Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 22 (1931)

Heft: 4

Artikel: Die symbolische Rechnung der Wechselstromtechnik und die ebene Vektorrechnung

Autor: Landolt, Max

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1060496

SCHWEIZERISCHER ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

REDAKTION: Generalsekretariat des Schweiz. Elektrotechn. Vereins und des Verbandes Schweiz. Elektrizitätswerke, Zürich 8, Seefeldstr. 301

VERLAG UND ADMINISTRATION: Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei A.-G., Zürich 4 Stauffacherquai 36/38

XXII. Jahrgang | N° 4 | Mittwoch, 18. Februar 1931

Die symbolische Rechnung der Wechselstromtechnik und die ebene Vektorrechnung*).

Von Prof. *Max Landolt*, Winterthur. 512

Für die graphische Darstellung von Zusammenhängen zwischen sinusförmig veränderlichen Wechselstromgrössen ist heute die Verwendung von Vektoren in Vektordiagrammen unbestrittenes Allgemeingut. Die mathematische Erfassung der gleichen Zusammenhänge ist dagegen umstrittenes Kampfgebiet. Beweis dafür sind die verschiedenen Methoden, die heute nebeneinander bestehen: Die symbolische Rechnung und die ebene Vektorrechnung, die beide in mehreren Varianten vorkommen.

Die mit imaginären Zahlen arbeitenden symbolischen Rechnungen haben für Viele etwas Unvorstellbares und Geheimnisvolles an sich. Um diese Schwierigkeiten zu beseitigen, interpretieren in letzter Zeit mehrere Autoren die symbolische Rechnung vektoriell und andere verwenden die ebene Vektorrechnung. Zumeist bedienen sie sich dabei ganz verschiedener Zeichen und Ausdrucksweisen, so dass sich eine einheitliche Sprache, die überall verstanden werden könnte, nicht herausbilden kann.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden die Elemente von verschiedenen bestehenden Rechnungsarten kurz zusammengestellt und kritisch besprochen. Im zweiten Teil wird gezeigt, wie die symbolische Rechnung unter Beibehaltung einer häufig angewandten Schreibweise vektoriell interpretiert werden kann und sich dann zwanglos den bekannten Regeln der elementaren Vektorrechnung fügt. Im dritten Teil wird gezeigt, wie sich diese mit den Zeichen der symbolischen Rechnung geschriebene ebene Vektorrechnung auf Grundprobleme der Wechselstromtechnik anwenden lässt.

Das Ziel der Arbeit ist, durch Zusammenfassung bestehender Elemente der symbolischen Rechnung bei vektorieller Auslegung zur Vereinheitlichung der mathematischen Behandlungsweise von Wechselstromproblemen beizutragen.

Das Generalsekretariat macht speziell die jüngeren Leser des Bulletin auf die vorliegende Veröffentlichung aufmerksam, als gute Einführung in die in Lehrbüchern und wissenschaftlichen Abhandlungen oft angewandte symbolische Methode.

L'utilisation de vecteurs et de diagrammes vectoriels pour la représentation graphique de rapports entre grandeurs sinusoïdales variables, telles qu'elles se présentent dans l'étude des courants alternatifs, est aujourd'hui incontestablement du domaine public. L'expression mathématique de ces rapports, par contre, est encore fortement discutée. Pour s'en rendre compte, on n'a qu'à considérer les différentes méthodes qui subsistent encore aujourd'hui l'une à côté de l'autre: le calcul symbolique, le calcul vectoriel et leurs nombreuses variantes.

Les méthodes de calcul symbolique, travaillant avec des grandeurs imaginaires, ont pour beaucoup quelque chose de mystérieux et d'irreprésentable. Pour éviter ces difficultés beaucoup d'auteurs ont, ces derniers temps, interprété vectoriellement la méthode symbolique, tandis que d'autres préconisent le calcul vectoriel plan. Généralement ils se servent pour leurs calculs de signes et d'expressions toutes différentes, de sorte qu'il ne peut se former une terminologie unitaire et compréhensible pour tous.

Dans la première partie de cette étude, l'auteur analyse les notions élémentaires des différentes méthodes de calcul. Dans la seconde partie, il montre comment la méthode symbolique peut être interprétée vectoriellement, tout en en maintenant les signes conventionnels courants, et comment cette nouvelle méthode se prête alors aux opérations et règles connues du calcul vectoriel élémentaire. Dans la troisième partie, l'auteur montre de quelle manière le calcul vectoriel plan, utilisant les signes conventionnels de la méthode symbolique, peut être appliqué aux problèmes fondamentaux de la technique des courants alternatifs.

Le but de cette étude est de contribuer à l'uniformisation de l'analyse mathématique des problèmes des courants alternatifs, en condensant les notions élémentaires existantes de la méthode symbolique et en donnant à ces notions une interprétation vectorielle.

Le Secrétariat général recommande spécialement aux jeunes lecteurs du Bulletin l'étude de cette publication, qui est une excellente introduction à la méthode symbolique assez souvent employée actuellement dans les manuels et dans les travaux scientifiques.

Inhaltsverzeichnis.

*) Eingang des Manuskriptes: 2. Juni 1930.

1. Elemente bestehender symbolischer Rechnungen und ebener Vektorrechnungen.

Nach dem Vorbild der Mathematik, die jedem Punkt der Gauss'schen Zahlenebene eine reelle und eine imaginäre Koordinate zuschreibt, wird in der symbolischen Rechnung ein eine Wechselstromgrösse darstellender Diagrammvektor in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine mit der reellen und die andere mit der dazu senkrecht stehenden imaginären Achse eines Koordinatensystems zusammenfällt. Der Spitze des Vektors wird eine komplexe Zahl zugeordnet und damit der ganze Vektor, dessen Fusspunkt mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems zusammenfällt, symbolisch dargestellt. So wird zum Beispiel ein einen beliebigen, sinusförmig veränderlichen Wechselstrom von der effektiven Stromstärke I darstellende Diagrammvektor $\mathfrak{J}$ gemäss Fig. 1 zerlegt.

Die Spitze des Vektors $\mathfrak{J}$, dessen Länge I beträgt, hat die Koordinaten $I \cos \varphi$ und $-j\, I \sin \varphi$. Man erhält so folgenden Ausdruck:

$$\mathfrak{J} = I \cos \varphi - I \sin \varphi.$$

Als Zeichen für die imaginäre Einheit schreibt die symbolische Rechnung den Buchstaben j, da der in der Mathematik dafür verwendete Buchstabe i für den Momentanwert der Stromstärke reserviert ist.

In Fig. 1 ist die Lage der Achsen die in der Mathematik übliche: Die Verdrehung der positiven reellen Halbachse um 90° entgegengesetzt der Drehrichtung des Uhrzeigers ergibt die Lage der positiven imaginären Halbachse. Der Winkel φ, der die Voreilung des Vektors $\mathfrak{J}$ gegenüber einem in der positiven reellen Halbachse liegend gedachten Bezugsvektor angibt, ist im Uhrzeigersinn positiv gerechnet.

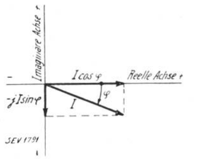

Fig. 1.

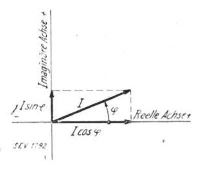

Fig. 2.

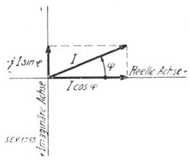

Fig. 3.

Bezeichnet man gemäss der internationalen Festsetzung [1]) den Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn als positiv, so muss ein Vektor $\mathfrak{J}$, der einem in der positiven reellen Halbachse liegenden Bezugsvektor voreilt, in den Quadranten zu liegen kommen, der durch die beiden positiven Halbachsen eingeschlossen ist (Fig. 2).

Im zugehörigen symbolischen Ausdruck erscheint entsprechend der veränderten Lage der imaginären Komponente an Stelle des Minus-Zeichens ein Plus-Zeichen:

$$\mathfrak{J} = I \cos \varphi + j\, I \sin \varphi.$$

Behält man als positiven Drehsinn den Gegenuhrzeigersinn bei, so erhält man eine dritte Darstellungsweise, die wieder zu dem zuerst erhaltenen symbolischen Ausdruck führt, indem man die beiden imaginären Halbachsen miteinander vertauscht (Fig. 3):

$$\mathfrak{J} = I \cos \varphi - j\, I \sin \varphi.$$

Diese drei Darstellungsarten eines Vektors durch eine komplexe Zahl sind in der Literatur der symbolischen Rechnung von bekannten Autoren angewendet worden. Die vierte noch mögliche Darstellungsart, die wieder zum zweiten symbolischen Ausdruck führt, kommt nicht vor.

Die *erste* Darstellungsart verbreitete sich vor allem, bevor international der Gegenuhrzeigersinn als positiver Vektordrehsinn festgesetzt war [1]). Sie wurde von *Arnold* [2]) und *Roessler* [3]) angewendet. In Anlehnung an deren Standardwerke wird sie neuerdings noch von *Hugo Ring* [4]) benützt.

Als Beispiel sei die elektromotorische Kraft einer Wechselstromquelle G in Funktion des von ihr durch eine mit einem Ohmschen Widerstand R in Serie geschalteten Drosselspule L getriebenen Stromes $\mathfrak{J}$ dargestellt. Die Kreisfrequenz sei ω (Fig. 4).

Unter Berücksichtigung der im Schaltungsschema (Fig. 4) eingezeichneten Bezugssinne [5]) erhält man das Vektordiagramm der Fig. 5.

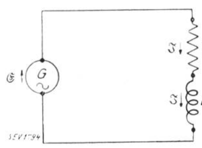

Fig. 4.

Der zugehörige symbolische Ausdruck lautet:

$$\mathfrak{E} = R\,\mathfrak{J} - j\,\omega L\,\mathfrak{J} = (R - j\,\omega L)\,\mathfrak{J}.$$

Die *zweite* Darstellungsart entspricht der internationalen Festsetzung des positiven Vektordrehsinnes. Sie beginnt gegenwärtig, sich allgemein

[1]) Die Commission Electrotechnique Internationale (CEI) legte im September des Jahres 1911 in Turin fest: «Bei der graphischen Darstellung von periodisch veränderlichen elektrischen und magnetischen Grössen soll der dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt gerichtete Drehsinn die Phasenvoreilung angeben.» ETZ 1911, S. 1059.

[2]) E. Arnold, Die Wechselstromtechnik, Band I, 2. Auflage, S. 37, Verlag Jul. Springer, 1910.

[3]) G. Roessler, Die Fernleitung von Wechselströmen, Verlag Jul. Springer, 1905.

[4]) Hugo Ring, Die symbolische Methode zur Lösung von Wechselstromaufgaben, 2. Auflage, S. 2, Verlag Jul. Springer, 1928.

[5]) Die Berücksichtigung der Bezugssinne ist für die Rechnung ebenso wichtig wie für das Vektordiagramm, worüber näheres zu finden ist bei A. v. Brunn, Die Bedeutung des Bezugssinnes im Vektordiagramm, Bull. SEV 1922, S. 386.

durchzusetzen. Als Benützer dieser Darstellungsart seien beispielsweise folgende Autoren genannt: *Casper*[6]), *Hauffe*[7]), *Noether*[8]), *Richter*[9]), *Thomälen*[10]). Für das vorher behandelte Beispiel ergibt sich das Vektordiagramm (Fig. 6):

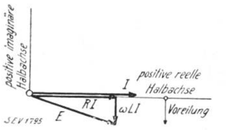

Fig. 5.

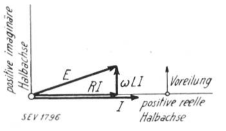

Fig. 6.

Der zugehörige symbolische Ausdruck bekommt die Form:

$$\mathfrak{E} = R\,\mathfrak{J} + j\,\omega\,L\,\mathfrak{J} = (R + j\,\omega\,L)\,\mathfrak{J}$$

Die *dritte* Darstellungsart wird von einigen Autoren angewendet, die ursprünglich den Uhrzeigersinn als Vektordrehsinn betrachteten und sich nachher der internationalen Festsetzung anschlossen. Sie konnten ihre früheren Gleichungen beibehalten, wenn sie mit der Veränderung des Drehsinnes gleichzeitig die Lage der positiven imaginären Halbachse umklappten, also so legten, dass sie gegenüber der positiven reellen Halbachse um 90° im Uhrzeigersinne verdreht war. Als Beispiel sei *Ossanna*[11]) genannt. Das Vektordiagramm des behandelten Beispieles entspricht dann Fig. 7.

Der zugehörige symbolische Ausdruck lautet:

$$\mathfrak{E} = R\,\mathfrak{J} - j\,\omega\,L\,\mathfrak{J} = (R - j\,\omega\,L)\,\mathfrak{J}$$

Wie bisher dargelegt worden ist, zerlegt die symbolische Rechnung die von ihr behandelten Wechselstromgrössen in zwei Komponenten verschiedener Art, nämlich in eine reelle (wirkliche) und in eine imaginäre (unvorstellbare). Damit schafft sie gegenüber den Vektordiagrammen etwas

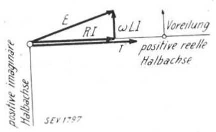

Fig. 7.

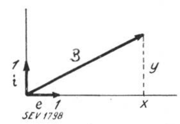

Fig. 8.

Neues, Unerwünschtes. Die Ebene, die für die *graphische* Darstellung der Zusammenhänge durch Vektoren in allen Richtungen homogen ist, bekommt bei der *mathematischen* Behandlung durch die symbolische Rechnung eine axiale Struktur. Die Wechselstromgrössen sind aber ihrer Natur nach niemals komplex, also nicht aus einer reellen und einer imaginären Komponente zusammengesetzt. Um diesen Zwiespalt zu beheben, entstand in den letzten Jahren in der einschlägigen Literatur eine Strömung, die die in den Vektordiagrammen *graphisch* vollständig reell dargestellten Zusammenhänge auch *mathematisch* mit vollständig reellen Mitteln zu erfassen sucht. Die symbolische Rechnung wird dabei vektoriell interpretiert oder gar durch eine neuartige Vektorrechnung vollständig ersetzt. Die nachfolgend erwähnten drei Methoden verlassen in der Reihenfolge der Aufzählung immer mehr die Auffassung und die Ausdrucksweise der bisherigen symbolischen Rechnung.

Rothe[12]) rechnet zwar mit komplexen Zahlen, legt ihnen aber eine vollständig geometrisch-vektorielle Bedeutung zu. Die Schreibweise bleibt dabei in der Hauptsache die bisher übliche. Er führt einen Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ und den dazu senkrechten Einheitsvektor $\mathfrak{i}$ ein, die beide in der Zeichnungsebene liegen. Jeder beliebige Vektor lässt sich dann als vektorielle Summe von Vielfachen der beiden Einheitsvektoren auffassen.

Gemäss Fig. 8 lautet dann die Gleichung des Vektors $\mathfrak{z}$:

$$\mathfrak{z} = X\,\mathfrak{e} + Y\,\mathfrak{i}$$

Nach Rothe stellt man Spannung, Stromstärke, Impedanz usw. gleichermassen als Vektoren dar. Die vektorielle Deutung der Gleichung für die elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}$ einer Wechselstromquelle, die durch eine Impedanz $\mathfrak{z}$ die Stromstärke $\mathfrak{J}$ treibt, stösst dabei auf Schwierigkeiten.

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{z}\,\mathfrak{J}$$

Die elektromotorische $\mathfrak{E}$ erscheint als Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{J}$. Rechnet man dieses Produkt nach den Regeln der Vektoranalysis aus, so ergibt sich die elektromotorische Kraft entweder als Skalar oder als Vektor, der auf der durch die Vektoren der Stromstärke und der Impedanz festgelegten Zeichnungsebene senkrecht steht, je nachdem man das Produkt als skalares (inneres) oder vektorielles (äusseres) auffasst. Da nun aber der Vektor der elektromotorischen Kraft weder ein Skalar ist, noch auf der Zeichnungsebene senkrecht steht, wird eine Erweiterung der Vektoranalysis nötig, wenn man die Auffassung und Schreibweise der symbolischen Rechnung auch bei vektorieller Auslegung unverändert beibehalten will; wenn man also elektromotorische Kraft, Stromstärke, Impedanz usw. gleichermassen durch Verwendung

[6]) Ludwig Casper, Einführung in die komplexe Behandlung von Wechselstromaufgaben, S. 20, Verlag Jul. Springer, 1929.

[7]) Gerhard Hauffe, Die symbolische Behandlung der Wechselströme, S. 20, Nr. 991 der Sammlung Göschen, Verlag Walter de Gruyter & Co., 1928.

[8]) F. Noether, Abschnitt «Vektordiagramme und komplexe Rechnung» in E. v. Rziha und J. Seidener, Starkstromtechnik, Taschenbuch für Elektrotechniker, Band I, 7. Auflage, S. 38, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1930.

[9]) Rudolf Richter, Elektrische Maschinen, Band I, S. 55, Verlag Jul. Springer, 1924.

[10]) Adolf Thomälen, Kurzes Lehrbuch der Elektrotechnik, 10. Auflage, S. 137, Verlag Jul. Springer, 1929.

[11]) G. Ossanna, Abschnitt «Symbolische Behandlung stationärer Wechselstromerscheinungen» in E. v. Rziha und J. Seidener, Starkstromtechnik, Taschenbuch für Elektrotechniker, Band I, 6. Auflage, S. 58, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1922.

[12]) Rudolf Rothe, Abschnitt «Komplexe Zahlen und Vektoren einer Ebene», in Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch, Band I, 25. Auflage, S. 140, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1925.

deutscher (Fraktur-) Buchstaben [13]) als Vektoren schreibt und auffasst.

Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, definiert Rothe ein neues (drittes) Produkt zwischen zwei Vektoren. Dieses erhält indessen keinen charakteristischen Namen, durch den es leicht von den beiden bisher bekannten Produkten unterschieden werden könnte.

Es seien die beiden Vektoren $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ gegeben.

$$\mathfrak{z} = |\mathfrak{z}|\,(\cos\varphi\;\mathfrak{e} + \sin\varphi\;\mathfrak{i})$$

$$\mathfrak{z}' = |\mathfrak{z}'|\,(\cos\varphi'\;\mathfrak{e} + \sin\varphi'\;\mathfrak{i}).$$

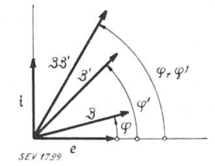

Fig. 9.

Für das neue Produkt, dessen Ergebnis ein in der Ebene der beiden Vektoren $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ gelegener Vektor ist, gilt die Definitionsgleichung:

$$\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{z}' = |\mathfrak{z}|\cdot|\mathfrak{z}'|\,\{\cos(\varphi+\varphi')\;\mathfrak{e} + \sin(\varphi+\varphi')\;\mathfrak{i}\}.$$

Die durch diese Gleichungen beschriebenen Verhältnisse sind in Fig. 9 dargestellt. Dieses neue Vektorprodukt könnte — mindestens für die Bedürfnisse der Wechselstromtechnik — vermieden werden, wenn man darauf verzichtet, die Impedanz, Admittanz usw. gleicherweise wie die elektromotorische Kraft, die Stromstärke usw. als Vektoren aufzufassen und zu schreiben. Dieser Verzicht liegt sogar recht nahe, denn die Impedanz, die Admittanz usw. sind keine sinusförmig veränderlichen Wechselstromgrössen und sie weisen gegenüber diesen keine Phasenverschiebungen auf.

Kafka [14]) unterscheidet zwei Arten von Vektoren: Zeitvektoren (Stromstärke, Spannung) und Koordinatenvektoren (Impedanz, Admittanz). Dementsprechend hat sein Symbol $\mathfrak{j}$ zwei verschiedene Bedeutungen: Es ist einerseits ein «Dreher», der einen mit ihm verbundenen Vektor im positiven Sinne (entgegengesetzt dem Uhrzeiger) um 90° verdreht, und anderseits ein Einheitsvektor in Richtung der positiven Blindachse, die der imaginären Achse der bisherigen symbolischen Rechnung entspricht. Ebenso erhalten die Koordinatenvektoren zwei Bedeutungen: Einerseits sind sie, wie ihr Name sagt, eigentliche Vektoren, anderseits wirken sie bei «multiplikativer Verknüpfung» mit Zeitvektoren als «Drehstrecker», indem sie den daneben geschriebenen Zeitvektor zugleich drehen und strecken (oder verkürzen). Bei der «multiplikativen Verknüpfung» zweier Koordinatenvektoren erscheint dann wie bei *Rothe* [12]) das früher erwähnte dritte Produkt zweier Vektoren. Statt der in der symbolischen Rechnung vielfach angewandten Schreibweise mit Potenzen von e verwendet Kafka «Rundpfeilsymbole», mit denen genau gleich gerechnet wird wie mit den imaginären e-Potenzen.

[13]) Diese Schreibweise findet man sehr häufig, man vergleiche zum Beispiel E. Arnold, Die Wechselstromtechnik, Band I, 2. Auflage, S. 64, Verlag Jul. Springer, 1910.

[14]) Heinrich Kafka, Die ebene Vektorrechnung und ihre Anwendungen in der Wechselstromtechnik, Teil I: Grundlagen, Nr. 22 der Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, Verlag B. G. Teubner, 1926.

Es gilt also die Analogie:

$$e^{j\varphi} = \overset{\curvearrowleft}{\varphi}.$$

Diese neue Schreibart gibt in anschaulicher Weise die Verdrehung wieder und soll drucktechnische Vorteile bieten. Sie hat indessen den unbestreitbaren Nachteil, *neu* zu sein, also die Vielheit der symbolischen Schreibweisen und Darstellungsarten um eine weitere, bisher unbekannte, zu vermehren.

Natalis [15]) hat nicht nur eine neue Schreibweise, sondern eine ganz neue Methode entwickelt. Er fasst die Impedanz usw. mathematisch als Vektorverhältnisse auf, die graphisch durch zwei Vektoren (Spannung und Stromstärke) gegeben sind. Er bringt damit eine Darstellung in Vorschlag, die dem Wesen der Impedanz, Admittanz usw. sehr gut entspricht. Die Rechnungen werden ganz im Rahmen der üblichen Vektorrechnung durchgeführt. Es treten dabei weder begriffliche Schwierigkeiten noch Unstimmigkeiten auf. Die Gleichungen, in denen die Impedanzen usw. als Vektorquotienten erscheinen, nehmen ganz neuartige und ungewohnte Formen an. Ohne eingehendes Studium der neuen Methode kann man eine in Natalisscher Ausdrucksweise geschriebene Arbeit nicht lesen, auch wenn man die bisherige Form der symbolischen Rechnung beherrscht. Das ist ein grosser Nachteil, der eine weitgehende Verbreitung dieser neuen Methode wohl sehr erschweren wird. Der Unterschied der bisherigen symbolischen und der Natalisschen Schreibweise sei an einem Beispiel gezeigt. Gesucht sei die resultierende Impedanz, die durch zwei in Reihe geschaltete bekannte Impedanzen gebildet wird.

Bisherige symbolische Darstellung (Fig. 10):

$$\mathfrak{Z}_1 = R_1 + j\,\omega\,L_1$$
$$\mathfrak{Z}_2 = R_2 + j\,\omega\,L_2$$
$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 = R_1 + j\,\omega\,L_1 + R_2 + j\,\omega\,L_2$$
$$\mathfrak{Z} = R_1 + R_2 + j\,(\omega\,L_1 + \omega\,L_2).$$

Fig. 10.

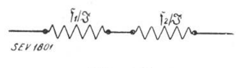

Fig. 11.

Natalissche Darstellung (Fig. 11):

$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{J}} = \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{J}} + \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{J}} = \frac{\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2}{\mathfrak{J}}$$

2.
Zusammenfassung bestehender Elemente zu einer ebenen Vektorrechnung unter Verwendung üblicher Schreibweisen.

Die nachfolgenden Darlegungen beschränken sich auf *ebene* Vektoren, obwohl sie sinngemäss auch auf räumliche Vektoren ausgedehnt werden

[15]) Friedrich Natalis, Die Berechnung von Gleich- und Wechselstromsystemen, 2. Auflage, S. 17, Verlag Jul. Springer, 1924.

könnten. Diese Vereinfachung ist dadurch gerechtfertigt, dass die gewonnenen Resultate später (im dritten Teil der vorliegenden Arbeit) auf Probleme der Wechselstromtechnik angewendet werden sollen und dort nur ebene Vektoren vorkommen. Im übrigen kommt die beabsichtigte spätere Anwendung auf die Wechselstromtechnik nur insofern zum Ausdruck, als Quotienten von Vektoren besonders eingehend behandelt werden.

Als Voreilung gilt gemäss der internationalen Festsetzung [1]) eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn. Die Bezeichnungen halten sich an die Zeichen des AEF [16]), soweit die CEI keine solchen festgelegt hat.

Von der Summe, der Differenz, dem skalaren (innern) Produkt und dem vektoriellen (äussern) Produkt von Vektoren braucht hier nichts gesagt zu werden. Diese Elemente der Vektorrechnung sind in allen Handbüchern und Taschenbüchern zu finden, so dass sie als bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Ueberdies herrscht dabei gemäss Satz 10 des AEF [16]) bereits Einheitlichkeit.

Die Behandlung der Quotienten von Vektoren ist dagegen selten, es soll daher hierauf näher eingegangen werden. Hiezu erweist sich eine Definition als notwendig, die indessen kaum in der Form neu ist und inhaltlich längst im Gebrauche steht.

21.
Der Quotient von zwei zueinander senkrecht stehenden, gleichlangen Vektoren.

Es seien zwei Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{W}$ gegeben. Gemäss Satz 10 des AEF [16]) gilt dann für die Beträge (Längen) dieser Vektoren folgende Schreibweise:

$$|\mathfrak{B}| = B \qquad |\mathfrak{W}| = W.$$

Mit Zuhülfenahme der Einheitsvektoren $\mathfrak{B}^0$ (sprich *B* hoch Null) und $\mathfrak{W}^0$ kann dann geschrieben werden:

$$\mathfrak{B} = B\mathfrak{B}^0 \qquad \mathfrak{W} = W\mathfrak{W}^0.$$

Es soll nun folgende *Definition* getroffen werden:

Unter der Voraussetzung, dass erstens die Beträge *B* und *W* der beiden Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{W}$ einander gleich sind,

$$B = W \tag{1}$$

und dass zweitens der Vektor $\mathfrak{B}$ gegenüber dem Vektor $\mathfrak{W}$ um 90 Grad positiv verdreht ist (also um 90 Grad entgegengesetzt dem Uhrenzeigersinn) (Fig. 12), wird der Quotient $\dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}}$ zur Abkürzung identisch gleich j gesetzt:

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}} \equiv j. \tag{2}$$

Gl. (2) ist die Definitionsgleichung für den von nun an fortwährend gebrauchten *Vektorquotienten j.* Was für ein Resultat kommt heraus, wenn man einen Vektor mit j multipliziert oder dividiert?

[16]) AEF. Verhandlungen des Ausschusses für Einheiten und Formelgrössen in den Jahrei 1907 bis 1927, herausgegeben im Auftrage des AEF von J. Wallot, Verlag Jul. Springer, 1928.

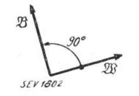

Fig. 12.

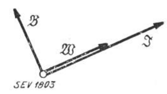

Fig. 13.

Es soll zuerst die *Multiplikation,* also der Ausdruck $j\,\mathfrak{J}$ untersucht werden. Ersetzt man gemäss der Definitionsgleichung (2) j durch den Quotienten $\dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}}$ so wird:

$$j\,\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{J}}{\mathfrak{W}}. \tag{3}$$

Ueber die *absolute* Lage der beiden Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{W}$ wurde anlässlich der Definition von j keine Voraussetzung gemacht. Die Lage eines der beiden Vektoren darf also frei gewählt werden. So kann angenommen werden, dass der Vektor $\mathfrak{W}$ mit dem Vektor $\mathfrak{J}$ in Phase liege. Fig. 13 veranschaulicht die Verhältnisse, die sich durch diese Annahme ergeben. Der Quotient $\dfrac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{W}}$ kann leicht gebildet werden, da es sich dabei um den Quotienten von zwei in Phase liegenden Vektoren handelt. Er bedeutet ein Messen des Vektors $\mathfrak{J}$ mit dem Vektor $\mathfrak{W}$, was dasselbe gibt, wie wenn der Betrag *I* des Vektors $\mathfrak{J}$ durch den Betrag *W* des Vektors $\mathfrak{W}$ dividiert wird. Es gilt also die Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{W}} = \frac{I}{W}. \tag{4}$$

Setzt man diese Beziehung in Gl. (3) ein, so erhält diese veränderte Gestalt:

$$j\,\mathfrak{J} = \frac{I\,\mathfrak{B}}{W}. \tag{3a}$$

Stellt man den Vektor $\mathfrak{B}$ als Produkt aus dem Betrag *B* und dem Einheitsvektor $\mathfrak{B}^0$ dar und berücksichtigt man, dass nach der für die Definition von j gemachten Voraussetzung [gemäss Gl. (1)] der Betrag *B* gleich dem Betrag *W* ist, so wird schliesslich:

$$j\,\mathfrak{J} = \frac{I\,B\,\mathfrak{B}^0}{W} = I\,\mathfrak{B}^0. \tag{3b}$$

Die rechte Seite dieser Gl. (3b), das Produkt aus dem Betrage *I* und dem Einheitsvektor $\mathfrak{B}^0$, stellt einen neuen Vektor dar, der $\mathfrak{J}'$ genannt sei.

$$I\,\mathfrak{B}^0 = \mathfrak{J}'$$
$$j\,\mathfrak{J} = \mathfrak{J}'. \tag{4}$$

Seine *Länge* ist gleich der Länge *I* des Vektors $\mathfrak{J}$ und seine *Richtung* ist die Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{B}_0$, die mit der Richtung des Vektors $\mathfrak{B}$ übereinstimmt. Zufolge der gemachten Voraussetzung ist sie um 90^0 im Gegenuhrzeigersinn gegenüber der Richtung des Vektors $\mathfrak{W}$ und damit auch gegenüber der Richtung des Vektors $\mathfrak{J}$ verdreht. Das Produkt $j\,\mathfrak{J}$, gebildet aus dem Vektorquotienten j und einem beliebigen Vektor $\mathfrak{J}$, stellt somit einen neuen Vektor dar, der gleich lang ist wie der Vektor $\mathfrak{J}$, gegen ihn jedoch um einen rechten Winkel im positiven Drehsinne verdreht ist. Der Vektorquotient j ist somit ein *rechtwinkliger Dreher* oder ein *rechtwinkliger Versor* [17]).

Es ist ohne weiteres verständlich, dass der Ausdruck

$$(-j)\,\mathfrak{J} = -j\,\mathfrak{J}$$

auch einen zum Vektor $\mathfrak{J}$ senkrecht stehenden Vektor darstellt. Er sei $\mathfrak{J}''$ genannt.

$$-j\,\mathfrak{J} = \mathfrak{J}''.$$

Fasst man den Ausdruck $j\,\mathfrak{J}$ zu einem Vektor $\mathfrak{J}'$ zusammen, $j\,\mathfrak{J} = \mathfrak{J}'$,

so wird $-j\,\mathfrak{J} = -\mathfrak{J}'$ und somit $\mathfrak{J}'' = -\mathfrak{J}'$. (5)

Der neue Vektor $\mathfrak{J}''$ ist gleich lang wie der Vektor $\mathfrak{J}'$, also ebenso lang wie der Vektor $\mathfrak{J}$. Er ist jedoch dem Vektor $\mathfrak{J}'$ entgegengesetzt gerichtet, was durch das negative Vorzeichen ausgedrückt ist. Fig. 14 veranschaulicht diese Beziehungen.

Das Produkt $(-j)\,\mathfrak{J}$, gebildet aus dem negativ genommenen Vektorquotienten j und einem beliebigen Vektor $\mathfrak{J}$, stellt somit einen neuen Vektor dar, der gleich lang ist wie der Vektor $\mathfrak{J}$, gegen ihn jedoch um einen rechten Winkel im negativen Drehsinne verdreht ist. Der negative Vektorquotient $-j$ ist somit ein *negativer rechtwinkliger Dreher* oder *Versor*.

Es soll nun noch die *Division*, also der Ausdruck $\frac{\mathfrak{J}}{j}$ untersucht werden. Benützt man zum Ersatz von j wieder die Definitionsgleichung (2), so erhält man

$$\frac{\mathfrak{J}}{j} = \frac{\mathfrak{W}\,\mathfrak{J}}{\mathfrak{B}}. \tag{6}$$

[17]) Fasst man in räumlicher Vektorrechnung die Vektoren $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{B}$ als in der XZ-Ebene liegend auf, so lassen sie sich durch die in der X- und der Z-Achse liegenden Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{k}$ ausdrücken. Dabei sei angenommen, dass der Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ dem Einheitsvektor $\mathfrak{i}$ voreilt.

$$\mathfrak{W} = W_X\,\mathfrak{i} + W_Z\,\mathfrak{k} \qquad \mathfrak{B} = -W_Z\,\mathfrak{i} + W_X\,\mathfrak{k}$$

Multipliziert man den Vektor $\mathfrak{W}$ mit dem in der Richtung der y-Achse liegenden Einheitsvektor $\mathfrak{j}$ vektoriell, so erhält man nach den Regeln der Vektorrechnung:

$$[\mathfrak{W}\,\mathfrak{j}] = W_X\,[\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}] + W_Z\,[\mathfrak{k}\,\mathfrak{j}] = W_X\,\mathfrak{k} + \mathfrak{W}_Z\,(-\mathfrak{i}) = \mathfrak{B}.$$

Entsprechend gilt dann:

$$\mathfrak{j} = \left[\frac{1}{\mathfrak{W}}\,\mathfrak{B}\right]$$

Dabei ist aber zu bedenken, dass die Vektorrechnung im allgemeinen reziproke Vektoren nicht kennt. Die letzte Gleichung entspricht der Identitäts-Gleichung (2):

$$j \equiv \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}}.$$

Der Buchstabe j des lateinischen Alphabetes bedeutet einen rechtwinkligen Versor, der ohne räumliche Auslegung besteht. Dagegen stellt der Buchstabe $\mathfrak{j}$ des deutschen (Fraktur-) Alphabetes einen im Raume als rechtwinkligen Versor wirkenden Einheitsvektor dar.

Allgemein erscheint der Quotient der rechtwinkligen Vektoren $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{B}$, sei er nun in der ebenen Vektorrechnung als Operator j oder als räumlicher Vektor $\mathfrak{j}$ eingeführt, als Spezialfall einer Quaternion. Siehe hierüber:

J. Kopeliowitch, Théorie des Quaternions, Thèse No. 707 Université de Genève, 1922.

A. Byk, Komplexe und ebene Vektorrechnung in der Wechselstromtechnik, in W. Petersen, Forschung und Technik, Verlag von Jul. Springer, Berlin, 1930.

In diesem Falle nimmt man zweckmässig an, dass die Richtung des Vektors $\mathfrak{B}$ mit der Richtung des Vektors $\mathfrak{J}$ zusammenfalle. Indem man wieder berücksichtigt, dass die beiden Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{W}$ gleich lang sind, dass also die Beträge B und W gleich gross sind, erhält man ähnlich wie vorher bei der Multiplikation:

$$\frac{\mathfrak{J}}{j} = \frac{I\,\mathfrak{W}}{B} \tag{6a}$$

$$\frac{\mathfrak{J}}{j} = \frac{I\,W\,\mathfrak{W}^0}{B} = I\,\mathfrak{W}^0. \tag{6b}$$

Die rechte Seite dieser Gl. (6b), das Produkt aus dem Betrage I und dem Einheitsvektor $\mathfrak{W}^0$ stellt einen neuen Vektor dar, der $\mathfrak{J}'''$ genannt sei.

$$I\,\mathfrak{W}^0 = \mathfrak{J}''' = \frac{\mathfrak{J}}{j}. \tag{7}$$

Fig. 15 veranschaulicht diese Verhältnisse.

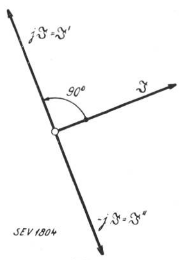

Fig. 14.

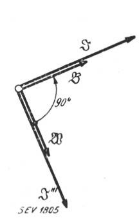

Fig. 15.

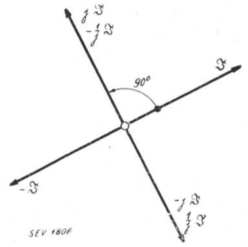

Fig. 15.

Die *Länge* des Vektors $\mathfrak{J}'''$ ist gleich der Länge I des Vektors $\mathfrak{J}$ und seine *Richtung* ist die Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{W}^0$, die mit der Richtung des Vektors $\mathfrak{W}$ übereinstimmt. Zufolge der anlässlich der Definition von j über die relative Lage der Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{W}$ gemachten Voraussetzung ist somit die Richtung des neuen Vektors $\mathfrak{J}'''$ um 90° im Uhrzeigersinn gegen die Richtung des Vektors $\mathfrak{J}$ verdreht.

Der Quotient $\frac{\mathfrak{J}}{j}$, gebildet aus dem Vektorquotienten j und einem beliebigen Vektor $\mathfrak{J}$, stellt somit einen neuen Vektor dar, der gleich lang ist wie der Vektor $\mathfrak{J}$, gegen ihn jedoch um einen rechten Winkel im negativen Drehsinn verdreht ist. Der reziproke Vektorquotient $\frac{1}{j}$ ist somit ein *negativer rechtwinkliger Dreher* oder *Versor*. Ganz ähnlich wie vorher bei der Multiplikation lässt sich noch die Wirkung der Division eines Vektors durch $-j$ zeigen. Man erhält das Ergebnis:

Der Quotient $\frac{\mathfrak{J}}{-j}$, gebildet aus dem negativ genommenen Vektorquotienten $-j$ und einem beliebigen Vektor $\mathfrak{J}$, stellt einen neuen Vektor dar, der gleich lang ist wie der Vektor $\mathfrak{J}$, gegen ihn jedoch um einen rechten Winkel im positiven Drehsinne verdreht ist. Der reziproke Vektorquotient $\frac{1}{-j}$ ist somit ein *positiver rechtwinkliger Dreher* oder *Versor*. Die vier Resultate sind graphisch in der Fig. 16 zusammengestellt.

Es zeigt sich, dass einerseits die Symbole j und $\frac{1}{-j}$, anderseits $-j$ und $\frac{1}{j}$ auf einen als Faktor daneben gesetzten Vektor $\mathfrak{J}$ dieselbe Wirkung ausüben. Sie ersetzen einander und dürfen deshalb einander gleichgesetzt werden. Man erhält so die beiden Gleichungen:

$$j = \frac{1}{-j} \tag{8a}$$

$$-j = \frac{1}{j} \tag{8b}$$

Ferner zeigt sich, dass man durch Multiplikation des Vektors $(j\mathfrak{J})$ mit dem rechtwinkligen Versor j den Vektor $-\mathfrak{J}$ erhält. Das führt zu der Gleichung:

$$j\,(j\,\mathfrak{J}) = -\mathfrak{J}. \tag{8c}$$

Aehnlich gilt auch die Gleichung:

$$-j\,(-j\,\mathfrak{J}) = -\mathfrak{J}. \tag{8d}$$

Die vier Gleichungen (8a), (8b), (8c) und (8d) lassen sich alle leicht in die Gleichung (9) umformen, die aussagt, dass das Quadrat des rechtwinkligen Versors j gleich der negativen Einheit ist.

$$j^2 = -1. \tag{9}$$

Für die maginäre Einheit gilt bekanntlich die Definitionsgleichung 10:

$$i \equiv +\sqrt{-1} \tag{10}$$

Hieraus folgt: $i^2 = -1.$ (11)

Die Uebereinstimmung der Gleichungen (9) und (11) zeigt, wie nahe der rechtwinklige Versor j und die imaginäre Einheit i miteinander verwandt sind. Ein Unterschied besteht lediglich darin, dass die imaginäre Einheit i ohne geometrische Deutung zu Recht besteht, während der rechtwinklige Versor j ein Quotient gleichlanger, zueinander senkrecht stehender Vektoren ist.

Aus der formalen Uebereinstimmung der beiden Gleichungen (9) und (11) folgt die bedeutungsvolle Tatsache:

Für den rechtwinkligen Versor j gelten dieselben Rechnungsregeln wie für die imaginäre Einheit i.

22.
Der Operator, der Quotient von zwei beliebigen Vektoren.

Es seien gemäss Fig. 17 zwei Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{J}$ gegeben, deren Richtungen sich um den Winkel φ unterscheiden.

Der Quotient dieser beiden Vektoren sei mit $\dot{Z}$ (sprich Z-Punkt) bezeichnet. Es gelte also die *Definitionsgleichung:*

$$\dot{Z} \equiv \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}}. \tag{12}$$

Löst man Gl. (12) nach dem Vektor $\mathfrak{U}$ auf. so erhält man die Gleichung:

$$\mathfrak{U} = \dot{Z}\,\mathfrak{J}. \tag{13}$$

Der Vektorquotient $\dot{Z}$ ist ein *Operator,* der mit einem beliebigen Vektor $\mathfrak{J}$ multipliziert, einen andern beliebig liegenden Vektor beliebiger Länge ergibt. Da sowohl der Operator $\dot{Z}$ wie der rechtwinklige Versor j Vektorquotienten sind, bestehen zwischen ihnen offenbar Zusammenhänge. Diese sollen jetzt näher untersucht werden, Zu diesem Zwecke soll der Vektor $\mathfrak{U}$ senkrecht und parallel zum Vektor $\mathfrak{J}$ in die Komponenten $\mathfrak{U}_b$ und $\mathfrak{U}_w$ zerlegt werden. Fig. 18 zeigt diese Zerlegung. In

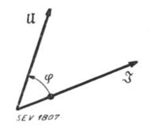

Fig. 17.

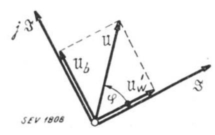

Fig. 18.

dieser Figur ist ausserdem der Vektor $j\,\mathfrak{J}$ eingetragen. Da der Vektor $\mathfrak{U}_w$ in Phase mit dem Vektor $\mathfrak{J}$ liegt, geht er aus ihm durch Multiplikation mit einem *Faktor* hervor, der Z_w genannt sei.

$$\mathfrak{U}_w = Z_w\,\mathfrak{J}. \tag{14a}$$

Da ebenso der Vektor $\mathfrak{U}_b$ in Phase mit dem Vektor $j\,\mathfrak{J}$ liegt, geht er aus ihm ebenfalls durch Multiplikation mit einem *Faktor* hervor, der Z_b genannt sei.

$$\mathfrak{U}_b = Z_b\,j\,\mathfrak{J}. \tag{14b}$$

Berücksichtigt man, dass der Vektor $\mathfrak{U}$ die Summe der beiden Komponenten $\mathfrak{U}_w$ und $\mathfrak{U}_b$ ist, so erhält man bei Berücksichtigung der Ansätze (14a) und (14b):

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_w + \mathfrak{U}_b = Z_w\mathfrak{J} + Z_b j\,\mathfrak{J} = (Z_w + jZ_b)\,\mathfrak{J}. \tag{15}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Gl. (13), so findet man leicht:

$$\dot{Z} = Z_w + j\,Z_b. \tag{16}$$

Da man einen Vektor $\mathfrak{U}$ immer senkrecht und parallel zu einem andern Vektor $\mathfrak{J}$ zerlegen kann, gilt allgemein der Satz:

Man kann einen *Operator* $\dot{Z}$ immer als Binom schreiben, dessen erster Teil ein reiner *Faktor* und dessen zweiter Teil ein mit dem *rechtwinkligen Versor* j multiplizierter *Faktor* ist.

Drückt man die Läegen U, U_w und U_b der Vektoren $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_w$ und $\mathfrak{U}_b$ durch die Länge I des Vektors $\mathfrak{J}$ aus, so erhält man:

$$U_w = Z_w\,I \tag{17a}$$

$$U_b = Z_b\,I \tag{17b}$$

$$U = \sqrt{U_w^2 + U_b^2} = \sqrt{Z_w^2 + Z_b^2}\,I. \tag{18}$$

Man bezeichnet den Ausdruck $\sqrt{Z_w^2 + Z_b^2}$ als *Betrag* Z des *Operators* $\dot{Z}$ und schreibt:

$$|\dot{Z}| = Z$$

$$\boxed{Z = \sqrt{Z_w^2 + Z_b^2}} \tag{19}$$

Zwischen den Beträgen U und I gilt also die Gleichung:

$$U = Z\,I \tag{20}$$

Die analoge, zwischen den Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{J}$ bestehende Gl. (13) sei zum Vergleich nochmals angeschrieben:

$$\mathfrak{U} = \dot{Z}\,\mathfrak{J}. \tag{13}$$

Die Grösse der beiden Faktoren *Zw* und *Zb* hängt von den Beträgen *U* und *I* der beiden Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{J}$, sowie von dem von ihnen eingeschlossenen Winkel φ ab. Unter Berücksichtigung der Gleichungen 17a, 17b und 18 findet man anhand Fig. 18 sofort folgende Beziehungen:

$$\cos\varphi = \frac{Z_w I}{Z I}$$

$$\boxed{Z_w = Z \cos\varphi} \tag{21a}$$

$$\sin\varphi = \frac{Z_b I}{Z I}$$

$$\boxed{Z_b = Z \sin\varphi} \tag{21b}$$

Setzt man diese Ausdrücke in Gl. (15) ein, so erhält man:

$$\mathfrak{U} = Z\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)\,\mathfrak{J}$$

$$\boxed{\dot{Z} = Z\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)} \tag{22}$$

Gemäss Gl. (20) hat der Vektor $Z\mathfrak{J}$ die Länge des Vektors $\mathfrak{U}$. Die Richtung ist aber offenbar die Richtung des Vektors $\mathfrak{J}$. Für die Drehung bei gleichbleibender Länge muss somit das Glied $(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ die Ursache sein. In der Tat wird der Betrag dieses Gliedes:

$$|\cos\varphi + j\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1.$$

Der Vektor $Z\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)\,\mathfrak{J}$ ist also gleich lang wie der Vektor $Z\,\mathfrak{J}$, weist aber ihm gegenüber die Verdrehung um den Winkel φ auf.

Der Betrag Z ist somit ein reiner Faktor, das Glied $(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ dagegen ein reiner Dreher oder Versor. Ganz allgemein lässt sich sagen:

Man kann einen *Operator* $\dot{Z}$ immer als Produkt aus einem reinen *Faktor* Z (dem Betrag des Operators) und einem reinen *Versor* $\cos\varphi + j\sin\varphi$ schreiben.

Multipliziert man einen Vektor mit einem Operator, so bewirkt der Betrag des Operators eine Veränderung des Betrages des Vektors und der Versor des Operators bewirkt eine Verdrehung des Vektors.

Für den gemäss Gl. (22) in der Produkt-Form des Operators $\dot{Z}$ enthaltenen Versor $\cos\varphi + j\sin\varphi$ lässt sich noch eine andere Schreibweise begründen, die zufolge ihrer Kürze oft mit Vorteil angewendet wird. Man denke sich den durch die Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{J}$ eingeschlossenen Winkel φ in m Teile zerlegt, wobei die Zahl m unendlich gross werden soll [18]).

Aus Fig. 19 liest man ab:

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_0 + \Delta\mathfrak{U}_0,$$

Dabei kann wegen der Kleinheit des Winkels φ/m gesetzt werden:

$$\Delta\mathfrak{U}_0 = j\,\mathfrak{U}_0 \frac{\varphi}{m} \qquad \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_0\left(1 + \frac{j\varphi}{m}\right).$$

Da der Vektor $\mathfrak{U}_0$ die Richtung des Vektors $\mathfrak{J}$ hat, gilt:

$$\mathfrak{U}_0 = Z\mathfrak{J} \qquad \mathfrak{U}_1 = Z\left(1 + \frac{j\varphi}{m}\right)\mathfrak{J}.$$

Ebenso wird: $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1\left(1 + \dfrac{j\varphi}{m}\right)$

$$\mathfrak{U}_2 = Z\left(1 + \frac{j\varphi}{m}\right)^2\mathfrak{J},$$

$$\mathfrak{U} = \lim\left(Z\left(+\frac{j\varphi}{m}\right)^m\mathfrak{J}\right)$$

$$\mathfrak{U} = Z\left(\lim\left(1 + \frac{j\varphi}{m}\right)^m\right)\mathfrak{J}.$$

Setzt man $n = \dfrac{j\varphi}{m}$, so erhält man:

$$\mathfrak{U} = Z\left(\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{j\varphi}\mathfrak{J}.$$

Da nun $\lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ für unendlich grosses n den Grenzwert 2,718 ... annimmt, den die Mathematik mit e bezeichnet, kann man schreiben:

$$\mathfrak{U} = Z\,e^{j\varphi}\,\mathfrak{J}$$

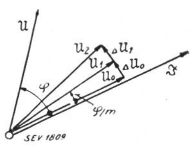

Fig. 19.

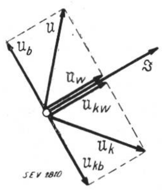

Fig. 20.

$$\boxed{\dot{Z} = Z\,e^{j\varphi}} \tag{23}$$

Dass e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist, hat hier wenig zu bedeuten. Die Schreibweise mit Potenzen von e drückt nicht mehr aus als die bisherige Schreibweise des reinen Versors: $\cos\varphi + j\sin\varphi$.

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi} \tag{24}$$

Liegen gemäss Fig. 20 zu einem Vektor $\mathfrak{J}$ zwei gleich lange Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_k$ symmetrisch, so findet man durch Zerlegung in Komponenten leicht die beiden Operatoren $\dot{Z}$ und $\dot{Z}_k$, die den Vektor $\mathfrak{J}$ in die beiden symmetrischen Vektoren überführen. Für die beiden gesuchten Operatoren gilt der Ansatz:

$$\dot{Z} = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}} \qquad \dot{Z}_k = \frac{\mathfrak{U}_k}{\mathfrak{J}}. \tag{25}$$

Drückt man den beiden Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_k$ durch die Summe von zwei Komponenten senkrecht und parallel zum Vektor $\mathfrak{J}$ aus, so wird:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_w + \mathfrak{U}_b \qquad \mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}_{kw} + \mathfrak{U}_{kb}$$

$$\mathfrak{U} = Z_w\mathfrak{J} + j\,Z_b\,\mathfrak{J} \qquad \mathfrak{U}_k = Z_w\mathfrak{J} - j\,Z_b\,\mathfrak{J}.$$

[18]) Diese Ableitung folgt der Darstellung von Adolf Thomälen, Kurzes Lehrbuch der Elektrotechnik, 10. Auflage, S. 139, Verlag Jul. Springer, 1929.

Durch Einsetzen findet man:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{Z} &= Z_w + j\,Z_b \\ \dot{Z}_k &= Z_w - j\,Z_b \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(26a) \\ &(26b) \end{aligned}$$

Für die Beträge der beiden Operatoren gemäss Gl. (19) erhält man:

$$|\dot{Z}| = \sqrt{Z_w^2 + Z_b^2} = Z \quad |\dot{Z}_k| = \sqrt{Z_w^2 + Z_b^2} = Z$$

$$\boxed{|\dot{Z}| = |\dot{Z}_k| = Z} \qquad (27)$$

Man bezeichnet zwei Operatoren $\dot{Z}$ *und* $\dot{Z}_k$, die sich nur dadurch unterscheiden, dass ihr den rechtwinkligen Versor j enthaltender Teil mit umgekehrten Vorzeichen erscheint, als *konjugierte Operatoren.* Die Beträge von zwei konjugierten Operatoren sind einander gleich.

Multipliziert man konjugierte Operatoren mit demselben Vektor $\mathfrak{J}$, so bringen beide die gleiche Längenänderung, aber entgegengesetzt gleiche Verdrehungen hervor.

In der Schreibweise mit Potenzen von e erhält man deshalb für konjugierte Operatoren die Formen:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{Z} &= Z\,e^{j\varphi} \\ \dot{Z}_k &= Z\,e^{-j\varphi} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(28a) \\ &(28b) \end{aligned}$$

23.
Rechnungsregeln für Vektoren und Operatoren.

Für die ebene Vektorrechnung sollen dieselben Rechnungsregeln gelten, die für die allgemeine, räumliche Vektorrechnung bestehen. Sie werden als bekannt vorausgesetzt.

Sind Vektoren unter Benützung von Operatoren durch andere Vektoren ausgedrückt, so erfordert deren Verknüpfung Rechnungsregeln für Operatoren. Die einfachsten dieser Regeln sollen kurz dargelegt werden. Zufolge der früher konstatierten Uebereinstimmung zwischen dem rechtwinkligen Versor j und der imaginären Einheit i decken sie sich mit den Rechnungsregeln für komplexe Zahlen.

231.
Summe.

Gegeben seien in Binom-Form die beiden Operatoren:

$$\dot{Z}_1 = Z_w + j\,Z_{1b} \text{ und } \dot{Z}_2 = Z_{2w} + j\,Z_{2b},$$

die zusammen mit einem Vektor $\mathfrak{J}$ die beiden Vektoren $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ festlegen:

$$\mathfrak{U}_1 = \dot{Z}_1\,\mathfrak{J} \text{ und } \mathfrak{U}_2 = \dot{Z}_2\,\mathfrak{J}.$$

Gesucht sei der den Vektor $\mathfrak{J}$ in die Vektorsumme $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$ überführende Operator, sowie dessen Betrag. Aus dem Gegebenen folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 &= \dot{Z}_1\,\mathfrak{J} + \dot{Z}_2\,\mathfrak{J} \\ \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 &= (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)\,\mathfrak{J}. \end{aligned} \qquad (29)$$

Der gesuchte Operator ist gleich der Summe der beiden gegebenen Operatoren. Diese soll nun unter Berücksichtigung des gemachten Ansatzes berechnet werden. Man erhält:

$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = Z_{1w} + j\,Z_{1b} + Z_{2w} + j\,Z_{2b}.$$

Durch Ordnen findet man für die Bildung der Summe von zwei Operatoren die Rechnungsregel:

$$\boxed{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = Z_{1w} + Z_{2w} + j\,(Z_{1b} + Z_{2b})} \qquad (30)$$

Gemäss Gl. (19) erhält man hieraus für den Betrag der Summe von zwei Operatoren:

$$\boxed{|\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2| = \sqrt{(Z_{1w} + Z_{2w})^2 + (Z_{1b} + Z_{2b})^2}} \qquad (31)$$

Fig. 21 enthält die nach den Regeln der Vektorrechnung erfolgte Summenbildung.

Aus dieser Figur liest man ab:

$$\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 = \Big(Z_{1w} + Z_{2w} + j\,(Z_{1b} + Z_{2b})\Big)\,\mathfrak{J}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Gl. (29), so findet man die in Gl. 30 ausgedrückte Rechnungsregel bestätigt.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck, das den Vektor $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$ als Hypothenuse enthält, findet man für den Betrag $|\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2|$ der Vektorsumme:

$$|\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2| = \sqrt{(Z_{1w} + Z_{2w})^2 + (Z_{1b} + Z_{2b})^2}\;I.$$

Nun muss das Verhältnis der Beträge $|\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2|$ und I gleich den Betrag der gesuchten Operatorensumme sein.

$$|\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2| = \frac{|\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2|}{I}.$$

Durch Vergleich der beiden letzten Ausdrücke findet man die in Gl. (31) ausgedrüchte Rechnungsregel bestätigt.

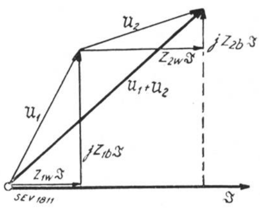

Fig. 21.

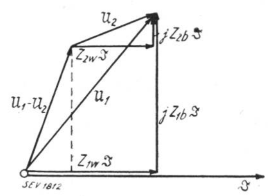

Fig. 22.

232.
Differenz.

Gegeben seien wie vorher wieder die beiden Operatoren $\dot{Z}_1$ und $\dot{Z}_2$. Gesucht sei der den Vektor $\mathfrak{J}$ in die Vektordifferenz $\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{U}_2$ überführende Operator, sowie dessen Betrag. Aus dem Gegebenen folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_1 - \mathfrak{U}_2 &= \dot{Z}_1\,\mathfrak{J} - \dot{Z}_2\,\mathfrak{J} \\ \mathfrak{U}_1 - \mathfrak{U}_2 &= (\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2)\,\mathfrak{J}. \end{aligned} \qquad (32)$$

Der gesuchte Operator ist gleich der Differenz der beiden gegebenen Operatoren. Diese soll nun unter Berücksichtigung des schon vorher gemachten Ansatzes berechnet werden. Man erhält:

$$\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2 = Z_{1\,w} + j\,Z_{1\,b} - (Z_{2\,w} + j\,Z_{2\,b}).$$

Durch Ordnen findet man für die Bildung der Differenz von zwei Operatoren die Rechnungsregel:

$$\boxed{\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2 = Z_{1\,w} - Z_{2\,w} + j\,(Z_{1\,b} - Z_{2\,b})} \tag{33}$$

Gemäss Gl. (19) erhält man hieraus für den Betrag der Differenz von zwei Operatoren:

$$\boxed{|\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2| = \sqrt{(Z_{1\,w} - Z_{2\,w})^2 + (Z_{1\,b} - Z_{2\,b})^2}} \tag{34}$$

Fig. 22 enthält die nach den Regeln der Vektorrechnung erfolgte Differenzbildung.

Aus dieser Figur liest man ab:

$$\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{U}_2 = \Big(Z_{1\,w} - Z_{2\,w} + j\,(Z_{1\,b} - Z_{2\,b})\Big)\,\mathfrak{J}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Gl. (32), so findet man die in Gl. (33) ausgedrückte Rechnungsregel bestätigt.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck, das den Vektor $\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{U}_2$ als Hypothenuse enthält, findet man analog wie vorher die in Gl. (34) enthaltene Rechnungsregel für den Betrag der Operatorendifferenz bestätigt.

233.
Produkt.

Gegeben seien in Binom-Form die beiden Operatoren:

$$\dot{Z}_1 = Z_{1\,w} + j\,Z_{1\,b} \qquad \dot{Z}_2 = Z_{2\,w} + j\,Z_{2\,b},$$

wobei der Operator Z_2 zusammen mit dem Vektor $\mathfrak{U}_2$ einen Vektor $\mathfrak{J}$ und den Operator $\dot{Z}_1$ zusammen mit dem Vektor $\mathfrak{J}$ den Vektor $\mathfrak{U}_1$ festlegt.

$$\mathfrak{J} = \dot{Z}_2\,\mathfrak{U}_2 \qquad \mathfrak{U}_1 = \dot{Z}\,\mathfrak{J}.$$

Gesucht sei der den Vektor $\mathfrak{U}_2$ in den Vektor $\mathfrak{U}_1$ überführende Operator, sowie dessen Betrag und Versor. Aus dem Gegebenen folgt:

$$\mathfrak{U}_1 = \dot{Z}_1\,\dot{Z}_2\,\mathfrak{U}_2. \tag{35*}$$

Der gesuchte Operator ist gleich dem Produkt der beiden gegebenen Operatoren. Dieses soll nun unter Berücksichtigung des gemachten Ansatzes berechnet werden. Man erhält:

$$\dot{Z}_1\,\dot{Z}_2 = Z_{1\,w}\,Z_{2\,w} + j\,(Z_{1\,w}\,Z_{2\,b} + Z_{1\,b}\,Z_{2\,w}) + j^2\,Z_{1\,b}\,Z_{2\,b}.$$

Berücksichtigt man, dass gemäss Gl. (9) für j zufolge der dadurch angedeuteten zweimaligen Verdrehung um einen rechten Winkel -1 gesetzt werden darf, so erhält man für das Produkt von zwei Operatoren die Rechnungsregel:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{Z}_1\,\dot{Z}_2 = {} & Z_{1\,w}\,Z_{2\,w} - Z_{1\,b}\,Z_{2\,b} \\ & + j\,(Z_{1\,w}\,Z_{2\,b} + Z_{1\,b}\,Z_{2\,w}).\end{aligned}} \tag{35}$$

Hieraus kann gemäss Gl. (19) der Betrag berechnet werden.

$$|\dot{Z}_1\,\dot{Z}_2| = \sqrt{(Z_{1\,w}\,Z_{2\,w} - Z_{1\,b}\,Z_{2\,b})^2 + (Z_{1\,w}\,Z_{2\,b} + Z_{1\,b}\,Z_{2\,w})^2}.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck aus und ordnet man, wobei sich einige Glieder herausheben, so erhält man:

$$|\dot{Z}_1\,\dot{Z}_2| = \sqrt{(Z_{1\,w}^2 + Z_{1\,b}^2)\,(Z_{2\,w}^2 + Z_{2\,b}^2)}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt das Produkt der Beträge der beiden gegebenen Vektoren dar. Man erhält somit für den Betrag des Produktes von zwei Operatoren die Rechnungsregel:

$$\boxed{|\dot{Z}_1\,\dot{Z}_2| = Z_1\,Z_2} \tag{36}$$

Für die Produktbildung ist die Verwendung der Produkt-Form der Operatoren, insbesondere die Schreibweise mit e-Potenzen vorteilhaft.

$$\dot{Z}_1 = Z_1\,e^{j\varphi_1} \qquad \dot{Z}_2 = Z_2\,e^{j\varphi_2}.$$

Die Beträge Z_1 und Z_2 sind nach Gl. (19) zu ermitteln. Man erhält:

$$Z_1 = \sqrt{Z_{1\,w}^2 + Z_{1\,b}^2} \qquad Z_2 = \sqrt{Z_{2\,w}^2 + Z_{2\,b}^2}$$

Aus der Binom-Form lassen sich gemäss den Gl. (21a) und (21b) auch die Funktionen cos und sin der von den Vektoren eingeschlossenen Winkel φ_1 und φ_2 berechnen. Es werden:

$$\cos\varphi_1 = \frac{Z_{1\,w}}{Z_1} \qquad \cos\varphi_2 = \frac{Z_{2\,w}}{Z_2}$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{Z_{1\,b}}{Z_1} \qquad \sin\varphi_2 = \frac{Z_{2\,b}}{Z_b}$$

Hieraus kann man die Winkel φ_1 und φ_2 bestimmen. Es sind somit die für die Produkt-Form nötigen Bestimmungsstücke der beiden Operatoren bekannt. Durch Bildung des gesuchten Produktes erhält man:

$$\dot{Z}_1\,\dot{Z}_2 = Z_1\,e^{j\varphi_1}\,Z_2\,e^{j\varphi_2}.$$

Indem man die den rechtwinkligen Versor j enthaltenden Potenzen von e wie gewöhnlich e-Potenzen multipliziert, d. h. die Exponenten addiert, erhält man für das Produkt von zwei Operatoren die weitere Rechnungsregel:

$$\boxed{\dot{Z}_1\,\dot{Z}_2 = Z_1\,Z_2\,e^{j\,(\varphi_1 + \varphi_2)}} \tag{37}$$

Für den Betrag findet man daraus wieder die in Gl. (36) ausgedrückte Rechnungsregel. Für den Versor findet man:

$$\boxed{e^{j\varphi_1}\,e^{j\varphi_2} = e^{j\,(\varphi_1 + \varphi_2)}} \tag{38}$$

Diese Gleichung kann ausführlicher geschrieben werden:

$$\boxed{\begin{aligned}& (\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)\,(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) \\ & = \cos\,(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin\,(\varphi_1 + \varphi_2).\end{aligned}} \tag{39}$$

Aus Fig. 23 gehen die in den Gl. (36), (37), (38) und (39) ausgedrückten Rechnungsregeln unmittelbar hervor. Wenn die Länge U_1 des Vektors $\mathfrak{U}_1$ das Z_1-fache der Länge I des Vektors $\mathfrak{I}$ beträgt, und die Länge I selbst das Z_2-fache der Länge U_2 des Vektors $\mathfrak{U}_2$ beträgt, ist der Vektor $\mathfrak{U}_1$ offenbar $Z_1\,Z_2$-mal so lang wie der Vektor $\mathfrak{U}_2$. Ebenso ersieht man, dass sich der Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ als Summe der Winkel φ_1 und φ_2 darstellt.

Ein äusserst wichtiger *Spezialfall* ist das Produkt konjugierter Operatoren:

$$\dot{Z} = Z_w + j\,Z_b \quad \text{und} \quad Z_k = Z_w - j\,Z_2.$$

Man erhält dann: $\dot{Z}\,\dot{Z}_k = Z_w^2 - j^2\,Z_b^2$.

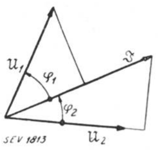

Fig. 23.

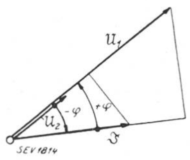

Fig. 24.

Berücksichtigt man, dass gemäss Gl. (9) wiederum j^2 gleich -1 gesetzt werden darf, so erkennt man in der rechten Seite der Gleichung das Quadrat des Betrages des gegebenen Operators $\dot{Z}$. Man erhält also für das Produkt von zwei zueinander konjugierten Operatoren die Rechnungsregel:

$$\boxed{\dot{Z}\,\dot{Z}_k = Z_2} \tag{40}$$

Das Produkt konjugierter Operatoren ist ein reiner Faktor, nämlich das Quadrat ihres Betrages.

Da die Beträge der beiden gegebenen konjugierten Operatoren gemäss Gl. (27) einander gleich sind, erhält man aus Gl. (36) für den Betrag des Produktes konjugierter Operatoren die Rechnungsregel:

$$\boxed{\left|\dot{Z}\,\dot{Z}_k\right| = Z_2} \tag{41}$$

Da das Produkt und der Betrag des Produktes einander gleich sind, muss der Versor zu einem reinen Faktor vom Betrage 1 degenerieren. Fig. 24 veranschaulicht die Zusammenhänge.

234.
Quotient.

Gegeben seien in Binom-Form die beiden Operatoren:

$$\dot{Z}_1 = Z_{1w} + j Z_{1b} \qquad \dot{Z}_2 = Z_{2w} + j Z_{2b},$$

die zusammen mit einem Vektor $\mathfrak{I}$ die beiden Vektoren $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ festlegen.

$$\mathfrak{U}_1 = \dot{Z}_1\,\mathfrak{I} \qquad \mathfrak{U}_2 = \dot{Z}_2\,\mathfrak{I}.$$

Gesucht sei der den Vektor $\mathfrak{U}_2$ in den Vektor $\mathfrak{U}_1$ überführende Operator, sowie dessen Betrag und Versor. Aus dem Gegebenen folgt:

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}\,\mathfrak{U}_2. \tag{42}$$

Der gesuchte Operator ist gleich dem Quotient der beiden gegebenen Operatoren. Ihre gegebenen Binom-Formen sollen zur Berechnung dieses Quotienten benützt werden. Man erhält:

$$\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{Z_{1w} + j\,Z_{1b}}{Z_{2w} + j\,Z_{2b}}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich nicht ohne weiteres durch Ausmultiplizieren und Ordnen in einen Operator von Binom-Form umformen. Um dieses Ziel zu erreichen, benützt man den Kunstgriff, dass man den Ausdruck mit einem Operator erweitert, der zu dem im Nenner stehenden Operator konjugiert ist.

$$\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{Z}_1\,\dot{Z}_{2k}}{\dot{Z}_2\,\dot{Z}_{2k}}.$$

Gemäss der in Gl. (40) ausgedrückten Rechnungsregel, wonach das Produkt konjugierter Operatoren gleich dem Quadrat ihres Betrages wird, erhält man:

$$\dot{Z}_2\,\dot{Z}_{2k} = Z_2^2.$$

Drückt man den Betrag gemäss Gl. (19) durch die beiden Glieder der Binom-Form aus und setzt man für die im Zähler stehenden Operatoren gleichfalls ihre Binom-Formen, so wird:

$$\frac{\dot{Z}_1\,\dot{Z}_{2k}}{\dot{Z}_2\,\dot{Z}_{2k}} = \frac{(Z_{1w} + j\,Z_{1b})\,(Z_{2w} - j\,Z_{2b})}{Z_{2w}^2 + Z_{2b}^2}.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck aus, ordnet man und setzt man j^2 gleich -1, so erhält man für den Quotienten von zwei Operatoren die Rechnungsregel:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} &= \frac{Z_{1w}\,Z_{2w} + Z_{1b}\,Z_{2b}}{Z_{2w}^2 + Z_{2b}^2} \\ &\quad - j\,\frac{Z_{1w}\,Z_{2b} - Z_{1b}\,Z_{2w}}{Z_{2w}^2 + Z_{2b}^2}\end{aligned}} \tag{43}$$

Hieraus kann gemäss Gl. (19) der Betrag berechnet werden.

$$\left|\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{Z_{1w}\,Z_{2w} + Z_{1b}\,Z_{2b}}{Z_{2w}^2 + Z_{2b}^2}\right)^2 + \left(\frac{Z_{1w}Z_{2b} - Z_{1b}Z_{2w}}{Z_{2w}^2 + Z_{2b}^2}\right)^2}$$

Multipliziert man diesen Ausdruck aus und ordnet man, wobei sich einige Glieder herausheben, so erhält man:

$$\left|\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}\right| = \sqrt{\frac{Z_{1w}^2 + Z_{1b}^2}{Z_{2w}^2 + Z_{2b}^2}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt den Quotienten der Beträge der beiden gegebenen Operatoren dar. Man erhält somit für den Betrag des Quotienten von zwei Operatoren die Rechnungsregel:

$$\boxed{\left|\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}\right| = \frac{Z_1}{Z_2}} \tag{44}$$

Auch für die Bildung des Quotienten ist die Verwendung der Produkt-Form der Operatoren, insbesondere die Schreibweise mit e-Potenzen vorteilhaft:

$$\dot{Z}_1 = Z_1\, e^{j\varphi_1} \text{ und } \dot{Z}_2 = Z_2\, e^{j\varphi_2}.$$

Durch Verwendung dieser Ansätze erhält man:

$$\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{Z_1\, e^{j\varphi_1}}{Z_2\, e^{j\varphi_2}}.$$

Daraus findet man für den Quotienten von zwei Operatoren die weitere Rechnungsregel:

$$\boxed{\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{Z_1}{Z_2}\, e^{\,j(\varphi_1-\varphi_2)}} \qquad (45)$$

Für den Betrag geht daraus wieder die in Gl. (44) ausgedrückte Rechnungsregel hervor. Für den Versor findet man daraus die Rechnungsregeln:

$$\boxed{\frac{e^{j\varphi_1}}{e^{j\varphi_2}} = e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}} \qquad (46)$$

$$\boxed{\frac{\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2} = \begin{array}{c}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2).\end{array}} \qquad (47)$$

Es soll nun noch der *Spezialfall* untersucht werden, dass die beiden gegebenen Operatoren zueinander konjugiert sind. Die beiden Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_k$ liegen dann gemäss Fig. 20 symmetrisch zu einem Vektor $\mathfrak{J}$, wenn die Gleichungen gelten:

$$\mathfrak{U} = \dot{Z}\,\mathfrak{J} \qquad \dot{Z} = Z\, e^{j\varphi}$$

$$\mathfrak{U}_k = \dot{Z}_k\,\mathfrak{J} \qquad \dot{Z}_k = Z\, e^{-j\varphi}$$

Gesucht sei der Operator, der den Vektor $\mathfrak{U}$ in den Vektor $\mathfrak{U}_k$ überführt. Aus dem Gegebenen folgt:

$$\mathfrak{U}_k = \frac{\dot{Z}_k}{\dot{Z}}\,\mathfrak{U}$$

Der gesuchte Operator ist gleich dem Quotient der gegebenen Operatoren. Es wird:

$$\frac{\dot{Z}_k}{\dot{Z}} = \frac{Z\, e^{-j\varphi}}{Z\, e^{j\varphi}}$$

Man erhält so für den Quotient von zwei konjugierten Operatoren die Rechnungsregeln:

$$\boxed{\frac{\dot{Z}_k}{\dot{Z}} = e^{-j2\varphi}} \qquad \boxed{\left|\frac{\dot{Z}_k}{\dot{Z}}\right| = 1} \qquad (45)$$

Der Quotient konjugierter Operatoren ist ein reiner Versor.

24.

Variable Vektoren und Operatoren, Ortskurven [19]).

Es soll der Vektor $\mathfrak{B}$ durch Multiplikation mit dem Operator $\dot{v}$ aus dem Vektor $\mathfrak{A}$ hervorgehen. Ist der Operator $\dot{v}$ eine stetige Funktion eines Parameters p, so verändert sich offenbar der Vektor $\mathfrak{B}$ ebenfalls stetig und die Gesamtheit der Orte, an denen seine Spitze liegen kann, lässt sich durch eine Kurve, durch die sogenannte *Ortskurve* angeben.

Ganz allgemein lässt sich der variable Operator $\dot{v}$ in einen konstanten Anteil $\dot{m}$ und in einen variablen Anteil $\dot{r}_p$ zerlegen.

$$\dot{v} = \dot{m} + \dot{r}_p$$

Der variable Operator $\dot{r}_p$ lässt sich seinerseits als Produkt von zwei Operatoren auffassen,

$$\dot{r}_p = \dot{r}\,\dot{p}$$

wovon der erste Operator konstant sein soll. Der zweite Operator dagegen soll in Produkt-Form aus einem variablen Betrag und aus einem variablen Versor bestehen [20]).

$$\dot{p} = p\, e^{j\psi(p)}$$

Man erhält so für den Vektor $\mathfrak{B}$ den Ausdruck:

$$\mathfrak{B} = \dot{m}\,\mathfrak{A} + \dot{r}\, p\, e^{j\psi(p)}\,\mathfrak{A}$$

Die Ortskurve des Vektors $\mathfrak{B}$ wird beschrieben durch einen veränderlichen Vektor

$$\mathfrak{R}_p = \dot{r}\, p\, e^{j\psi(p)}\,\mathfrak{A}$$

dessen Fusspunkt durch die Spitze des konstanten Vektors

$$\mathfrak{M} = \dot{m}\,\mathfrak{A}$$

gebildet wird. Man kann somit den Vektor $\mathfrak{B}$ als Summe eines konstanten und variablen Vektors auffassen.

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{M} + \mathfrak{R}_p$$

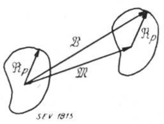

Fig. 25.

Die durch den variablen Vektor:

$$\mathfrak{R}_p = \dot{r}\, p\, e^{j\psi(p)}\,\mathfrak{A}$$

für sich allein dargestellte Ortskurve lässt sich offenbar durch Verschiebung um den Vektor $\mathfrak{M}$ mit der durch den Vektor $\mathfrak{B}$ beschriebenen Kurve zur Deckung bringen. Je nach der Art der Veränderlichkeit des Operators

$$\dot{r}_p = \dot{r}\, p\, e^{j\psi(p)}$$

ergeben sich verschiedene Ortskurven. Einige Fälle, die zu einfachsten geometrischen Kurven führen, sollen nachfolgend kurz erwähnt werden.

241.

Gerade.

Verändert sich nur der Betrag des Operators $\dot{r}\dot{p} = \dot{r}p$, so dass sein Versor konstant bleibt, indem der Operator $\dot{p}$, zu einem reinem Faktor p degeneriert, so hat der Vektor eine konstante Richtung.

$$\mathfrak{R}_p = \dot{r}_p\,\mathfrak{A}$$

Für verschiedene Werte des Parameters p hat er aber verschiedene Längen, so dass seine Spitze

---

[19]) Die Bezeichnung «Ortskurven» wurde aufgebracht durch das in dieser Materie grundlegende Werk: Otto Bloch, Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik, Verlag Rascher & Co., Zürich, 1917.

[20]) Der Parameter p kann dabei selbst eine Funktion eines weitern Parameters sein.

und damit auch die Spitze des Vektors $\mathfrak{B}$ gemäss Fig. 26 auf einer Geraden läuft.

Der veränderliche Vektor $\mathfrak{B}$, dessen Spitze bei stetiger Veränderung des Parameters p eine Gerade beschreibt, genügt der Gleichung:

$$\boxed{\mathfrak{B} = (\dot{m} + \dot{r}\, p)\, \mathfrak{A}} \tag{50}$$

Der Geraden-Operator $\dot{g}$, der einen konstanten Vektor in einen veränderlichen Vektor überführt,

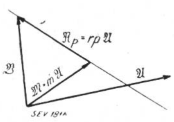

Fig. 26.

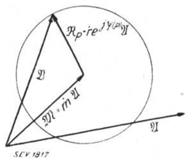

Fig. 27.

dessen Spitze bei stetiger Veränderung des Parameters eine Gerade beschreibt, genügt der Gleichung:

$$\boxed{\dot{g} = \dot{m} + \dot{r}\, p} \tag{51}$$

242.
Kreis.

Verändert sich im Gegensatz zu vorher der Betrag des Operators $\dot{r}_p$ nicht, ist aber sein Versor vom Werte des Parameters p abhängig, so gilt die Gleichung:

$$\dot{r}_p = \dot{r}\, e^{j\psi(p)}$$

Für veränderliche Werte des Parameters p rotiert dann der Vektor

$$\mathfrak{R}_p = \dot{r}\, e^{j\psi(p)}\, \mathfrak{A}$$

ohne seine Länge zu ändern: Er beschreibt einen Kreis. Da die Spitze des Vektors $\mathfrak{R}p$ gemäss Fig. 27 die Spitze des Vektors $\mathfrak{B}$ führt, beschreibt auch diese einen Kreis.

Der veränderliche Vektor $\mathfrak{B}$, dessen Spitze bei stetiger Veränderung des Parameters p einen Kreis beschreibt, genügt der Gleichung:

$$\boxed{\mathfrak{B} = (\dot{m} + \dot{r}\, e^{j\psi(p)})\, \mathfrak{A}} \tag{52}$$

Der Kreis-Operator $\dot{k}$, der einen konstanten Vektor in einen veränderlichen Vektor überführt, dessen Spitze bei stetiger Veränderung des Parameters einen Kreis beschreibt, genügt der Gleichung:

$$\boxed{\dot{k} = \dot{m} + \dot{r}\, e^{j\psi(p)}} \tag{53}$$

Dieser die Produkt-Form eines Operators enthaltende Ausdruck des Kreisoperators $\dot{k}$ kann so umgeformt werden, dass er ausschliesslich Operatoren in Binom-Form enthält. Man macht hiezu Gebrauch von Gl. (48), nach der ein reiner Versor gleich dem Quotient konjugierter Operatoren ist. Man setzt:

$$e^{j\psi(p)} = \frac{\dot{Z}_k}{\dot{Z}}$$

Dann wird der in Gl. (53) in Produkt-Form auftretende Operator:

$$\dot{r}\, e^{j\psi(p)} = \frac{\dot{r}\, \dot{Z}_k}{\dot{Z}}$$

Dabei gelten für die beiden konjugierten Operatoren $\dot{Z}$ und $\dot{Z}_1$ die Bestimmungsgleichungen:

$$\dot{Z} = Z_w + j\, Z_b \qquad Z_w = Z \cos\left(-\frac{1}{2}\,\psi(p)\right)$$

$$\dot{Z}_k = Z_w - j\, Z_b \qquad Z_b = Z \sin\left(-\frac{1}{2}\,\psi(p)\right)$$

Für den Versor $e^{j\psi(p)}$ ist der Betrag Z der Operatoren $\dot{Z}$ und $\dot{Z}_k$ ohne Einfluss. Er kann beliebig gewählt werden. Wesentlich ist das Verhältnis der beiden Komponenten Z_b und Z_w, denn dieses legt den Winkel $\psi(p)$ fest.

$$\frac{Z_b}{Z_w} = \mathrm{tg}\left(-\frac{1}{2}\,\psi(p)\right) \tag{54}$$

Der in Gl. (54) ausgesprochenen Bedingung, wonach das Verhältnis der beiden Komponenten Z_b und Z_w die Funktion tangens des Winkels $-\frac{1}{2}\,\psi(p)$ bestimmt, genügen die Ansätze:

$$Z_w = c_w + p'\, d_w \qquad Z_b = c_b + p'\, d_b$$

Damit erhält man für Gl. (54):

$$\frac{c_w + p'\, d_w}{c_b + p'\, d_b} = \mathrm{tg}\left(-\frac{1}{2}\,\psi(p)\right)$$

Durch teilweise Ausführung der Division auf der linken Seite dieser Gleichung erhält man:

$$\frac{d_w}{d_b} + \frac{c_w - c_b\,\frac{d_w}{d_b}}{c_b + p'\, d_b} = \mathrm{tg}\left(-\frac{1}{2}\,\psi(p)\right) \tag{55}$$

Es kann nach Gl. (55) zu jedem Wert des Winkels $\psi(p)$ ein Wert des neuen Parameters p' gefunden werden. Die Grössen c_w, c_b, d_w und d_b sind dabei frei wählbar. Es muss lediglich darauf geachtet werden, dass der Ausdruck:

$$c_w - c_b\,\frac{d_w}{d_b}$$

von Null verschieden bleibt. Es darf somit gesetzt werden:

$$e^{j\psi(p)} = \frac{Z_w - j\, Z_b}{Z_w + j\, Z_b}$$

$$e^{j\psi(p)} = \frac{c_w + p'\, d_w - j\, c_b - j\, p'\, d_b}{c_w + p'\, d_w + j\, c_b + j\, p'\, d_b}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$c_w + j\, c_b = \dot{c} \qquad c_w - j\, c_b = \dot{c}_k$$

$$d_w + j\, d_b = \dot{d} \qquad d_w - j\, d_b = \dot{d}_k$$

so erhält man schliesslich:

$$e^{j\psi(p)} = \frac{\dot{c}_k + p'\dot{d}_k}{\dot{c} + p'\dot{d}}$$

Damit wird: $$\dot{r}\, e^{j\psi(p)} = \dot{r}\,\frac{\dot{c}_k + p'\dot{d}_k}{\dot{c} + p'\dot{d}} \qquad (56)$$

Bezeichnet man fortan den neuen Parameter p', der nach Gl. (55) aus dem alten Parameter hervorgeht, der Einfachheit halber mit p, so muss man festhalten, dass er im allgemeinen trotzdem einen vom alten Parameter der Gl. (52) und (53) abweichenden Wert hat. Man erhält so für den Kreisoperator [21]):

$$\dot{k} = \dot{m} + \dot{r}\,\frac{\dot{c}_k + p\,\dot{d}_k}{\dot{c} + p\,\dot{d}}$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{m}\,\dot{c} + p\,\dot{m}\,\dot{d} + \dot{r}\,\dot{c}_k + p\,\dot{r}\,\dot{d}_k}{\dot{c} + p\,\dot{d}}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\dot{m}\,\dot{c} + \dot{r}\,\dot{c}_k = \dot{a} \qquad (57a)$$

$$\dot{m}\,\dot{d} + \dot{r}\,\dot{d}_k = \dot{b} \qquad (57b)$$

so erhält der Kreisoperator die sehr gebräuchliche Form:

$$\boxed{\dot{k} = \frac{\dot{a} + p\,\dot{b}}{\dot{c} + p\,\dot{d}}} \qquad (58)$$

Aus den Gl. (57a) und 57b) errechnet sich für den Mittelpunkts-Operator die Gleichung:

$$\boxed{\dot{m} = \frac{\dot{a}\,\dot{d}_k - \dot{b}\,\dot{c}_k}{\dot{c}\,\dot{d}_k - \dot{c}_k\,\dot{d}}} \qquad (59)$$

Analog erhält man für den konstanten Teil des Radius-Operator:

$$\boxed{\dot{r} = \frac{\dot{b}\,\dot{c} - \dot{a}\,\dot{d}}{\dot{c}\,\dot{d}_k - \dot{c}_k\,\dot{d}}} \qquad (60)$$

243.
Ellipse.

Verändert sich schliesslich im Gegensatz zu den beiden vorherigen Fällen sowohl der Betrag wie der Versor des veränderlichen Operators

$$\dot{r}_p = \dot{r}\,p\,e^{j\psi(p)}$$

so entsteht eine allgemeine Kurve. Macht man die besondere Festsetzung, dass sich der veränderliche Operator $\dot{r}p$ aus zwei verschiedenen Operatoren zusammensetzt, deren Beträge konstant und deren Versoren entgegengesetzt gleich sind, wie das in Gl. (61) ausgedrückt ist, so beschreibt die Spitze des veränderlichen Vektors

$$\mathfrak{B} = (\dot{m} + \dot{r}_p)\,\mathfrak{A}$$

eine Ellipse. Das soll nachstehend kurz dargetan werden.

$$\dot{r}_p = \dot{r}\,e^{j\psi(p)} + \dot{q}\,e^{-j\psi(p)} \qquad (61)$$

Der Winkel, den gemäss Fig. 28 die beiden Vektoren $\dot{r}\,\mathfrak{A}$ und $\dot{q}\,\mathfrak{A}$ miteinander einschliessen sei $2\,\delta$ genannt.

Da der Betrag des Operators $\dot{r}$ das $\frac{r}{q}$-fache des Betrages des Operators $\dot{q}$ beträgt, kann man schreiben:

$$\dot{r} = \frac{r}{q}\,\dot{q}\,e^{j2\delta}$$

Man kann nun den Operator $\dot{r}$ noch in zwei Summanden zerlegen, wovon der erste denselben Betrag hat wie der Operator $\dot{q}$.

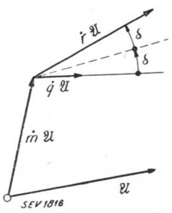

Fig. 28.

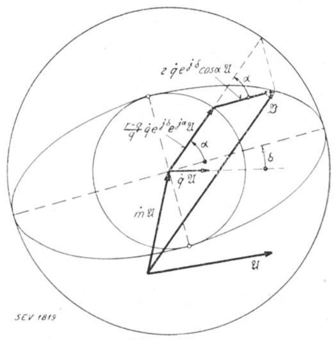

Fig. 29.

$$\dot{r} = \dot{q}\,e^{j2\delta} + \left(\frac{r}{q}\,\dot{q}\,e^{j2\delta} - \dot{q}e^{j2\delta}\right)$$

$$\dot{r} = \dot{q}\,e^{j2\delta} + \frac{r-q}{q}\,\dot{q}\,e^{j2\delta}$$

Damit erhält man für den Operator $\dot{r}_p$ den Ausdruck:

$$\dot{r}_p = \left(\dot{q}\,e^{j2\delta} + \frac{r-q}{q}\,\dot{q}\,e^{j2\delta}\right) e^{j\psi(p)} + \dot{q}\,e^{-j\psi(p)}$$

Klammert man auf der rechten Seite dieser Gleichung den Ausdruck $\dot{q}\,e^{j\delta}$ aus und fasst man die e-Potenzen zusammen, so wird:

$$\dot{r}_p = \dot{q}\,e^{j\delta}\left(e^{j(\psi(p)+\delta)} + \frac{r-q}{q}\,e^{j(\psi(p)+\delta)} + e^{-j(\psi(p)+\delta)}\right)$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\psi(p) + \delta = \alpha, \qquad (62)$$

so wird:

$$\dot{r}_p = \dot{q}\,e^{j\delta}\left(e^{j\alpha} + \frac{r-q}{q}\,e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}\right)$$

Dafür kann man schreiben:

$$\dot{r}_p = \dot{q}\,e^{j\delta}\Big(\cos\alpha + j\sin\alpha + \frac{r-q}{q}\,e^{j\alpha} +$$
$$+ \cos\alpha - j\sin\alpha\Big)$$

Hieraus erhält man:

$$\dot{r}_p = \dot{q}\,e^{j\delta}\left(\frac{r-q}{q}\,e^{j\alpha} + 2\cos\alpha\right) \qquad (63)$$

---

[21]) Diese Art der Darstellung eines Kreisoperators veröffentlichte der Autor in einem Aufsatz «Eine neue symbolische Kreisgleichung der Wechselstromtechnik» in der Schweizerischen Technischen Zeitschrift, 1928, S. 545.

Verwendet man für den Operator $\dot{r}_p$ den in Gl. (63) gegegebenen Ausdruck, so bekommt man für den veränderlichen Vektor $\mathfrak{B}$ die Gleichung:

$$\mathfrak{B} = \left(\dot{m} + \frac{r-q}{q}\dot{q}\, e^{j\delta}\, e^{j\alpha} + 2\,\dot{q}\, e^{j\delta} \cos\alpha\right)\mathfrak{A} \qquad (64)$$

Dieser Ausdruck ist in Fig. 29 graphisch interpretiert. Diese Figur stellt die bekannte[22]) Konstruktion einer Ellipse aus den beiden Halbachsen dar. Vom Endpunkt des Vektors $\dot{m}\mathfrak{A}$ aus gerechnet, werden die beiden grossen Halbachsen dargestellt durch die Vektoren:

$$\pm\left(\frac{r-q}{q}\,\dot{q}\, e^{j\delta} + 2\,\dot{q}\, e^{j\delta}\right)\mathfrak{A}$$

Zieht man die beiden Glieder zusammen, so findet man:

$$\pm\frac{r+q}{q}\,\dot{q}\, e^{j\delta}\,\mathfrak{A}$$

Hieraus errechnet sich leicht der Betrag a der grossen Halbachse:

$$\boxed{a = (r+q)\,A} \qquad (65)$$

Ebenfalls vom Endpunkt des Vektors $\dot{m}\mathfrak{A}$ aus gerechnet, werden die beiden kleinen Halbachsen dargestellt durch die Vektoren:

$$\pm j\,\frac{r-q}{q}\,\dot{q}\, e^{j\delta}\,\mathfrak{A}.$$

Hieraus errechnet sich leicht der Betrag b der kleinen Halbachse:

$$\boxed{b = (r-q)\,A} \qquad (66)$$

22) Diese Konstruktion erwähnt die Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch, Band I, 25. Auflage, S. 100, Fig. 20, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1925.

Der in Gl. (64) für den veränderlichen Vektor $\mathfrak{B}$ enthaltenen Konstruktionsvorschrift liegt der veränderliche Operator $\dot{r}p$ gemäss Gl. (63) zugrunde. In diese Form konnte der ursprünglich gemäss Gl. (61) angesetzte Operator $\dot{r}p$ umgemodelt werden. Verwendet man den alten Ansatz für die Aufstellung der Gleichung des veränderlichen Vektors $\mathfrak{B}$, so beschreibt dieser offenbar immer noch dieselbe Ellipse.

Der veränderliche Vektor $\mathfrak{B}$, dessen Spitze bei stetiger Veränderung des Parameters p eine Ellipse beschreibt, genügt der Gleichung:

$$\boxed{\mathfrak{B} = \left(\dot{m} + \dot{r}\, e^{j\psi(p)} + \dot{q}\, e^{-j\psi(p)}\right)\mathfrak{A}} \qquad (67)$$

Der Ellipsen-Operator $\dot{e}$, der einen konstanten Vektor in einen veränderlichen Vektor überführt, dessen Spitze bei stetiger Veränderung des Parameters p eine Ellipse beschreibt, genügt der Gleichung:

$$\boxed{\dot{e} = \dot{m} + \dot{r}\, e^{j\psi(p)} + \dot{q}\, e^{-j\psi(p)}} \qquad (68)$$

In den meisten praktischen Fällen ist das Glied $\dot{m}$ nicht vorhanden. Der Mittelpunkt solcher Ellipsen liegt dann im Fusspunkt des veränderlichen Vektors $\mathfrak{B}$.

Wird der Betrag des Operators $\dot{r}$ gleich dem Betrag des Operators $\dot{q}$, so verschwindet in Gl. (64) das zweite Glied: Die Ellipse degeneriert zu einer (begrenzten) Geraden.

Wird der Betrag des Operators $\dot{q}$ zu Null, so verschwindet in Gl. (67) das dritte Glied: Die Ellipse degeneriert zu einem Kreis.

(Fortsetzung folgt)

Bericht über die Diskussionsversammlung für Fragen über Förderung der Elekritzitätsverwertung

Dienstag, den 14. und Mittwoch, den 15. Oktober 1930
in Bern.

(Fortsetzung von Seite 74)

Die Lichtreklame, ihre häufigsten Ausführungsformen und ihre Bedeutung für die Elektrizitätswerke.

Referat von *J. Guanter*, dipl. Ing., Osram A.-G., Zürich.

628.974

Zusammenfassung.

Im Geschäftsleben spielt die Lichtreklame in ihren vielfachen Varianten heute eine derartige Rolle, dass darauf nicht mehr verzichtet werden kann. Technisch massgebend für die erfolgreiche Wirkung einer Lichtreklame ist hauptsächlich die Einhaltung folgender allgemeiner Gesichtspunkte:

1. *Gute Erkennbarkeit.* Die Schriftzüge sollen klar und deutlich in Erscheinung treten. Die Lesbarkeit bei Leuchtbuchstaben ist abhängig vom Verhältnis ihrer Leuchtdichte zur Helligkeit des Hintergrundes, von der Form und von den Abmessungen. Anhand von Versuchen an Leuchtbuchstaben verschiedener Ausführungsart ist ermittelt worden, dass die Buchstabenhöhe mindestens $^1/_{350}$ der grössten Entfernung zu betragen hat, aus der die Schrift gut lesbar sein soll.

2. *Ausreichende Leuchtdichte.* Bei der Festlegung der Leuchtdichte sind die Entfernung, auf die eine Lichtreklame zu wirken hat, der Hintergrund und die Umgebung zu be-