

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke
Band: 16 (1925)
Heft: 7

Artikel: Vereinfachte harmonische Analyse periodischer Kurven
Autor: Kopeliowitch, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1059235>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Voyons maintenant quels résultats nous avons obtenus avec la tarification multiple: à Neuchâtel, le nombre des compteurs de ce genre n'est pas encore assez développé pour tirer des conclusions précises, cependant nous pouvons, aujourd'hui déjà, apprécier les bons effets de ce système rationnel de vente de l'énergie électrique.

Le compte de consommation des abonnés est très facile à établir, ce qui nous a permis de diminuer de moitié le nombre des employés occupés à l'établissement des factures. Les recettes de vente de courant éclairage et chauffage ont été en augmentant, voici les chiffres:

1919	1920
fr. 511 000. —	fr. 652 000. —
1921	1922
fr. 651 000. —	fr. 771 000. —
1923	
fr. 713 000. —	

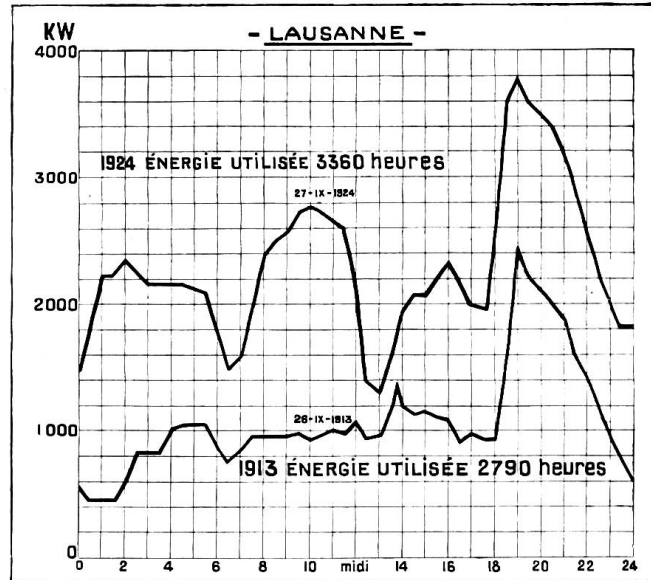


Fig. 12.

La courbe de consommation s'est passablement améliorée, vous avez sous les yeux les courbes de débit maximum de 1913 et celles, à la même saison, de 1924 (voir fig. 10 et 11). Nous remarquons une sensible amélioration; en 1913 le nombre d'heures d'utilisation était de 2800, en 1924 le nombre a passé à 3980.

La courbe de consommation de la ville de Lausanne est aussi significative. En 1913 le nombre d'heures d'utilisation était de 2790 tandis qu'il était de 3360 en 1924 (voir fig. 12 et 13).

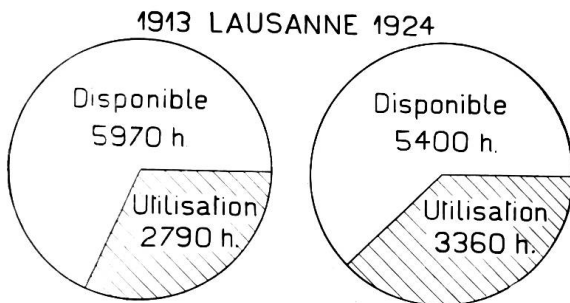


Fig. 13.

Messieurs,

Je ne veux pas allonger, j'ai déjà retenu votre attention bien longtemps, je reste à la disposition de ceux que cette tarification intéresse pour leur donner, en dehors de cette séance, tous les renseignements que je pourrai.

Vereinfachte harmonische Analyse periodischer Kurven.

Von Dr. J. Kopeliowitch, Baden.

Mit zunehmender Bedeutung der Analyse der Spannungskurven in Wechselstromanlagen hat man sich immer öfter mit dieser Aufgabe zu beschäftigen. Der Verfasser fasst kurz die Schwierigkeiten bezw. Nachteile zusammen, welche verschiedene bekannte Methoden der harmonischen Analyse haben und gibt ein vereinfachtes graphisches Verfahren an, welches bei öfteren Analysen grosse Zeitersparnis zu erreichen erlaubt.

Avec l'importance croissante de la forme de l'onde dans les installations à courant alternatif, le problème de l'analyse harmonique des courbes périodiques se présente de plus en plus fréquemment. L'auteur résume les difficultés et les inconvénients de diverses méthodes connues, et indique un procédé graphique simplifié, qui permet une économie notable de temps quand il s'agit d'analyses souvent répétées. Ce pro-

Die Methode besteht in der Verwendung von Formularen, die die Formeln und vereinigten Koeffizienten der harmonischen Zerlegung nach Runge enthalten. Die Anordnung dieser Formulare ist so getroffen, dass man in einer sehr einfachen Weise alle Ordinaten summierungen durchführen kann. Die Anzahl der auszuführenden Produkte ist durch zweckmässige Vereinigung der Koeffizienten auf ein Minimum reduziert. In den Formularen braucht man nur die ausgerechneten Grössen einzuschreiben und ihre übersichtliche Anordnung ermöglicht eine rasche Kontrolle der Resultate.

cédé repose sur l'emploi de formulaires, contenant les formules et les coefficients groupés selon la méthode de Runge. La disposition choisie permet d'effectuer très simplement toutes les sommes et différences d'ordonnées. Le nombre de produits à opérer est réduit au minimum par le groupement favorable des coefficients. Il suffit d'introduire les grandeurs calculées dans les formulaires préparés à l'avance; leur disposition claire facilite le contrôle rapide des résultats.

I. Einleitung.

Mit der Verbreitung des Anwendungsgebietes des Wechselstromes stösst man immer mehr auf die Aufgabe, die Kurvenform von Strom und Spannung genau zu erforschen. Zur Lösung dieser Aufgabe sind zahlreiche Methoden vorhanden, welche wir in zwei Kategorien unterteilen:

1. *Indirekte Methoden:* Aufnahme der Kurve und nachfolgende mathematische Analyse.
2. *Direkte Methoden:* Experimentelle Analyse.

Die direkten Methoden sind mit bedeutenden Nachteilen verbunden: 1. sie erfordern spezielle Apparate (Analysatoren), die in der Praxis nur selten zur Verfügung stehen; 2. eine rasche und genaue Durchführung der Analyse ist nur bei genügender Erfahrung und Uebung möglich; 3. die Genauigkeit des Verfahrens hängt vom System der gewählten Apparate ab.

Die Aufnahme der Kurve mittelst eines Oszillographen ist in den letzten Jahren zu einer täglichen Erscheinung geworden. Die zahlreichen Untersuchungen, die mit Hilfe dieses Apparates durchgeführt werden, sowie seine Empfindlichkeit und relativ einfache Handhabung haben ihn zu einem für ein Laboratorium oder Versuchslokal unentbehrlichen Instrument gemacht. Durch seine allgemeine Verbreitung ist der erste Teil, der unter 1. notierten Methoden sehr vereinfacht worden, und nur die mathematische Analyse der aufgenommenen Kurve bietet in der Praxis, besonders im Falle oft wiederholter Analysen, gewisse Schwierigkeiten.

Eine genaue Aufstellung der Gleichung einer graphisch gegebenen periodischen Kurve, oder mit andern Worten, ihre Zerlegung in die Komponenten höherer Frequenzen (die höheren Harmonischen) ist in der Tat sehr zeitraubend und darum in der Praxis fast undurchführbar. Für eine annähernde Berechnung der Amplituden der höheren Harmonischen wurden eine Anzahl von Methoden angegeben¹⁾, die mehr oder weniger lange Rechnungen brauchen. Eine Zeitersparnis kann nur durch eine Schablonisierung dieser Rechnungen erreicht werden. Die harmonische Analyse mittelst der Hermannschen Schablonenmethode²⁾ erfordert, trotz ihrer vielen Vorteile, eine mühsame und wiederholte Summierung der gleichen Zahlen. Es sind hauptsächlich die Multiplikationen, die sich bequem anordnen lassen. Diese aber können mit Hilfe eines Rechenschiebers durchgeführt werden, während man die Summierungen auf dem Papier machen muss.

Die im folgenden geschilderte Methode (vereinfachte Methode von Runge, siehe E. T. Z. 1905) und die dazugehörigen Formulare erlauben eine rasche und genügend

¹⁾ Vergleich: Dr. E. Orlich: Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven, Braunschweig 1906, Seite 112, Literaturübersicht.

A. Roth: Eine neue Methode der direkten Analyse von Wechselstromkurven, Diss., J. Springer, Berlin 1917, Seite 44, Quellenangabe.

²⁾ L. Hermann: Schablonen zur harmonischen Analyse, Bd. 47, Arch. für gesamte Physiologie 1890, Seite 45, auch Zeitschrift für angew. Mathematik u. Mechanik, Band 2, Heft 2, Seite 153, 1922.

genaue Analyse³⁾. Im allgemeinen Falle gibt sie die 11 ersten (geraden und ungeraden) Harmonischen und die dazu erforderlichen Rechnungen sind kaum komplizierter als die einer vollständig symmetrischen Kurve (Fall 1) oder einer Kurve, welche symmetrisch gegen die Zeitachse ist (Fall 2). Dies ist durch die Anwendung der Formulare erreicht, welche folgende Vorteile bieten:

1. fast alle Summierungen werden bequem und auf einmal durchgeführt,
2. durch die vorgedruckten Formeln braucht man nur die ausgerechneten Grössen zu schreiben, und
3. sie ermöglichen eine rasche Kontrolle der Rechnungen.

Um die zwei erwähnten Spezialfälle vor Beginn der Rechnung zu erkennen, wird die unter Abschnitt III angeführte graphische Zusammenstellung, welche den Einfluss der einzelnen Harmonischen auf die Sinuskurve wiedergibt, zu Hilfe genommen.

Wegen Zeitersparnis und den Vereinfachungen, die man mit dieser kombinierten Methode erreichen kann, wurde sie in den Bureaux der A.-G. Brown, Boveri & Cie. eingeführt.

II. Allgemeines über die periodischen Kurven und ihre mathematische Darstellung.

Unter einer *periodischen Kurve* ganz allgemeiner Form versteht man eine Kurve, deren Ordinaten sich beliebig ändern und nur die einzige Bedingung erfüllen, dass sie nach Ablauf einer ganz bestimmten Zeit T (die Periodendauer) wieder die gleichen Werte annehmen. Die gleichen Ordinaten erscheinen deshalb in der Kurve in äquidistanten Punkten wiederholt. (Im folgenden bezeichnen wir die Abszissenachse als Zeitachse und alle dazugehörigen Werte durch Buchstaben t und T .) Eine solche Kurve ist z. B. in Fig. 1 dargestellt (Spannungskurve eines Gleichrichters).

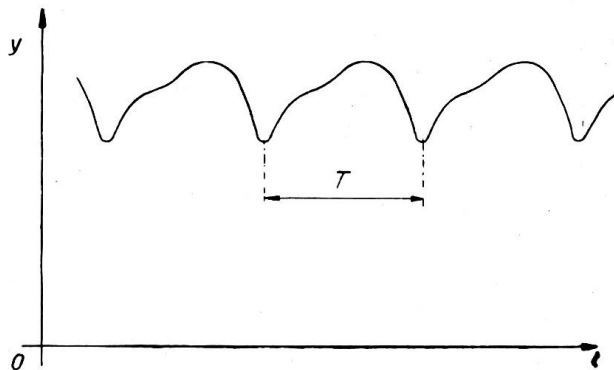


Fig. 1.

Spannungskurve eines Gleichrichters.

Eine *reine Wechselkurve* beliebiger Form besitzt noch die folgende Eigenschaft, dass innerhalb einer Periode die Gesamtfläche, die oberhalb der

Zeitachse liegt, d. h. die positive Fläche derjenigen gleich ist, die sich unterhalb dieser Achse befindet. Diese letztere betrachten wir als negative Fläche. Die algebraische Summe der beiden Flächen ist folglich für eine reine Wechselkurve Null. In der Wechselstromtechnik kommen gerade solche Kurven am häufigsten vor (siehe Fig. 2 ÷ 13).

Die mathematische Darstellung periodischer Kurven beliebiger Form beruht auf dem Satz von Fourier, welcher lautet:

„Jede periodische Kurve (reine Wechselkurve) kann durch eine Ueberlagerung von einer Sinuskurve gleicher Frequenz – Grundharmonische, Grundwelle – mit einer Reihe von Sinuskurven – höhere Harmonische, Oberwellen – deren Frequenzen 2, 3, 4, ... mal so gross sind, wie die der Grundwelle, erzeugt werden. Die Zahl der Oberwellen braucht nicht endlich zu sein und der Phase nach können sie vollständig beliebig gegeneinander liegen“.

³⁾ Seit der Ausarbeitung dieser Studie erschien in der Zeitschrift V. D. I. (Prof. Tomälén: Zur Analyse periodischer Kurven, Z. V. D. I., Bd. 67, Seite 1104, 1923) eine Methode, die das Verfahren von Runge und Hermann vereinigt. Sie ermöglicht, den Gebrauch der Schablonen zu vermeiden, indem sie die Anzahl der Multiplikationen herabsetzt: wie bei Runge fängt man mit der Summierung der Ordinaten an und nur die Endsummen werden mit den Cosinussen der entsprechenden Winkel multipliziert. Man erhält die gesuchten Amplituden der Harmonischen, indem man die Produkte nach den Formeln addiert und durch 12 dividiert. Diese Methode bietet im Vergleich zu den Methoden von Runge und von Hermann bedeutende Vorteile. Es lassen sich aber eine weitere Vereinfachung und Zeitersparnis erreichen.

Die Gleichung einer Harmonischen lässt sich schreiben:

$$y_k = r_k \sin(k\omega t + \psi_k) \quad (a)$$

$$\text{oder: } y_k = r_k \cos \psi_k \sin k\omega t + r_k \sin \psi_k \cos k\omega t = a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t, \quad (b)$$

wobei $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ Kreisfrequenz oder Winkelgeschwindigkeit ist, $k = 1, 2, 3, \dots$ die Ordnung und ψ_k die Phase der Oberwelle bezeichnen.

Jede Harmonische beliebiger Phase kann folglich durch eine Summe von einer Sinus- und einer Cosinuskurve, deren Phasenwinkel Null sind, ersetzt werden. Die Amplituden dieser beiden Kurven sind durch folgende Beziehungen bestimmt:

$$a_k = r_k \cos \psi_k, \quad b_k = r_k \sin \psi_k, \quad (c)$$

$$\text{oder umgekehrt: } r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \text{tg } \psi_k = \frac{b_k}{a_k}, \quad (d)$$

wobei bei der Ermittlung von Phasenwinkel ψ_k die Vorzeichen von a_k und b_k in Betracht fallen.

Dem Fourierschen Satze zufolge lautet die Gleichung einer allgemeinen periodischen Kurve:

$$y = b_0 + r_1 \sin(\omega t + \psi_1) + r_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + r_k \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots \quad (e)$$

oder, umgeformt mit Hilfe der Formel (b):

$$y = \left. \begin{array}{l} a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + \dots + a_k \sin k\omega t + \dots \\ + b_0 + b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2\omega t + \dots + b_k \cos k\omega t + \dots \end{array} \right\} \quad (f)$$

Das konstante Glied b_0 stellt eine Verschiebung der Zeitachse dar, die nötig ist, um aus einer allgemeinen periodischen Kurve eine reine Wechselkurve zu bekommen.

Für eine genaue Berechnung der Amplituden a_k und b_k für eine gegebene Kurve gelten die von Fourier angegebenen Formeln:

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T y \sin k\omega t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T y \cos k\omega t dt, \quad (g)$$

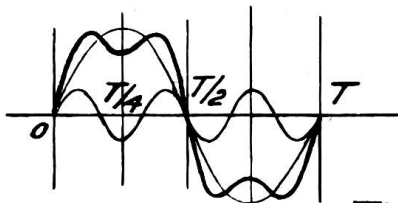
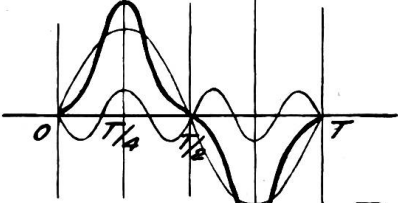
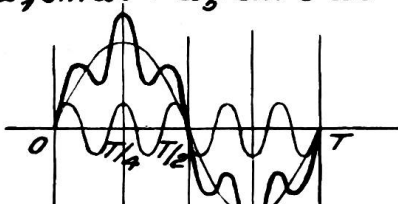

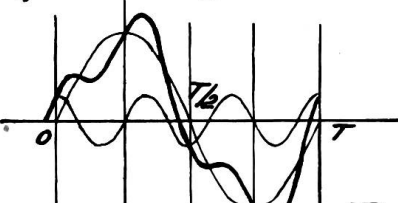
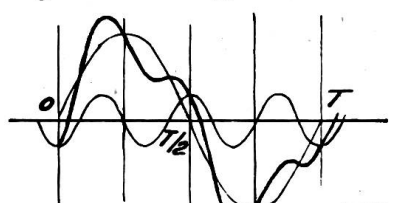
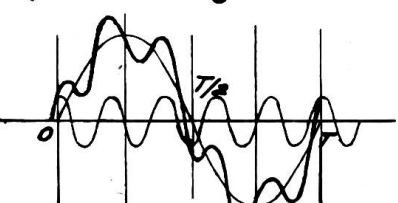

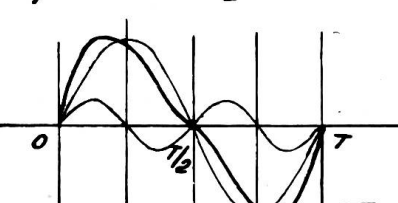
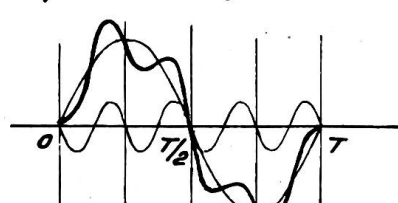
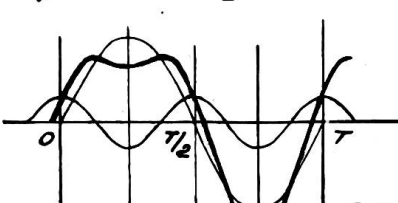
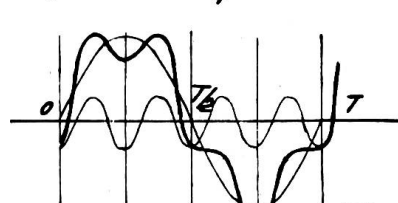
in der Praxis aber begnügt man sich mit einer annähernden Bestimmung dieser Koeffizienten. Die dazu nötigen Beziehungen lassen sich aus den obigen leicht ableiten, indem man eine Periode in $2n$ gleiche Teile unterteilt und die entsprechenden Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}$ ermittelt. Mit diesen Ordinaten wird eine annähernde Integration durch die Anwendung untenstehender Formeln durchgeführt:

$$b_0 = \frac{1}{2n} \sum_{l=0}^{l=2n-1} y_l, \quad a_k = \frac{2}{2n} \sum_{l=0}^{l=2n-1} y_l \sin \frac{k l \pi}{n}, \quad b_k = \frac{2}{2n} \sum_{l=0}^{l=2n-1} y_l \cos \frac{k l \pi}{n}. \quad (h)$$

Je grösser die gewählte Zahl n ist, desto genauer ist das Resultat, denn für $n = \infty$ gehen diese Formeln (h) in die Integralformeln (g) über. Auch die Methode, die hier erläutert wird, verwendet die vorstehenden Formeln; diese nehmen aber durch die Wahl der Teilungszahl $2n$ und nach der Bestimmung der Koeffizienten $\sin \frac{k l \pi}{n}$ und $\cos \frac{k l \pi}{n}$ eine viel einfachere Gestalt an.

III. Einfluss der einzelnen Oberwellen auf eine Sinuskurve.

Die Form der in der Praxis vorkommenden periodischen Kurven weicht fast immer mehr oder weniger von der Form einer Sinuskurve ab. Diese Abweichung ist durch die höheren Harmonischen verursacht, deren Einfluss aus folgender Zusammenstellung deutlich hervorgeht (siehe Fig. 2 ÷ 13).

<i>Positive Harmonische</i>	<i>Negative Harmonische</i>
<p>1. $a_1 \sin \omega t + a_3 \sin 3 \omega t$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Fig. 2</i></p>	<p>1'. $a_1 \sin \omega t - a_3 \sin 3 \omega t$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Fig. 3</i></p>
<p>1". $a_1 \sin \omega t + a_5 \sin 5 \omega t$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Fig. 4</i></p>	<p>1'''. $a_1 \sin \omega t - a_5 \sin 5 \omega t$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Fig. 5</i></p>
<p>2. $a_1 \sin \omega t + b_3 \cos 3 \omega t$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Fig. 6</i></p>	<p>2'. $a_1 \sin \omega t - b_3 \cos 3 \omega t$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Fig. 7</i></p>
<p>2". $a_1 \sin \omega t + b_5 \cos 5 \omega t$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Fig. 8</i></p>	<p>2'''. $a_1 \sin \omega t - b_5 \cos 5 \omega t$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Fig. 9</i></p>
<p>3. $a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2 \omega t$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Fig. 10</i></p>	<p>3'. $a_1 \sin \omega t - a_2 \sin 4 \omega t$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Fig. 11</i></p>
<p>3". $a_1 \sin \omega t + b_2 \cos 2 \omega t$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Fig. 12</i></p>	<p>3'''. $a_1 \sin \omega t - b_4 \cos 4 \omega t$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Fig. 13</i></p>

Charakteristische Eigenschaften der zusammengesetzten Kurven.

Fall 1 (Fig. 2 bis 5).

Ueberlagerung von ungeraden Sinus-Harmonischen.

Halbwellen: Gleich untereinander. Symmetrisch gegen Zeitachse. Punkt $T/2 =$ Symmetriezentrum.

Viertelwellen: Gleich untereinander. Symmetrisch gegen Vertikale durch $T/4$.

Fall 2 (Fig. 6 bis 9).

Ueberlagerung von ungeraden Cosinus-Harmonischen.

Halbwellen: Gleich untereinander. Symmetrisch gegen Zeitachse.

Viertelwellen: Ungleich. Unsymmetrisch gegen Vertikale durch $T/4$.

Fall 3 (Fig. 10 bis 13).

Ueberlagerung von geraden Sinus-Harmonischen.

Halbwellen: Gleich. Unsymmetrisch gegen Zeitachse. Punkt $T/2 =$ Symmetriezentrum.

Viertelwellen: Ungleich. Unsymmetrisch gegen Vertikale durch $T/4$.

Ueberlagerung von geraden Cosinus-Harmonischen.

Halbwellen: Ungleich. Unsymmetrisch gegen Zeitachse.

Viertelwellen: Ungleich. Symmetrisch gegen Vertikale durch $T/4$.

IV. Vereinfachte harmonische Analyse.

Fall 1. Vollständig symmetrische Kurven. Eine vollständig symmetrische Kurve ist eine Kurve, deren ganze Welle durch eine zweckmässige Wiederholung einer Viertelwelle aufgezeichnet werden kann (Fig. 2-5). Solche Kurven können z. B. als Spannungskurven eines leerlaufenden Wechselstromgenerators vorkommen.

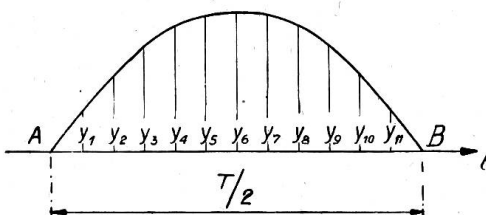


Fig. 14.

Zerlegung einer symmetrischen Kurve.

In diesem Falle sind alle *geraden* Sinusglieder und *alle* Cosinusglieder der Fourierschen Reihe Null und es empfiehlt sich, zur Ermittlung der ersten 11 ungeraden Oberwellen folgendes vereinfachtes Verfahren zu verwenden:

Man teile die Strecke $AB = T/2$ in 12 gleiche Teile. Es seien $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{11}$ die entsprechenden Ordinaten (Fig. 14). Man bilde das Schema

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	y_6

Summen: $s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_5 \quad s_6$

$(s_k = y_k + y_{12-k})$

Die Amplituden der ersten 11 Harmonischen sind dann durch folgende Beziehungen bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} 100 a_1 \\ 100 a_{11} \end{aligned} \right\} &= [4,314 s_1 + 11,79 s_3 + 16,1 s_5] \pm [8,33 (s_2 + s_6) + 14,43 s_4] \\ 100 a_3 \\ 100 a_9 \end{aligned} \right\} &= 11,79 (s_1 + s_3 - s_5) \pm 8,33 (2 s_2 - s_6) \\ 100 a_5 \\ 100 a_7 \end{aligned} \right\} &= [16,1 s_1 - 11,79 s_3 + 4,314 s_5] \pm [8,33 (s_2 + s_6) - 14,43 s_4] \quad (i)$$

wobei das obere Vorzeichen für die obere, das untere für die untere Amplitude gilt und die Gleichung der Kurve lautet:

$$y = a_1 \sin \omega t + a_3 \sin 3 \omega t + \dots + a_{11} \sin 11 \omega t .$$

Fall 2. Die Kurve verläuft in den beiden Periodenhälften symmetrisch zur Zeitachse. Die Verzerrung der Kurve ist in diesem Falle in beiden Periodenhälften dieselbe (Fig. 6 ÷ 9). Die zweite Halbwelle kann aus der ersten durch eine Verschiebung dieser letzteren um $T/2$ und Umklappung um die Zeitachse um 180° erhalten werden (Fig. 15).

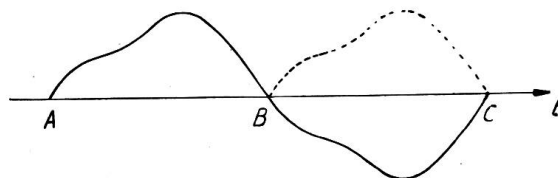


Fig. 15.

Periodische Kurve, symmetrisch zur Zeitachse.

Alle geraden Glieder der Fourierschen Reihe sind unter dieser Voraussetzung Null und zur Ermittlung der Harmonischen genügt es auch in diesem Falle, nur eine Halbwelle zu zerlegen. Die Zerlegung erfolgt genau wie im Fall 1. Mit den Ordinaten y_1, y_2, \dots, y_{11} bildet man die Zusammenstellung:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	y_6
Summen:	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
Differenzen:	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	0

wobei s_k und d_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) die Summen und Differenzen der untereinander stehenden Glieder bezeichnen.

Mit diesen Grössen sind die Amplituden a_1, a_3, \dots, a_{11} der Sinus-Harmonischen nach den Formeln (i) und die Amplituden b_1, b_3, \dots, b_{11} der Cosinus-Harmonischen nach den untenstehenden Beziehungen zu berechnen:

$$\left. \begin{aligned} 100 b_1 \\ 100 b_{11} \end{aligned} \right\} &= [8,33 d_4 + 14,43 d_2] \pm [16,1 d_1 + 11,79 d_3 + 4,314 d_5] \\ 100 b_3 \\ 100 b_9 \end{aligned} \right\} &= - 16,67 d_4 \pm 11,79 (d_1 - d_3 - d_5) \\ 100 b_5 \\ 100 b_7 \end{aligned} \right\} &= [8,33 d_4 - 14,43 d_2] \pm [4,314 d_1 - 11,79 d_3 + 16,1 d_5] \quad (i)$$

Fall 3. Periodische Kurven ganz allgemeiner Form. Die einzige Bedingung, die die Kurve erfüllen muss, ist diejenige der Periodizität (Fig. 1, 10 ÷ 13, 16); ihrer Form nach kann sie ganz beliebig sein. Die Gleichung einer solchen Kurve

wird im allgemeinen Falle durch die Entwicklung (f) gegeben. Zur Bestimmung der Amplituden $a_1, a_1, a_3, \dots b_1, b_2, b_3, \dots$ und des Koeffizienten b_0 muss eine ganze Welle zerlegt werden.

Sind die Flächen der beiden Halbwellen gleich gross, so ist der Koeffizient b_0

Null. Trifft dies nicht zu, so kann man in folgender Weise verfahren: Man unterteilt die Strecke AC oder $A'C'$ (siehe Fig. in Tabelle III), d. h. eine volle Periode, in 24 gleiche Teile und bestimmt die entsprechenden Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \dots y_{23}, (y_0 = y_{24})$, wobei das Vorzeichen der einzelnen Ordinaten durch ihre Richtung festgelegt wird. Die Zeitachse AC kann übrigens ganz beliebig gewählt werden, sie soll nur parallel zu der Nulllinie verlaufen. Es gilt dann:

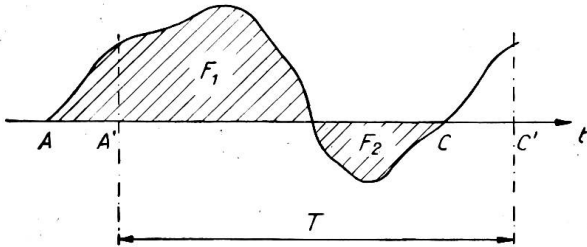


Fig. 16.
Periodische Kurve allgemeiner Form.

$$b_0 = \frac{1}{24} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{23}) .$$

Die übrigen Koeffizienten können wie folgt ermittelt werden: Mit den gemessenen Ordinaten führt man nachstehende Operationen aus, die sich am besten nach folgendem Schema durchführen lassen:

Tabelle I.

Kurvenordinaten:	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}		
	y_0	y_{23}	y_{22}	y_{21}	y_{20}	y_{19}	y_{18}	y_{17}	y_{16}	y_{15}	y_{14}	y_{13}	y_{12}		
Summen: $x_k = y_k + y_{24-k}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}		
Differenzen: $z_k = y_k - y_{24-k}$	0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	0		
		z_{11}	z_{10}	z_9	z_8	z_7	z_6								
Summen: $s_k = z_k + z_{12-k}$		s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
								x_{12}	x_{11}	x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	
Differenzen: $D_k = z_k - z_{12-k}$		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	0	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	0	Differenzen: $d_k = x_k - x_{12-k}$
		D_5	D_4	D_3											
Summen: $q_k = D_k + D_{6-k}$		q_1	q_2	q_3				S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	Summen: $S_k = x_k + x_{12-k}$
								S_6	S_5	S_4	S_3				
Differenzen: $r_k = D_k - D_{6-k}$		r_1	r_2	0				v_0	v_1	v_2	0				Differenzen: $v_k = S_k - S_{6-k}$
								u_0	u_1	u_2	u_3				Summen: $u_k = S_k + S_{6-k}$

In dieser Zusammenstellung haben wir mit x_k, s_k, q_k, S_k, u_k die Summen, und mit z_k, D_k, r_k, d_k die Differenzen der untereinander stehenden und mit gleichen Buchstaben bezeichneten Glieder benannt. Mit diesen Bezeichnungen kann man die Formeln wie folgt schreiben:

$$\left. \begin{matrix} 100 a_1 \\ 100 a_{11} \end{matrix} \right\} = [2,157 s_1 + 5,9 s_3 + 8,05 s_5] \pm [4,167 (s_2 + s_6) + 7,215 s_4]$$

$$\left. \begin{matrix} 100 a_3 \\ 100 a_9 \end{matrix} \right\} = 5,9 (s_1 + s_3 - s_5) \pm 4,167 (2 s_2 - s_6)$$

$$\left. \begin{array}{l} 100 a_5 \\ 100 a_7 \end{array} \right\} = [8,05 s_1 - 5,9 s_3 + 2,157 s_3] \pm [4,167 (s_2 + s_6) - 7,215 s_4]$$

$$\left. \begin{array}{l} 100 a_2 \\ 100 a_{10} \end{array} \right\} = 4,167 (q_1 + q_3) \pm 7,215 q_2$$

$$\left. \begin{array}{l} 100 a_4 \\ 100 a_8 \end{array} \right\} = 7,215 (r_1 \pm r_2)$$

$$100 a_6 = 4,167 (2 q_1 - q_3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 100 b_1 \\ 100 b_{11} \end{array} \right\} = [4,167 (d_0 + d_4) + 7,215 d_2] \pm [8,05 d_1 + 5,9 d_3 + 2,157 d_5]$$

$$\left. \begin{array}{l} 100 b_3 \\ 100 b_9 \end{array} \right\} = 4,167 (d_0 - 2 d_4) \pm 5,9 (d_1 - d_3 - d_5)$$

$$\left. \begin{array}{l} 100 b_5 \\ 100 b_7 \end{array} \right\} = [4,167 (d_0 + d_4) - 7,215 d_2] \pm [2,157 d_1 - 5,9 d_3 + 8,05 d_5]$$

$$100 b_0 = 4,167 \left(\frac{u_0 + u_3}{2} + u_1 + u_2 \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} 100 b_2 \\ 100 b_{10} \end{array} \right\} = 4,167 (v_0 + v_2) \pm 7,215 v_1$$

$$\left. \begin{array}{l} 100 b_4 \\ 100 b_8 \end{array} \right\} = 4,167 [(u_0 - u_2) \pm (u_1 - u_3)]$$

$$100 b_6 = 4,167 (v_0 - 2 v_2)$$

Die Zusammenstellung der Cosinus- und Sinusglieder von gleicher Frequenz und die Bestimmung der entsprechenden Phasenwinkel erfolgt in den beiden letzten Fällen (1) und (2) nach den Formeln (d).

Es ist zu bemerken, dass die Phasenwinkel ψ_k sich auf die Kreisfrequenz der entsprechenden Harmonischen beziehen. Um die analysierte Kurve aus ihren Komponenten wieder aufbauen zu können, soll man die gegenseitige Lage der einzelnen Harmonischen bestimmen. Dies kann wie folgt geschehen: Man bezieht sich auf den Anfangspunkt, d. h. man setzt überall $t = 0$ und man führt alle Phasenwinkel ψ_k zu der Abszissenskala der Grundwelle mit Hilfe der folgenden Beziehungen zurück:

$$t_{0k} = \frac{\psi_k T}{2 \pi k}$$

wenn es sich um die Zeit handelt, oder:

$$\psi_{0k} = \frac{\psi_k}{k}$$

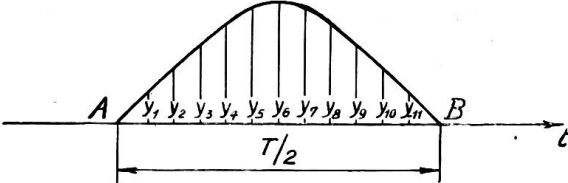
wenn man als Abszisse ein Winkelmaß der Grundwelle hat. Die Werte t_{0k} oder ψ_{0k} werden links vom Anfangspunkt aufgetragen und die so erhaltenen Punkte als Ausgangspunkte der Sinuskurven entsprechender Frequenzen genommen.

Die beigelegten Formulare enthalten gleichfalls zwei Zahlenbeispiele, die eine weitere Erläuterung der beschriebenen Methode überflüssig machen.

Es sei zum Schluss noch bemerkt, dass, falls man keine gedruckten Formulare besitzt, es genügt, nur ein Exemplar vorzubereiten. Die Rechnungen werden dann auf dem Pauspapier durchgeführt, welches man auf das Formular legt, so dass der Vordruck durch das Papier sichtbar ist.

Formular für die Zerlegung einer symmetrischen Kurve in 11 Harmonische.
Die Kurve enthält nur ungerade Harmonische (Fall 1 und 2, siehe Seiten 414/415).

Tabelle II.

Eine halbe Periode in 12 gleiche Teile zu unterteilen									
									
Formeln									
$\left. \begin{matrix} 100 a_1 \\ 100 a_{11} \end{matrix} \right\} = (4,314 s_1 + 11,79 s_3 + 16,1 s_5) \pm [8,33 (s_2 + s_6) + 14,43 s_4]$		$d_k = y_k - y_{12-k}$ $s_k = y_k + y_{12-k}$		y_1 3,8 y_{11} 4,6 d_1 - 0,8 s_1 8,4 s_3 18,5 $s_1 + s_3$ 26,9 s_5 26,5 $s_1 + s_3 - s_5 =$ 0,4	y_2 6,3 y_{10} 7,1 d_2 - 0,8 s_2 13,4 s_6 28,0 $s_2 + s_6$ 41,4	y_3 9,0 y_9 9,5 d_3 - 0,5 s_3 18,5 $2 s_2 =$ 26,8 $s_6 =$ 28,0 $2 s_2 - s_6 =$ -1,2	y_4 11,4 y_8 11,7 d_4 - 0,3 s_4 23,1 $2 s_2 =$ 26,8 $s_6 =$ 28,0 $2 s_2 - s_6 =$ -1,2	y_5 13,0 y_7 13,5 d_5 - 0,5 s_5 26,5 $d_1 =$ - 0,8 $d_3 =$ - 0,5 $d_5 =$ - 0,5 $d_3 + d_5 =$ - 1,0 $d_1 - (d_3 + d_5) =$ + 0,2	y_6 14,0 y_6 14,0 0 s_6 28,0
$\left. \begin{matrix} 100 a_3 \\ 100 a_9 \end{matrix} \right\} = 11,79 (s_1 + s_3 - s_5) \pm 8,33 (2 s_2 - s_6)$		a_3 u. a_9		b_3 u. b_9					
$\left. \begin{matrix} 100 a_5 \\ 100 a_7 \end{matrix} \right\} = 16,1 s_1 - 11,79 s_3 + 4,314 s_5 \pm [8,33 (s_2 + s_6) - 14,43 s_4]$		$11,79 (s_1 + s_3 - s_5) =$ 4,7 $8,33 (2 s_2 - s_6) =$ - 10,0 Summe = - 0,053		$- 16,66 d_4 =$ 5,00 $11,79 (d_1 - d_3 - d_5) =$ 2,36 Summe = + 0,0736					
$\left. \begin{matrix} 100 b_1 \\ 100 b_{11} \end{matrix} \right\} = (8,33 d_4 + 14,43 d_2) \pm (16,1 d_1 + 11,79 d_3 + 4,314 d_5)$		$a_3 =$ $\frac{\text{Summe}}{100} =$ - 0,053 $a_9 =$ $\frac{\text{Differenz}}{100} =$ + 0,147		$b_3 =$ $\frac{\text{Summe}}{100} =$ + 0,0736 $b_9 =$ $\frac{\text{Differenz}}{100} =$ + 0,0264					
$\left. \begin{matrix} 100 b_3 \\ 100 b_9 \end{matrix} \right\} = - 16,66 d_4 \pm 11,79 (d_1 - d_3 - d_5)$									
$\left. \begin{matrix} 100 b_5 \\ 100 b_7 \end{matrix} \right\} = (8,33 d_4 - 14,43 d_2) \pm (4,314 d_1 - 11,79 d_3 + 16,1 d_5)$									
a_1 u. a_{11}		a_5 u. a_7		b_1 u. b_{11}		b_5 u. b_7			
$4,314 s_1 =$ 36,2 $11,790 s_3 =$ 218,0 $16,10 s_5 =$ 426,3 Summe₁ = 680,5		$16,10 s_1 =$ 135,0 $4,314 s_5 =$ 114,5 Summe = 249,5 $11,79 s_3 =$ 218,0 Differenz₁ = 31,5		$8,33 d_1 =$ - 2,50 $14,43 d_2 =$ - 11,55 Summe₁ = - 14,05 Differenz₁ = + 9,05		Differenz₁ = + 9,05			
$8,33 (s_2 + s_6) =$ 344,5 $14,43 s_4 =$ 333,0 Summe₂ = 677,5 Differenz₂ = 11,5		Differenz₂ = 11,5		$16,1 d_1 =$ - 12,89 $11,79 d_3 =$ - 5,90 $4,314 d_5 =$ - 2,16 Summe₂ = - 20,95		$4,314 d_1 =$ - 3,45 $16,10 d_5 =$ - 8,05 Summe = - 11,5 $11,79 d_3 =$ - 5,9 Differenz₂ = - 5,6			
$a_1 = \frac{\text{Summe}_1 + \text{Summe}_2}{100} =$ 13,58 $a_{11} = \frac{\text{Summe}_1 - \text{Summe}_2}{100} =$ 0,03		$a_5 = \frac{\text{Diff.}_1 + \text{Diff.}_2}{100} =$ 0,43 $a_7 = \frac{\text{Diff.}_1 - \text{Diff.}_2}{100} =$ 0,2		$b_1 = \frac{\text{Summe}_1 + \text{Summe}_2}{100} =$ - 0,35 $b_{11} = \frac{\text{Summe}_1 - \text{Summe}_2}{100} =$ + 0,69		$b_5 = \frac{\text{Diff.}_1 + \text{Diff.}_2}{100} =$ 0,0345 $b_7 = \frac{\text{Diff.}_1 - \text{Diff.}_2}{100} =$ 0,1465			

k	1	3	5	7	9	11
a_k^2	184,0	0,0028	0,1850	0,0040	0,0217	0,0009
b_k^2	0,122	0,0054	0,0012	0,0215	0,0007	0,0048
$a_k^2 + b_k^2 = r_k^2$	184,122	0,0082	0,1862	0,0255	0,0224	0,0057
r_k	13,58	0,0905	0,43	0,16	0,15	0,075
$tg \psi_k = \frac{b_k}{a_k}$	-0,0258	-1,390	+ 0,0803	+ 0,736	+ 0,1795	+ 23
ψ_k	1°29'	54° 16'	4° 35'	36° 20'	10° 10'	87° 31'
ψ_k	358° 35'	125° 43'	4° 35'	36° 20'	10° 10'	87° 31'
$100 \frac{r_k}{r_1}^*$	100,0	0,666	3,17	1,18	1,102	0,55

*) Prozentuale Abweichung von der Sinuskurve. Maximale Abweichung ist bei r_5 und beträgt 3,17 ‰.

NB. 1. Für Fall 1 (s. Seite 999), d. h. für eine vollständig symmetrische Kurve sind d_k ebenso wie b_k gleich Null. Es werden nur a_k ausgerechnet.

2. Bei der Bestimmung der Phasenverschiebungen ψ_k muss das Vorzeichen von b_k und a_k in Betracht gezogen werden.

Formular für die Zerlegung einer allgemein periodischen Kurve in 11 Harmonische.
Die Kurve enthält gerade und ungerade Harmonische (Fall 3, siehe Seite 415).

Tabelle III.

Eine volle Periode ist in 24 gleiche Teile zu unterteilen (ab A oder ab A'). Das Vorzeichen der einzelnen Ordinaten ist durch ihre Richtung bestimmt.

Formeln:

$100 a_1$	} = (2,157 s_1 + 5,9 s_3 + 8,05 s_5) ± [4,167 (s_2 + s_6) + 7,215 s_4]	$100 a_0 = 4,167 \left(\frac{u_0 + u_3}{2} + u_1 + u_2 \right)$
$100 a_{11}$		$100 a_2$ } = 4,167 (q_1 + q_3) ± 7,215 q_2
$100 a_3$	} = 5,9 (s_1 + s_3 - s_5) ± 4,167 (2 s_2 - s_6)	$100 a_4$ } = 7,215 (r_1 ± r_2)
$100 a_9$		$100 a_6 = 4,167 (2 q_1 - q_3)$
$100 a_5$	} = (8,05 s_1 - 5,9 s_3 + 2,157 s_5) ± [4,167 (s_2 + s_6) - 7,215 s_4]	$100 b_2$ } = 4,167 (v_0 + v_2) ± 7,215 v_1
$100 a_7$		$100 b_4$ } = 4,167 [(u_0 - u_2) ± (u_1 - u_3)]
$100 b_1$	} = [4,167 (d_0 + d_4) + 7,215 d_2] ± (8,05 d_1 + 5,9 d_3 + 2,157 d_5)	$100 b_8 = 4,167 (v_0 - 2 v_2)$
$100 b_{11}$		
$100 b_3$	} = 4,167 (d_0 - 2 d_4) ± 5,9 (d_1 - d_3 - d_5)	
$100 b_9$		
$100 b_5$	} = [4,167 (d_0 + d_4) - 7,215 d_2] ± (2,157 d_1 - 5,9 d_3 + 8,05 d_5)	
$100 b_7$		

b_0		
$\frac{u_0 + u_3}{2} =$		319,4
$u_1 + u_2 =$		637,4
Summe =		956,8
		· 0,04167
$b_0 =$		39,8

Im Falle der Gleichheit der Flächen F_1 u. F_2 wird $b_0 = 0$.

$v_0 = -5,6$	$q_1 = 1,8$	$d_0 = -7,7$
$v_2 = -3,5$	$q_3 = 1,4$	$d_4 = -2,9$
$v_0 + v_2 = -9,1$	$q_1 + q_3 = 3,2$	$d_0 + d_4 = -10,6$
$v_0 = -5,6$	$2 q_1 = 3,6$	$d_0 = -7,7$
$2 v_2 = -7,0$	$q_3 = 1,4$	$2 d_4 = -5,8$
$v_0 - 2 v_2 = +1,4$	$2 q_1 - q_3 = 2,2$	$d_0 - 2 d_4 = -1,9$

Tabelle III (Fortsetzung).

a_3 u. a_9		b_3 u. b_9		a_4 u. a_8		b_4 u. b_8					
$5,9 (s_1 + s_3 - s_5) = 14,2$		$4,167 (d_0 - 2 d_4) = - 7,9$		$r_1 = 1,2$		$u_0 - u_2 = - 0,3$					
$4,167 (2 s_2 - s_6) = 17,1$		$5,90 (d_1 - d_3 - d_5) = - 11,2$		$r_2 = 1,6$		$u_1 - u_3 = - 1,7$					
$a_3 = \frac{\text{Summe}}{100} = 0,313$		$b_3 = \frac{\text{Summe}}{100} = - 0,191$		Summe = 2,8		Summe = - 2,0					
$a_9 = \frac{\text{Differenz}}{100} = - 0,029$		$b_9 = \frac{\text{Differenz}}{100} = + 0,033$		Differenz = - 0,4		Differenz = 1,4					
				$a_4 = \frac{7,215 \text{ Summe}}{100} = 0,202$		$b_4 = \frac{4,167 \text{ Summe}}{100} = - 0,084$					
				$a_8 = \frac{7,215 \text{ Diff.}}{100} = - 0,029$		$b_8 = \frac{4,167 \text{ Diff.}}{100} = - 0,058$					
a_2 u. a_{10}		b_2 u. b_{10}		a_6		b_6					
$4,167 (q_1 + q_3) = 13,4$		$4,167 (v_0 + v_2) = - 38,0$		$a_6 = \frac{4,167 (2 q_1 - q_3)}{100} =$		$b_6 = \frac{4,167 (v_0 - 2 v_2)}{100} =$					
$7,215 q_2 = 20,10$		$7,215 v_1 = - 36,8$		$= 0,092$		$= 0,058$					
$a_2 = \frac{\text{Summe}}{100} = 0,335$		$b_2 = \frac{\text{Summe}}{100} = - 0,748$									
$a_{10} = \frac{\text{Differenz}}{100} = - 0,067$		$b_{10} = \frac{\text{Differenz}}{100} = - 0,012$									
$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_k^2	0,09	0,112	0,0980	0,041	0,0264	0,0085	0,000036	0,00084	0,00087	0,0045	0,0036
b_k^2	3,14	0,560	0,0365	0,007	0,0019	0,0034	0,004500	0,00342	0,00108	0,00014	0,0005
$a_k^2 + b_k^2 = r_k^2$	3,23	0,672	0,1345	0,048	0,0283	0,0119	0,004536	0,00426	0,00195	0,0046	0,0041
r_k	1,8	0,82	0,366	0,219	0,168	0,109	0,067	0,065	0,044	0,068	0,064
$tg \psi_k = \frac{b_k}{a_k}$	-5,9	-2,23	-0,612	-0,414	-0,264	0,6375	11,55	-2,03	-1,11	-0,175	+ 0,378
ψ_k	80° 20'	65° 50'	31° 30'	22° 30'	14° 50'	32° 30'	85° 0'	63° 50'	48° 0'	10° 0'	20° 40'
ψ_k	279° 40'	294° 10'	328° 30'	337° 30'	345° 10'	32° 30'	85° 0'	116° 10'	132° 0'	170° 0'	200° 40'
$100 \frac{r_k}{r_1}^*)$	100	45,5	20,3	12,15	9,34	6,05	3,72	3,6	2,44	3,77	3,55

*) Prozentuale Abweichung von der Sinuskurve. Maximale Abweichung ist bei r_2 und beträgt 45,5%.

NB. Bei der Bestimmung der Phasenverschiebungen ψ_k muss das Vorzeichen von b_k und a_k in Betracht gezogen werden. Definitive Werte von ψ_k sind in die vorletzte Linie der Tabelle eingetragen.