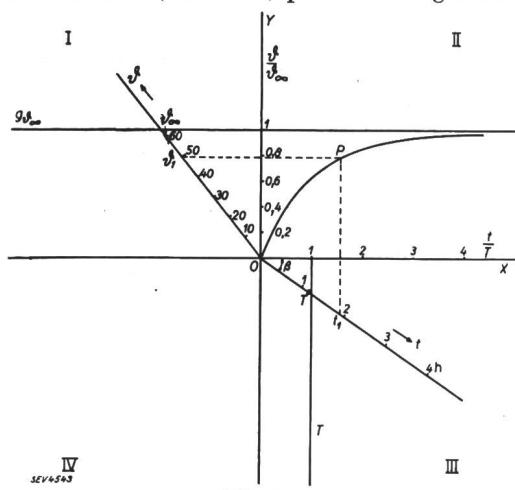


Fig. 1.

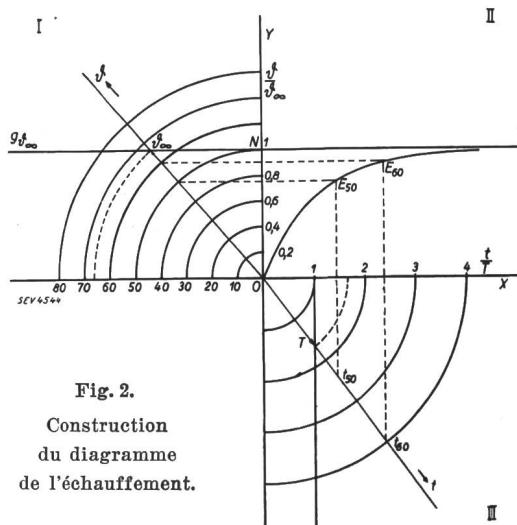
Fig. 1.  
Courbe d'échauffement pour un coefficient de transmission  
de la chaleur constant.

indiquées dans la figure. L'échelle qui convient le mieux pour la graduation  $\vartheta$  est, pour nos besoins, celle choisie dans la fig. 2, où le point  $\frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} = 1$  coïncide avec la division  $N = 50$ . S'il y a lieu on inscrira une deuxième échelle. Des cercles concentriques établiront la graduation collective pour tous les rayons  $\vartheta$  et  $t$ . Après cela on inscrira la courbe universelle suivant l'équation (1<sup>bis</sup>), avec son asymptote, savoir l'horizontale  $g_{\vartheta_\infty}$ .

Munis de ce graphique omnibus nous allons maintenant étudier divers problèmes de la pratique.

a) Echauffement pendant une surcharge (fig. 2).

Supposons qu'un transformateur d'une puissance nominale de 5000 kVA ait en pleine charge des pertes fer de 18 000 W et des pertes cuivre de 54 000 W; que le refroidissement du transformateur soit artificiel, p. ex. par circulation d'huile dans un réfrigérant



## Fig. 2.

### Construction du diagramme de l'échauffement.

à eau, et établi pour un échauffement de l'huile de 50° au-dessus de la température de l'eau, en marche continue à pleine charge. Quelle serait la température finale de l'huile pour une surcharge de 20 %, et pour combien de temps pourra-t-on admettre cette surcharge, en partant du régime à pleine charge, sans que l'échauffement de l'huile dépasse 60 °? On désirerait avoir une courbe de l'échauffement en fonction du temps.

Le poids total sans huile est de 8700 kg, le poids de l'huile 2700 kg. On en calcule la capacité de chaleur à  $C = 0,12 \cdot 8700 + 0,5 \cdot 2700 = 2400$  Wh par degré.

Les pertes totales en marche normale sont:  
 $P_n = 18\,000 + 54\,000 = 72\,000 \text{ W}$ , et pour la surcharge

$$P_s = 18\,000 + 78\,000 = 96\,000 \text{ W.}$$

$\vartheta_n$  désignera la température normale de l'huile correspondant à la dissipation des pertes normales  $P_n$  (ici 50°).

On détermine  $\vartheta_\infty$  et  $T$  définis par

On détermine  $\nu_\infty$  et  $\Gamma$  définis par

$$\vartheta_\infty = \frac{r_s}{K}, \quad T = \frac{c}{K}, \quad K = \frac{P_n}{\vartheta_n} \quad (2)$$

où  $K$  est le coefficient de transmission de la chaleur, pour toute la surface contribuant au refroidissement, en watts par degré.

On trouve  $\vartheta_\infty = 66,5^\circ$  et  $T = 1,67$ . Les points d'intersection des cercles graduateurs pour  $\vartheta = 66,5^\circ$  et  $t = 1,67$  avec  $g_{\vartheta_\infty}$  resp. la verticale par  $\frac{t}{T} = 1$  fixent les axes  $\vartheta$  et  $t$ .

On veut limiter l'échauffement à  $60^\circ$ ; nous trouvons sur le diagramme qu'à l'intervalle  $50^\circ - 60^\circ$  de l'axe  $\vartheta$  correspond la portion  $E_{50} - E_{60}$  de la courbe,

et l'intervalle  $t_{50} - t_{60}$  de l'axe  $t$ . Ce dernier mesure un temps  $t = 1,6$  heure.

Pour donner la courbe d'échauffement demandée il ne reste qu'à reproduire la portion  $E_{50} - E_{60}$  de la courbe à une échelle appropriée.

Le diagramme a sur le calcul l'indiscutable avantage de permettre de se rendre compte immédiatement du résultat à attendre d'un changement de  $K$  ou de  $C$ .

Dans les figures qui suivent nous n'avons plus représenté les parties du graphique omnibus qui ne sont pas nécessaires aux explications.

### b) Refroidissement et service intermittent (fig. 3).

Pour la courbe du refroidissement pur, c'est-à-dire après coupure de toute charge productrice de chaleur, on a la formule classique

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{ou} \quad \frac{t}{T} = \ln \frac{\vartheta_0}{\vartheta} \quad (3)$$

Cette courbe sera inscrite dans le graphique de la même manière que la courbe d'échauffement vue au chapitre a).

Pour l'étude du service intermittent les deux courbes — échauffement et refroidissement — se

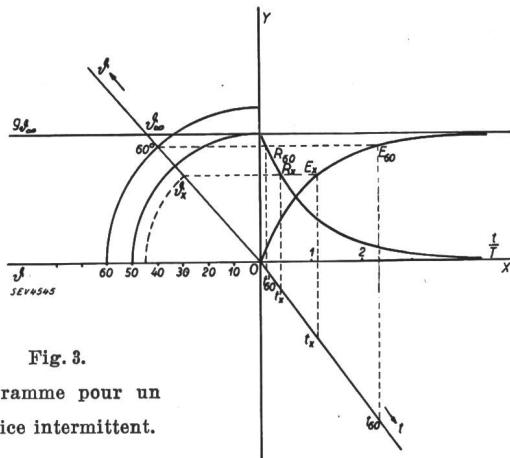


Fig. 3.

Diagramme pour un service intermittent.

trouveront inscrites dans un même diagramme (fig. 3).

Supposons que le transformateur de notre exemple ait à supporter un fonctionnement comportant une surcharge de 20 % entrecoupée d'intervalles de repos complet (la température maximum admise dans l'huile est de 60°) et que la durée de la marche en surcharge soit de 2 heures.

Les axes  $\vartheta$  et  $t$  sont construits comme il a été dit au chapitre a). On tire ensuite l'horizontale 60° —  $E_{60}$ , la verticale  $E_{60} - t_{60}$ , l'on fait  $t_{60} - t_x$  égal 2 heures, puis on tire la verticale  $t_x - E_x$  et l'horizontale  $E_x - \vartheta_x$ . Il résulte une température  $\vartheta_x = 45^\circ$ , jusqu'à laquelle il faut laisser le transformateur se refroidir. Le temps nécessaire à ce refroidissement est mesuré sur l'axe  $t$  entre les verticales  $R_x - t'_x$  et  $R_{60} - t'_{60}$  égal à 1/2 heure.  $E_x - E_{60}$  et  $R_x - R_{60}$  sont les portions de courbes correspondant aux périodes d'échauffement et de refroidissement.

### c) Refroidissement durant une charge réduite, fig. 4. Cycle de charges alternantes (service périodique), fig. 5.

En désignant par  $P_r$  les pertes pour la marche à charge réduite, et par  $\vartheta_r$  la température finale après une durée indéfinie de cette charge, on a

$$P_r = C \frac{d\vartheta}{dt} + K\vartheta$$

ce qui donne comme solution

$$\frac{t}{T} = \ln \frac{\vartheta_0 - \vartheta_r}{\vartheta - \vartheta_r} \quad (4)$$

Cette équation est semblable à celle du refroidissement pur (éq. 3), il suffit de remplacer dans

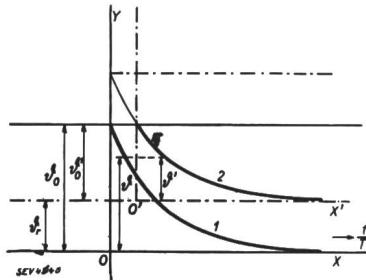


Fig. 4.

Refroidissement après une réduction de charge.

cette dernière  $\vartheta_0$  par  $\vartheta_0 - \vartheta_r$  et  $\vartheta$  par  $\vartheta - \vartheta_r$ , pour pouvoir utiliser la même courbe.

Dans la fig. 4 la courbe 2 est identique à la courbe 1, mais décalée de  $\vartheta_r$ , dans le sens des ordonnées. La courbe 2 réalise dans sa partie dessinée en trait gros, en adoptant la nouvelle origine  $O'$ , l'équation  $\frac{t}{T} = \ln \frac{\vartheta'_0}{\vartheta'} = \ln \frac{\vartheta_0 - \vartheta_r}{\vartheta - \vartheta_r}$ . Dans la dif-

férence des  $\frac{t}{T}$  pour deux points quelconques de la courbe la position de l'origine  $O'$  sur l'axe  $X'$  n'intervient pas. Mais rappelons que nous avons affaire

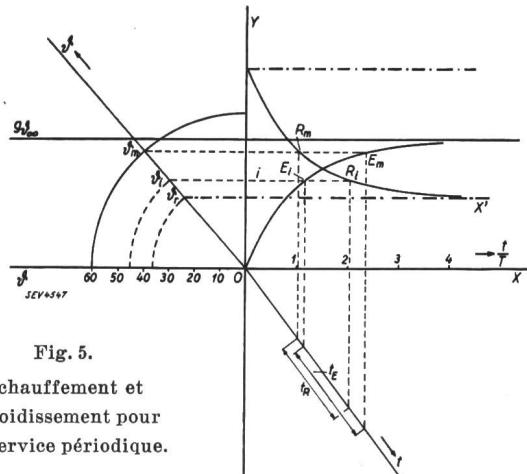


Fig. 5.

Echauffement et refroidissement pour un service périodique.

ici avec une particularité de la courbe logarithmique, de sorte que ce procédé n'est pas applicable sans autre à d'autres courbes.

Nous allons appliquer ce résultat à notre exemple (fig. 5). Supposons qu'après une marche pendant

un certain temps à 6000 kVA la charge se trouve réduite à 4000 kVA. Les pertes qui étaient de 96 kW pour 6000 kVA deviennent  $18 + 34,5 = 52,5$  kW pour 4000 kVA. La température maximum admissible dans l'huile étant  $60^\circ$ , la température finale pour une marche de durée indéfinie à 4000 kVA serait  $\vartheta_r = \frac{P_r}{K}$ , où  $K = \frac{P_n}{\vartheta_n}$ , soit  $36,5^\circ$ .

Nous réunissons de nouveau la courbe de refroidissement avec la courbe d'échauffement dans un système d'axes commun, mais en décalant la courbe de refroidissement parallèlement à elle-même jusqu'à ce que l'axe de ses abscisses se trouve à la hauteur du point  $\vartheta_r$  de l'axe  $\vartheta$ , — cet axe ayant été repris de la fig. 2, de même que l'axe  $t$ . — Dans cette position réciproque des courbes, les conditions de marche peuvent être aisément contrôlées.

En tirant l'horizontale par  $\vartheta_m = 60^\circ$  et une horizontale  $i$  quelconque, on délimite les portions de courbes  $E_m - E_i$  et  $R_m - R_i$ , et l'on obtient le temps nécessaire pour les parcourir en  $t_E$  et  $t_R$ . La durée de la marche à 6000 kVA devant être de 2 heures, la position de l'horizontale  $i$  est déterminée par  $t_E$ ; puis  $t_R$  indiquera la durée minimum de la marche à 4000 kVA nécessaire pour ne pas dépasser  $60^\circ$  durant le cycle. A la fin de cette période on a la température  $\vartheta_i = 45,5^\circ$ .

#### B. Courbe d'échauffement pour un coefficient de transmission de la chaleur variable avec la température.

La courbe d'échauffement classique que nous venons d'étudier ne convient plus dès que le coefficient de transmission de la chaleur n'est pas constant. Dans ce qui suit nous allons étendre notre étude aux cas où ce coefficient varie en fonction de la température.

Nous allons d'abord déduire les formules qui vérifient cette condition.

Tandis que pour un coefficient constant nous avions l'équation différentielle classique

$$P = C \frac{d\vartheta}{dt} + K\vartheta \quad (5)$$

il nous faudra écrire, pour un coefficient variable en fonction de la température

$$P = C \frac{d\vartheta}{dt} + \kappa f(\vartheta) \vartheta \quad (6)$$

Cette forme fondamentale de l'équation différentielle de l'échauffement est valable pour tous les régimes; elle se spécialise sous les formes énumérées ci-dessous pour les trois cas que nous avons déjà distingués plus haut.

$$\text{I. } P = C \frac{d\vartheta}{dt} + \kappa f(\vartheta) \vartheta$$

pour une période d'échauffement,

$$\text{II. } 0 = C \frac{d\vartheta}{dt} + \kappa f(\vartheta) \vartheta$$

pour une période de refroidissement pur,

$$\text{III. } P_r = C \frac{d\vartheta}{dt} + \kappa f(\vartheta) \vartheta$$

pour une période de refroidissement sous une charge réduite, ou à vide après une marche en charge.

Les équations I et III ont la même forme, mais à l'intégration leurs solutions deviendront différentes l'une de l'autre, parce que le rapport de la température instantanée à la température finale qui constituera la variable indépendante, est pour I,  $< 1$  et pour III,  $> 1$ .

#### d) Courbe d'échauffement (équation I).

Nous introduirons, dans les développements qui suivent, deux termes de référence analogues à ceux employés dans les formules classiques de l'échauffement, savoir  $\vartheta_\infty$  qui est la température finale pour une durée indéfinie du régime envisagé, et  $T$  qui est la constante de temps. Mais cette dénommée constante de temps, qu'il faut définir par  $T = \frac{C}{\kappa f(\vartheta)}$ , n'a plus à présent une valeur constante tout le long de l'échauffement, mais elle est une fonction de la température. Nous définissons comme constante de temps, pour les besoins de notre courbe, la valeur bien déterminée subsistant à la température finale  $\vartheta_\infty$ , et posons

$$T_\infty = \frac{C}{\kappa f(\vartheta_\infty)} \text{ et } \vartheta_\infty = \frac{P_s}{\kappa f(\vartheta_\infty)} \quad (7)$$

En développant l'équation I et en introduisant les relations (7), il vient

$$\frac{t}{T_\infty} = \int \frac{dx}{1 - F(x)} \text{ avec } F(x) < 1, \quad (8)$$

$$\text{où } x = \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \text{ et } F(x) = \frac{\vartheta f(\vartheta)}{\vartheta_\infty f(\vartheta_\infty)}$$

Cette intégrale n'a une solution définie que pour certaines formes de la fonction  $F(x)$ . On obtient par exemple avec  $F(x) = x^2 = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}\right)^2$

$$\frac{t}{T_\infty} = \int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{Arctg}(x) + C$$

Par contre l'intégrale (8) peut en principe toujours être résolue par un développement en série.  $F(x)$  étant  $< 1$ , on a

$$\int \frac{dx}{1 - F(x)} = \int (1 + F(x) + [F(x)]^2 + [F(x)]^3 + \dots) dx$$

Ce développement est valable pour une fonction  $F(x) < 1$  quelconque. Pour une fonction de la forme  $F(x) = x^\alpha$  on a

$$\frac{t}{T_\infty} = \int_0^x (1 + x^\alpha + x^{2\alpha} + x^{3\alpha} + \dots) dx$$

et l'on obtient finalement

$$\frac{t}{T_\infty} = \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \left( 1 + \frac{1}{\alpha+1} \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^\alpha + \frac{1}{2\alpha+1} \left[ \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^\alpha \right]^2 + \frac{1}{3\alpha+1} \left[ \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^\alpha \right]^3 + \dots \right) \quad (9)$$

La série converge très rapidement pour de faibles valeurs de  $\frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}$ , mais pour les valeurs plus élevées on aura avantage à utiliser le théorème des accroissements finis.

Nous allons indiquer la marche à suivre pour le calcul, avec  $\alpha = 1,25$  à titre d'exemple.

On a avec  $F(x) = x^{1,25} = \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^{1,25}$

$$\frac{t}{T_\infty} = \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \left( 1 + \frac{1}{2,25} \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^{1,25} + \frac{1}{3,5} \left[ \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^{1,25} \right]^2 + \frac{1}{4,75} \left[ \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^{1,25} \right]^3 + \dots + \frac{1}{n \cdot 1,25 + 1} \left[ \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^{1,25} \right]^n + R \right) \quad (9bis)$$

En vue de se rendre compte de la grandeur de l'erreur possible, lorsque la série est arrêtée avec le membre  $\frac{1}{n \cdot \alpha + 1} \left[ \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^{\alpha} \right]^n$ , on détermine la valeur limite de  $R$ , qui est trouvée

$$R < \frac{1}{n \cdot \alpha + 1} \left[ \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^{\alpha} \right]^n \cdot \frac{\left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^{\alpha}}{1 - \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^{\alpha}}$$

c'est-à-dire que l'erreur est plus petite que le dernier membre dont il a été tenu compte, multiplié

par  $\frac{\left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^{\alpha}}{1 - \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^{\alpha}}$ .

Quatre membres de la série suffisent pour calculer  $\frac{t}{T_\infty}$  à 0,1 % près, si  $\alpha \geq 1,25$  et cela pour des valeurs de  $\frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}$  allant jusqu'à 0,5. Pour les valeurs plus élevées nous aurons recours au théorème des accroissements finis.

$\frac{t}{T_\infty}$  étant une fonction  $f \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)$ , on a

$$f \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} + \Delta \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right) = f \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right) + f' \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} + \Theta \cdot \Delta \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right) \cdot \Delta \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}.$$

Sur l'étendue de la courbe qui pratiquement nous intéresse, on obtient une précision suffisante en admettant pour  $\Theta$  la valeur  $1/2$ , à condition que les espaces  $\Delta \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}$  soient suffisamment réduits. Mais nous pouvons aussi déterminer la valeur exacte de  $\Theta$ , ce qui nous permettra de choisir les  $\Delta \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}$  à notre gré.

En écrivant, pour abréger,  $h$  pour  $\Delta \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}$ , et  $x$  pour  $\frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}$ , on a

$$f(x+h) - f(x) = f'(x + \Theta \cdot h) h$$

en introduisant (éq. 8) les fonctions

$$f(x) = \int \frac{dx}{1 - F(x)} = \int \frac{dx}{1 - x^\alpha} \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1 - x^\alpha}$$

il suit

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{1 - (x + \Theta h)^\alpha} h.$$

En différentiant cette équation selon  $x$ , on obtient

$$f'(x+h) - f'(x) = \frac{1}{1 - (x+h)^\alpha} - \frac{1}{1-x^\alpha} = \alpha \frac{(x+\Theta h)^{\alpha-1}}{[1-(x+\Theta h)^\alpha]^2} \left( 1 + \frac{d(\Theta h)}{dx} \right) h$$

les intervalles  $h$  sont momentanément présumés égaux, pour éviter un membre avec  $\frac{dh}{dx}$ ; du même fait  $\frac{d(\Theta h)}{dx}$  devient négligeable; son influence, minime, est d'ailleurs facile à contrôler en fin de calcul. De ce fait l'équation se réduit à

$$\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{[1 - (x+h)^\alpha] (1 - x^\alpha) h} = \frac{\alpha (x + \Theta h)^{\alpha-1}}{[1 - (x + \Theta h)^\alpha]^2}$$

Pour éliminer la différence  $(x+h)^\alpha - x^\alpha$  qui se compose de deux valeurs sensiblement égales, on peut écrire  $(x+h)^\alpha$  sous la forme  $x^\alpha \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^\alpha$ . Ce terme peut très bien être remplacé par  $x^\alpha \left( 1 + \alpha \frac{h}{x} \right)$  étant donné que la valeur de  $\frac{h}{x}$  ne dépassera guère un dixième. Il suit

$$\frac{x^\alpha \left( 1 + \alpha \frac{h}{x} \right) - x^\alpha}{[1 - x^\alpha \left( 1 + \alpha \frac{h}{x} \right)] [1 - x^\alpha] h} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} \left( 1 + (\alpha-1) \frac{\Theta h}{x} \right)}{\left[ 1 - x^\alpha \left( 1 + \alpha \frac{\Theta h}{x} \right) \right]^2}$$

$$\frac{1}{\left[1-x^\alpha \left(1+\alpha \frac{h}{x}\right)\right] \left[1-x^\alpha\right]} = \frac{1+(\alpha-1) \frac{\Theta h}{x}}{\left[1-x^\alpha \left(1+\alpha \frac{\Theta h}{x}\right)\right]^2}$$

La valeur du terme  $1+(\alpha-1) \frac{\Theta h}{x}$  est très voisine de 1 pour les valeurs que peuvent prendre ici les éléments  $\alpha$ ,  $\Theta$  et  $h$ . On peut le négliger et l'on obtient après quelques transformations

$$\Theta = a - \sqrt{(a-1)a} \text{ avec } a = \frac{1-x^\alpha}{x^\alpha \alpha \frac{h}{x}} \quad (10)$$

Cette expression peut être encore transformée avantageusement. A cet effet on la mettra sous la forme

$$2 \frac{\Theta}{a} - \left(\frac{\Theta}{a}\right)^2 = \frac{1}{a}$$

Les valeurs de  $\Theta$  se trouvant assez voisines de  $\frac{1}{2}$  pour des espaces  $h$  pas trop grands, on posera

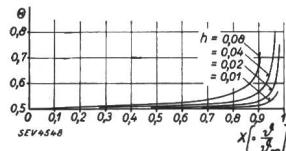


Fig. 6.  
Valeurs de  $\Theta$  dans le théorème des accroissements finis, appliquée au calcul de la courbe d'échauffement, pour  $\alpha = 1,25$ .

$\Theta = 0,5 + \Theta'$  ce qui permet d'augmenter notablement la précision du calcul. Il vient

$$(2a-1) \Theta' - \Theta'^2 = 0,25$$

$\Theta'^2$  est négligeable par rapport aux autres termes, ce qui fait obtenir finalement

$$\Theta' = \frac{1}{8(a-0,5)} \text{ et } \Theta = 0,5 + \Theta' \quad (11)$$

Dans la fig. 6 la valeur de  $\Theta$  est représentée en fonction de  $x$  pour plusieurs valeurs de  $h$ .

La courbe d'échauffement ainsi calculée pour  $\alpha = 1,25$  est représentée dans la fig. 7. A titre de

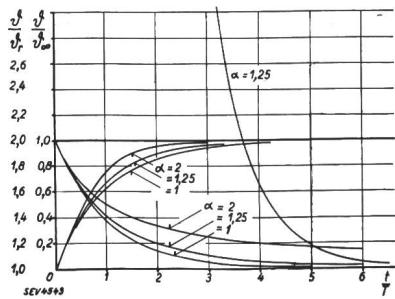


Fig. 7.  
Courbes d'échauffement et de refroidissement pour un coefficient de transmission de la chaleur variable avec la température suivant la loi  $K = x \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_n}\right)^{\alpha-1}$

comparaison ont été également inscrites dans cette figure les courbes pour  $\alpha = 2$  et pour  $\alpha = 1$ , cette dernière étant la courbe d'échauffement classique.

L'utilisation de la courbe est illustrée par la fig. 8.

*Exemple:* Soit à construire un transformateur de 400 kVA destiné à un réseau de traction. La température ambiante peut atteindre 50°; on admet pour la marche à pleine charge un échauffement

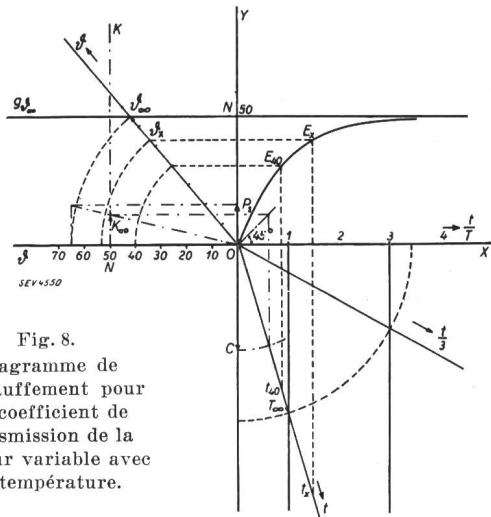


Fig. 8.  
Diagramme de l'échauffement pour un coefficient de transmission de la chaleur variable avec la température.

limite de l'huile de 40°. Le transformateur devra pouvoir supporter une surcharge de 50 % pendant 2 heures sans que l'échauffement de l'huile dépasse 50°. Le refroidissement sera naturel.

Le projet fait ressortir des pertes fer de 2,8 kW et des pertes cuivre de 5,7 kW, soit des pertes totales de 8,5 kW en marche normale. Les pertes totales résultent à 15,6 kW pour la surcharge de 50 %. On a calculé une capacité de chaleur de 820 watt-heures par degré.

L'échauffement final que l'huile atteindrait après une durée indéfinie de la surcharge se calcule à

$$\vartheta_\infty = \left( \frac{P_s}{P_n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \vartheta_n = \left( \frac{15,6}{8,5} \right)^{0,8} \cdot 40 = 65^\circ$$

Le cercle graduateur 65° marque sur  $g_{\vartheta_\infty}$  le point  $\vartheta_\infty$ ; le rayon que l'on fait passer par  $\vartheta_\infty$  constitue l'axe  $\vartheta$  (fig. 8).

D'autre part on a

$$K_\infty = \frac{P_s}{\vartheta_\infty} = \frac{15,6}{65} = 240 \text{ W/degré et}$$

$$T_\infty = \frac{C}{K_\infty} = \frac{820}{240} = 3,42 \text{ h.}$$

Le point d'intersection du cercle graduateur  $t = 3,42$  avec la verticale  $\frac{t}{T} = 1$  fixe l'axe  $t$ . La forte obliquité de l'axe  $t$  le rend incommodé pour les constructions à effectuer. Par contre le point d'intersection du cercle avec la verticale  $\frac{t}{T} = 3$  fournit l'axe  $\frac{t}{3}$  sur lequel on pourra porter plus aisément les valeurs de  $t$  à l'échelle  $\frac{1}{3}$ .

Notre courbe universelle pour  $\alpha = 1,25$  représente, avec les axes  $\vartheta$  et  $t$  que nous venons de construire, le régime exact de la température.

Nous aurons, en partant de la température initiale  $\vartheta = 40^\circ$  sur l'axe  $\vartheta$ , le point  $E_{40}$  de la courbe et de là le point  $t_{40}$  sur l'axe  $t$ . Nous avançons sur l'axe  $t$  d'un intervalle  $t_{40} - t_x = 2$  heures. Au point  $t_x$  correspondra le point  $E_x$  de la courbe et le point  $\vartheta_x$  sur l'axe  $\vartheta$ .  $\vartheta_x$  indique une température de  $53,5^\circ$ . Nous constatons que dans notre projet l'échauffement limite se trouve dépassé et qu'il est à remanier. Mais grâce à notre diagramme nous pouvons aussi nous rendre compte immédiatement pendant quelle fraction de temps la température se trouverait au-dessus de la limite.

Des relations géométriques entre les données qui interviennent dans l'échauffement sont esquissées en traits mixtes, à l'aide desquelles on suit aisément l'effet d'un changement de ces données.

#### e) Courbe de refroidissement.

L'équation différentielle II du refroidissement pur était

$$0 = C \frac{d\vartheta}{dt} + \kappa f(\vartheta) \vartheta$$

nous introduisons la constante de temps valable à la température initiale  $\vartheta_0$ , savoir

$$T_0 = \frac{C}{\kappa f(\vartheta_0)} \quad (12)$$

et obtenons

$$T_0 \frac{f(\vartheta_0)}{f(\vartheta)} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = - dt$$

avec les symboles

$$x = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \text{ et } F(x) = \frac{\vartheta f(\vartheta)}{\vartheta_0 f(\vartheta_0)}$$

il vient

$$\frac{t}{T_0} = - \int_1^x \frac{dx}{F(x)}, \text{ où } F(x) < 1 \quad (13)$$

pour les fonctions de la forme  $F(x) = x^x$  que nous avons à considérer ici, la solution est donnée par

$$\frac{t}{T_0} = \frac{1}{\alpha-1} \left[ \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_1^x = \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right)$$

soit pour  $x = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}$ ,

$$\frac{t}{T_0} = \frac{1}{\alpha-1} \left[ \left( \frac{\vartheta_0}{\vartheta} \right)^{\alpha-1} - 1 \right] \quad (14)$$

Pour les deux cas  $\alpha = 1,25$  et  $\alpha = 2$  que nous avons choisis comme exemples dans le cadre de cette étude, l'équation (14) devient

$$\frac{t}{T_0} = 4 \left( \sqrt[4]{\frac{\vartheta_0}{\vartheta}} - 1 \right) \text{ pour } \alpha = 1,25 \quad (14\text{bis})$$

$$\frac{t}{T_0} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta} - 1 \quad \text{pour } \alpha = 2 \quad (14\text{ter})$$

Il est à remarquer que la courbe de refroidissement n'est plus, ici, l'image réfléchie de la courbe d'échauffement, tel que cela se présente, comme on sait, pour les courbes classiques (voir la fig. 7).

Faisant suite à notre dernier exemple, nous voulons examiner jusqu'à quelle température le transformateur se refroidira pendant 3 heures de repos.

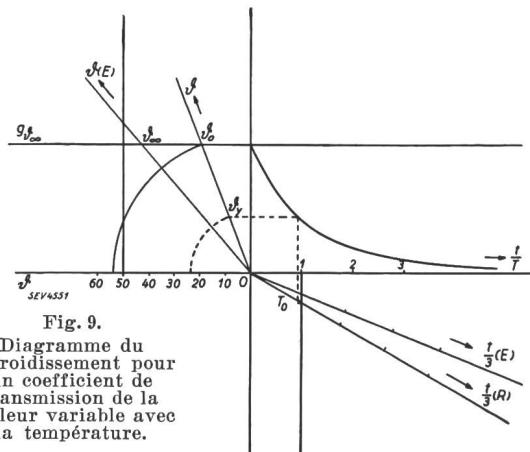


Fig. 9.  
Diagramme du  
refroidissement pour  
un coefficient de  
transmission de la  
chaleur variable avec  
la température.

La température maximum atteinte était  $53,5^\circ$ . Le cercle gradué pour  $\vartheta = 53,5^\circ$ , coupe  $g_{\vartheta_\infty}$  en  $\vartheta_0$  (fig. 9).  $O - \vartheta_0$  fera fonction d'axe de température pour la période de refroidissement<sup>1)</sup>.

L'axe  $t$  du temps se construit par

$$T_0 = T_n \left( \frac{\vartheta_n}{\vartheta_0} \right)^{\alpha-1}$$

l'indice  $n$  désignant le régime normal. Nous trouvons après 3 heures de refroidissement une température  $\vartheta_y = 23,5^\circ$ .

#### f) Refroidissement durant un régime à charge réduite. — Service périodique.

En partant de l'équation III que nous avons établie pour ce cas, et qui dans sa forme était analogue à l'équation I, nous pouvons adopter le développement suivri pour cette dernière, et obtenons

$$\frac{t}{T_r} = \int \frac{dx}{1-F(x)}, \text{ mais avec } F(x) > 1, \quad (15)$$

où  $T_r$  est la constante de temps à la température finale  $\vartheta_r$ , vers laquelle tend le régime à charge réduite, et où

$$x = \frac{\vartheta}{\vartheta_r}, \quad F(x) = \frac{\vartheta f(\vartheta)}{\vartheta_r f(\vartheta_r)}$$

<sup>1)</sup> Il est à noter que l'axe  $O - \vartheta_0$  est le seul axe de température qui puisse convenir pour le refroidissement à partir d'une température  $\vartheta_0$ , et non p. ex. l'axe  $\vartheta$  [E] qu'on avait pour l'échauffement. Cet axe ne peut être utilisé que pour les courbes où  $\alpha = 1$ .

Pour amener l'intégrale à une solution analogue à I, nous substituons  $\frac{1}{y}$  à  $x$ . Avec  $F(x) = x^\alpha$  nous obtenons alors

$$\frac{t}{T_r} =$$

$$\left[ \frac{1}{\alpha-1} y^{\alpha-1} + \frac{1}{2\alpha-1} y^{2\alpha-1} + \frac{1}{3\alpha-1} y^{3\alpha-1} + \dots \right]_{y_0}^{y_1}$$

soit avec  $y = \frac{\vartheta_r}{\vartheta}$

$$\begin{aligned} \frac{t}{T_r} &= \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta} \right)^{\alpha-1} \left[ 1 + \frac{1}{1+\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta} \right)^\alpha + \right. \\ &\quad \frac{1}{1+2\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta} \right)^{2\alpha} + \frac{1}{1+3\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta} \right)^{3\alpha} + \dots + \\ &\quad \left. \frac{1}{1+n\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta} \right)^{n\alpha} + R \right] \\ &- \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta_0} \right)^{\alpha-1} \left[ 1 + \frac{1}{1+\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta_0} \right)^\alpha + \right. \\ &\quad \frac{1}{1+2\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta_0} \right)^{2\alpha} + \frac{1}{1+3\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta_0} \right)^{3\alpha} + \dots + \\ &\quad \left. \frac{1}{1+n\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta_0} \right)^{n\alpha} + R_0 \right] \end{aligned}$$

$$\text{où } R < \frac{1}{1+n\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta} \right)^{n\alpha} \left( \frac{\left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta} \right)^\alpha}{1 - \left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta} \right)^\alpha} \right) \quad (16)$$

pour  $R_0$  on a le terme analogue avec  $\frac{\vartheta_r}{\vartheta_0}$ .

La courbe se calcule de la même manière que la courbe d'échauffement, elle se trouve également représentée dans la fig. 7. Cette courbe est établie pour  $\vartheta_r = 50$ , et cela en faisant entrer dans le calcul la première seulement des deux composantes de l'équation (16). En effet, la deuxième composante, qui n'est autre chose que la constante de l'intégrale, se trouve annulée d'elle-même pour un nouvel axe des ordonnées que l'on fait passer par le point de la courbe qui correspond à  $\frac{\vartheta_r}{\vartheta_0}$ , où  $\vartheta_0$  est la température initiale.

La courbe peut être utilisée pour n'importe quelle valeur de  $\vartheta_r$ , bien qu'elle soit établie pour  $\vartheta_r = 50$ . Il suffit de multiplier les valeurs de  $\vartheta$  par  $\frac{50}{\vartheta_r}$ , car on a  $\frac{\vartheta_r}{\vartheta} = \frac{50}{\vartheta} = \frac{50}{\vartheta''}$ , c'est-à-dire qu'on trouve ainsi un point  $\vartheta''$  de la courbe qui correspond au rapport donné  $\frac{\vartheta_r}{\vartheta}$ . Cette multiplication s'effectuera automatiquement sur le diagramme.

*Exemple:* Supposons que le transformateur de l'exemple cité plus haut doive supporter exceptionnellement un régime forcé, alternant entre 2 heures de pleine charge et 2 heures de surcharge de 50 % (fig. 10).

Les axes  $\vartheta$  et  $t$  pour la période d'échauffement en surcharge ont été construits précédemment dans la fig. 8 et peuvent être reportés de là.

La température finale en pleine charge, qui sera désignée par  $\vartheta_r$ , était  $40^\circ$ . Nous traçons l'horizontale  $r$  par le point  $\vartheta_r = 40$  situé sur l'axe  $\vartheta$  et pla-

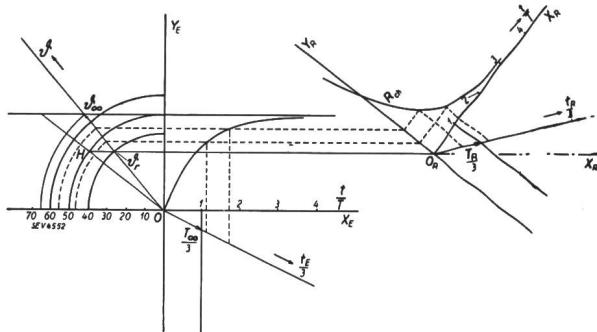


Fig. 10.  
Diagramme du service périodique pour un coefficient de transmission de la chaleur variable avec la température.

cons la courbe  $R_{ch}$  du refroidissement en charge en face de la courbe d'échauffement et à telle hauteur que son axe  $X_R$  se couvre avec l'horizontale  $r$ . Celle-ci coupe le cercle graduateur 50 en  $H$ . Si nous traçons un rayon  $OH$  et projetons sur lui horizontalement l'axe  $\vartheta$ , nous pourrons y lire les températures  $\vartheta$  multipliées par  $\frac{50}{40}$ , c'est-à-dire par  $\frac{50}{\vartheta_r}$ . Il nous suffira donc d'incliner l'axe  $Y_R$  de la courbe de refroidissement jusqu'à être parallèle à  $OH$ , en donnant une rotation au diagramme du refroidissement autour du centre  $O_R$ , pour mettre l'échelle de la courbe  $R_{ch}$  en harmonie avec l'échelle des températures lues sur l'axe  $\vartheta$ .

L'axe  $t$  pour le refroidissement sera construit avec  $T_r = \frac{C}{K_r} = \frac{C}{K_n \left( \frac{\vartheta_r}{\vartheta_n} \right)^{\alpha-1}}$ . Dans le cas présent on a  $\vartheta_r = \vartheta_n$ .

Le tracé en pointillé de la fig. 10 représente le cycle recherché. La température oscillera entre  $47^\circ$  et  $55,8^\circ$ .

**C. Les courbes d'échauffement qui tiennent compte de la variation des pertes cuivre en fonction de la température.**

La résistivité du cuivre des enroulements et avec elle les pertes cuivre varient selon une fonction presque linéaire de la température, exprimée sous la forme  $\varrho_\vartheta = \varrho_0 (1 + a_0 \vartheta)$ . Dès lors les pertes cuivre deviennent

$$P_\vartheta = P_b (1 + a_b \vartheta) \quad (17)$$

où  $a_b$  est le coefficient de température du cuivre pour la température de base  $b^\circ$ ,

$P_b$  sont les pertes cuivre à la température  $b^\circ$ ,  $P_\vartheta$  les pertes cuivre à la température  $(b + \vartheta)^\circ$ .

Nous avons à considérer

1° le refroidissement direct du cuivre dans le milieu refroidissant qui le baigne,

2° le refroidissement de ce milieu lui-même

- a) véhiculant des pertes cuivre seulement,
- b) véhiculant des pertes cuivre et des pertes fer, ces dernières étant constantes.

Nous examinerons en premier lieu le cas 1° qui constitue un cas élémentaire, pour lier ensuite les autres cas au premier par de simples relations.

*Cas 1°.* Le refroidissement du cuivre dans son milieu refroidissant est exprimé par l'équation

$$P_\vartheta = P_b (1 + a_b \vartheta) = C \frac{d\vartheta}{dt} + \kappa f(\vartheta) \vartheta \quad (18)$$

$b$  est ici la température du milieu refroidissant baignant les enroulements,  $\vartheta$  l'échauffement du cuivre au-dessus de  $b$ .

Nous définissons de nouveau la température finale et la constante de temps à la température finale:

$$\vartheta_\infty = \frac{P_\infty}{K_\infty} = \frac{P_b (1 + a_b \vartheta_\infty)}{\kappa f(\vartheta_\infty)} \text{ et } T_\infty = \frac{C}{K_\infty} = \frac{C}{\kappa f(\vartheta_\infty)} \quad (19)$$

nous développons d'après (18) en introduisant (19),

$$\frac{f(\vartheta_\infty) \vartheta_\infty}{f(\vartheta) \vartheta} \cdot \frac{1 + a_b \vartheta}{1 + a_b \vartheta_\infty} = T_\infty \frac{f(\vartheta_\infty)}{f(\vartheta) \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} + 1$$

avec les symboles

$$x = \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}, \quad F(x) = \frac{\vartheta f(\vartheta)}{\vartheta_\infty f(\vartheta_\infty)}, \quad \Phi(x) = \frac{1 + a_b \vartheta}{1 + a_b \vartheta_\infty} \quad (20)$$

il vient

$$\frac{t}{T_\infty} = \int \frac{dx}{\Phi(x) - F(x)} \quad (21)$$

*Cas 2° a.* Dans le cas que nous allons étudier ci-après, l'échauffement  $\vartheta$  sera celui du milieu refroidissant au-dessus de la température ambiante — p. ex. dans le cas d'un transformateur à bain d'huile celui de l'huile; dans le cas d'une machine munie d'un circuit de ventilation fermé, celui de l'air au-

dessus de la température du réfrigérant d'air —. Le cuivre se trouvera porté à un échauffement  $\vartheta_{cu}$  au-dessus du milieu refroidissant — mettons ici de l'huile —, soit  $\vartheta + \vartheta_{cu}$  au-dessus de l'ambiance. On aurait, en conséquence, à remplacer dans l'éq. (21) le terme  $\Phi(x) = \frac{1 + a_b \vartheta}{1 + a_b \vartheta_\infty}$  par un terme  $\Phi(\xi) = \frac{1 + a_0(\vartheta + \vartheta_{cu})}{1 + a_0(\vartheta_\infty + \vartheta_{cu\infty})}$  pour pouvoir appliquer ici cette équation. Désirant cependant conserver la forme simple de  $\Phi(x)$ , nous prendrons comme température de base pour les pertes cuivre non pas l'ambiente, mais l'ambiente plus  $\vartheta_{cu\infty}$ . Ce faisant nous convenons que le cuivre se trouve à son échauffement final  $\vartheta_{cu\infty}$  au-dessus de l'huile pendant toute la période considérée. En effet, en raison de l'ordre de grandeur très différent des constantes de temps pour l'échauffement de l'huile d'une part et celui du cuivre d'autre part, on peut étudier ces échauffements indépendamment l'un de l'autre.

Dans des cas spéciaux, où les deux constantes de temps seraient du même ordre de grandeur, on pourra le plus souvent exprimer  $(\vartheta + \vartheta_{cu})$  par une fonction approchante de  $\vartheta$ , et écrire  $\Phi(\xi) = \frac{1 + a_0 \varphi(\vartheta)}{1 + a_0 \varphi(\vartheta_\infty)}$ , en modifiant les développements qui suivent, en conséquence.

*Cas 2° b.* Lorsque les pertes se composent de pertes fer qui sont constantes et de pertes cuivre, variables avec la température, nous formons le rapport: pertes cuivre sur pertes totales, pour une température de base  $b^\circ$ ,

$$p_b = \frac{P_{cu-b}}{P_b} \quad (22)$$

les pertes totales pour une température  $\vartheta$  deviennent alors

$$P_\vartheta = P_b (1 + p_b a_b \vartheta) \quad (23)$$

Nous obtenons ici également

$$\frac{t}{T_\infty} = \int \frac{dx}{\Phi(x) - F(x)}, \text{ mais avec } \Phi(x) = \frac{1 + p_b a_b \vartheta}{1 + p_b a_b \vartheta_\infty} \text{ et } F(x) = \frac{\vartheta f(\vartheta)}{\vartheta_\infty f(\vartheta_\infty)} \quad (24)$$

c'est-à-dire nous possédons avec ces équations (24) la formule généralisée pour les trois cas considérés.

Nous mettons  $\Phi(x)$  sous une forme plus commode

$$\Phi(x) = \frac{1 + p_b a_b \vartheta}{1 + p_b a_b \vartheta_\infty} = 1 - \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}\right) \frac{p_b a_b \vartheta_\infty}{p_b a_b \vartheta_\infty + 1}$$

qui devient, en introduisant le symbole

$$\beta = \frac{p_b a_b \vartheta_\infty}{p_b a_b \vartheta_\infty + 1} \quad (25)$$

$$\Phi(x) = 1 - (1 - x) \beta$$

Avec une fonction  $F(x) = x^\alpha$  nous avons finalement

$$\frac{t}{T_\infty} = \int \frac{dx}{(1-x^\alpha) - (1-x)\beta} = \int \frac{dx}{1-x^\alpha} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{1-x}{1-x^\alpha} \beta\right]} \quad (26)$$

Le facteur  $\frac{1}{1-\frac{1-x}{1-x^\alpha}\beta}$  est pratiquement constant sur de larges étendues de  $x$ , pour des  $\beta$  allant jusqu'à 0,4, valeur rarement atteinte. Nous écrirons donc

$$\frac{t}{T_\infty} = B \int \frac{dx}{1-x^\alpha} \quad (27)$$

où la constante  $B$  qui remplace  $\psi(x)$  sera calculée pour un  $x$  moyen de l'étendue envisagée.

On aperçoit tout de suite l'avantage de cette formule qui permettra d'utiliser les mêmes courbes que nous avons établies plus haut sans avoir tenu compte de la variation des pertes cuivre avec la température et pour lesquelles nous avions

$$\frac{t}{T_\infty} = \int \frac{dx}{1-x^\alpha}$$

Cette variation se traduira premièrement par une augmentation de  $\vartheta_\infty$ , deuxièmement par une apparente augmentation de la constante de temps qui devient  $B \cdot T_\infty$ .

On a pour la détermination de  $\vartheta_\infty$

$$\vartheta_\infty = \frac{P_{(n)}}{K_\infty} = \frac{P_{(n)} \frac{1+p_b a_b \vartheta_n}{1+p_b a_b \vartheta_n}}{K_n \left(\frac{\vartheta_\infty}{\vartheta_n}\right)^{\alpha-1}}$$

où  $P_{(n)}$  sont les pertes totales du régime envisagé, calculées avec la résistivité du cuivre à la température  $\vartheta_n$ ,

$\vartheta_n$  est la température normale à la charge normale,

$\vartheta'_\infty$  désignant la température finale du régime, calculée comme au chapitre *d* sans tenir compte de la variation de la résistivité, il vient, en introduisant

$$\vartheta'_\infty = \frac{P_{(n)}}{K_n \left(\frac{\vartheta'_\infty}{\vartheta_n}\right)^{\alpha-1}},$$

$$\left(\frac{\vartheta_\infty}{\vartheta'_\infty}\right)^\alpha = \frac{1+p_b a_b \vartheta_n}{1+p_b a_b \vartheta'_\infty} \quad (28)$$

On aura avantage à établir un tableau donnant  $\vartheta_\infty$  en fonction de  $\vartheta'_\infty$  et de  $p_b$ , ou bien de relever  $\vartheta_\infty$  sur un abaque qu'il est facile de construire d'après (28).

On dispose encore des formules

$$P_\infty = P_{(n)} \frac{1+p_b a_b \vartheta_\infty}{1+p_b a_b \vartheta_n} \text{ et } K_\infty = K_n \left(\frac{\vartheta_\infty}{\vartheta_n}\right)^{\alpha-1} \frac{P_\infty}{\vartheta_\infty} \quad (29)$$

pour calculer  $T_\infty = \frac{C}{K_\infty}$ . La multiplication de  $T_\infty$  par  $B$  se traduira par une simple rotation de l'axe  $t$ .

Notons qu'à  $p_b$  et  $a_b$  calculés pour la température de base  $b$  définie pour chacun des cas 1° et 2°, on peut substituer sans grande erreur  $p_n$  et  $a_n$ , valeurs correspondant à la température de marche normale pour laquelle sont données les garanties de l'appareil.

Ce que nous venons d'exposer pour l'échauffement est valable dans le même sens pour le refroidissement sous une charge réduite; il n'y a qu'à remplacer  $\vartheta_\infty$  dans les formules par  $\vartheta_r$ .

#### D. Comparaison des méthodes de calcul en usage.

Afin de fixer les idées sur les erreurs qui peuvent résulter de l'application des différentes méthodes de calcul en usage qui négligent l'influence de l'un ou l'autre des facteurs variables avec la tem-

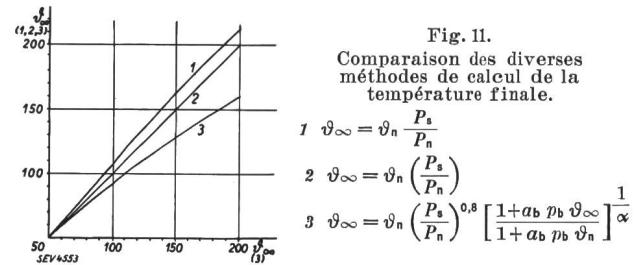


Fig. 11.  
Comparaison des diverses méthodes de calcul de la température finale.

- 1  $\vartheta_\infty = \vartheta_n \frac{P_s}{P_n}$
- 2  $\vartheta_\infty = \vartheta_n \left(\frac{P_s}{P_n}\right)$
- 3  $\vartheta_\infty = \vartheta_n \left(\frac{P_s}{P_n}\right)^{0.8} \left[\frac{1+ab p_b \vartheta_\infty}{1+ab p_b \vartheta_n}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$

pérature, nous avons établi ci-après un tableau comparatif des résultats obtenus avec elles d'une part, et avec les formules exactes d'autre part.

Déjà la fig. 11 représente, en fonction de la réelle température finale  $\vartheta_\infty$ , courbe 1: la température finale  $\vartheta_\infty (\alpha = 1)$  calculée d'après la formule clas-

sique  $\vartheta_\infty = \vartheta_n \frac{P_s}{P_n}$ , courbe 2: la température finale  $\vartheta_\infty (\alpha = 1,25)$  calculée en tenant compte de la variation du coefficient de transmission de la chaleur d'après la formule  $\vartheta_\infty = \vartheta_n \left(\frac{P_s}{P_n}\right)^{0.8}$  pour le refroidissement naturel, courbe 3: la température finale  $\vartheta_\infty$  réelle en tenant compte, en outre, de la variation de résistivité du cuivre et calculée d'après la for-

mule  $\vartheta_\infty = \vartheta_n \left(\frac{P_s}{P_n}\right)^{0.8} \left[\frac{1+p_b a_b \vartheta_\infty}{1+p_b a_b \vartheta_n}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$ , avec  $p_b = 0,75$

et  $a_b = 0,0034$ . Nous constatons les divergences notables qui apparaissent dans le calcul de la température finale.

Le tableau I se rapporte au calcul de  $\frac{d\vartheta}{dt}$ , c'est-à-dire de l'augmentation de température en de-

grés par minute, pour l'huile d'un transformateur soumis à une surcharge après une marche continue à pleine charge. Elle a été calculée, premièrement, pour le début de la surcharge où  $\vartheta = 50^\circ$ , et deuxièmement lorsque l'échauffement de l'huile a augmenté de  $10^\circ$ , donc  $\vartheta = 60^\circ$ .

Données:

Echauffement de l'huile en marche normale  $\vartheta_n = 50^\circ$ ,

Température ambiante  $40^\circ$ ,

Rapport pertes cuivre sur pertes totales, à  $75^\circ$ ,  $p_{75} = 0,75$ ,

Pertes cuivre pour une surcharge de  $25\% = 1,56 \times$  pertes normales,

$b = 10 \cdot 1,56^{0,8} + 40^\circ = 54^\circ$  (échauffement normal du cuivre  $10^\circ$ ),

$$a_b = \frac{1}{234,5 + 54} = 0,00347, \quad \frac{1}{p_{75}} - 1 \\ p_b = 0,74, \text{ calculé au moyen de la relation } \frac{p_b}{1 + a_b (75 - b)} \\ = 1 + a_b (75 - b).$$

formules classiques, donne des résultats absolument erronés. On calcule avec elle des durées de surcharge admissibles qui seraient trop fortes de plus de 50 %.

Les résultats se révèlent analogues pour le calcul de l'échauffement du cuivre.

### E. Conclusion.

Le fait d'introduire comme constante de temps dans les équations de l'échauffement une valeur invariable qui est celle existant à la température finale, permettra de tenir compte d'une façon générale des variations soit des pertes, soit du coefficient de transmission de la chaleur, en fonction du temps aussi bien qu'en fonction de la température, sous la forme suivante

$$\frac{dt}{T_\infty} = \frac{dx}{\Phi(P) - F(K)}$$

Tableau I.

	I	II	III	IV comme I
$\frac{d\vartheta}{dt}$	$\frac{\vartheta_\infty}{T_\infty} \left[ 1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right]$	$\frac{\vartheta_\infty}{T_\infty} \left[ 1 - \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^\alpha \right]$	$\frac{\vartheta_\infty}{T_\infty} \left[ 1 - \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right)^\alpha - \left( 1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right) \beta \right]; \beta = \frac{p_b a_b \vartheta_\infty}{p_b a_b \vartheta_\infty + 1}$	
$\frac{\vartheta_n}{\vartheta}$	50 50	50 50	50 50	50 50
$\vartheta_\infty$	$\vartheta_n \cdot 1,42 = 71$	$\vartheta_n \cdot 1,42^{0,8} = 66$	$\vartheta_n \cdot 1,42^{0,8} \left[ \frac{1 + p_b a_b \vartheta_\infty}{1 + p_b a_b \vartheta_n} \right]^{\frac{1}{\alpha}} = 68,5$	comme II, 66
$\frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}$ $T_\infty$ (en minutes)	0,705 $T_n$	0,758 $T_n \left( \frac{\vartheta_n}{\vartheta_\infty} \right)^{\alpha-1} = T_n \cdot 0,934$	0,73 $T_n \left( \frac{\vartheta_n}{\vartheta_\infty} \right)^{\alpha-1} = T_n \cdot 0,925$	0,758 $T_n$
$\frac{d\vartheta}{dt}$ (en degrés/min.)	$\frac{1}{T_n} \cdot 21$	$\frac{1}{T_n} \cdot 20,7$	$\frac{1}{T_n} \cdot 21,1$	$\frac{1}{T_n} \cdot 16$
$\vartheta$	60	60	60	60
$\vartheta_\infty$	71	66	68,5	66
$\frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}$	0,845	0,91	0,875	0,91
$T_\infty$	$T_n$	$T_n \cdot 0,934$	$T_n \cdot 0,925$	$T_n$
$\frac{d\vartheta}{dt}$	$\frac{1}{T_n} \cdot 11$	$\frac{1}{T_n} \cdot 7,78$	$\frac{1}{T_n} \cdot 10,1$	$\frac{1}{T_n} \cdot 5,95$

Il appert que si l'élévation de température par minute est sensiblement la même au début, pour les trois méthodes I, II et III, elle diffère de plus en plus à mesure que la température augmente. Lorsque, dans le cas présent, l'huile a atteint une température de  $60^\circ$ , on trouve des valeurs trop défavorables de 10 % si l'on calcule d'après la formule classique, et trop favorables de 23 % si l'on calcule en tenant compte de la variation du coefficient de transmission de la chaleur seulement. Mais la méthode IV, que l'on peut également rencontrer en pratique et qui calcule la température finale en tenant compte de la variation du coefficient de transmission de la chaleur, et lui applique ensuite les

Si nous avons p. ex. une charge variable durant la journée et donnée en fonction du temps, on écrira pour les pertes  $P = P_1 \Phi \left( \frac{t}{t_1} \right)$  et on aura

$$\frac{d\left(\frac{t}{t_1}\right)}{T_\infty} = \frac{d\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}\right)}{\Phi\left(\frac{t}{t_1}\right) - F\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}\right)}$$

La solution de l'intégrale sera toujours possible par une intégration graphique. Mais en général les courbes traitées dans cette étude suffiront en pratique.