

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins  
**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke  
**Band:** 15 (1924)  
**Heft:** 12

**Artikel:** Mathematische Theorien für den Durchschlag fester Isoliermaterialien  
**Autor:** Dreyfus, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1061848>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

# BULLETIN

## ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich,  
im Januar dazu die Beilage „Jahresheft“.

Alle den Inhalt des „Bulletin“ betreffenden Zuschriften  
sind zu richten an das

Generalsekretariat  
des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins  
Seefeldstrasse 301, Zürich 8 — Telephon: Hottingen 7320,  
welches die Redaktion besorgt.

Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition  
und Inserate sind zu richten an den Verlag:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei A.-G.  
Stauffacherquai 36/38 Zürich 4 Telephon Selnau 7016

Abonnementspreis (für Mitglieder des S. E. V. gratis)  
für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft:  
Schweiz Fr. 20.—, Ausland Fr. 25.—  
Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 2.— plus Porto.

Ce bulletin paraît mensuellement. — „L'Annuaire“ est  
distribué comme supplément dans le courant de janvier.

Prière d'adresser toutes les communications concernant  
la matière du „Bulletin“ au

Secrétariat général  
de l'Association Suisse des Electriciens  
Seefeldstrasse 301, Zurich 8 — Telephon: Hottingen 7320  
qui s'occupe de la rédaction.

Toutes les correspondances concernant les abonnements,  
l'expédition et les annonces, doivent être adressées à l'éditeur

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A.  
Stauffacherquai 36/38 Zurich 4 Telephon Selnau 7016

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de  
l'A. S. E.), y compris l'Annuaire Fr. 20.—  
pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger.  
L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 2.—, port en plus.

XV. Jahrgang  
XV<sup>e</sup> Année

Bulletin No. 12

Dezember 1924  
Decembre

### Mathematische Theorien für den Durchschlag fester Isoliermaterialien.

Von Dr. ing. L. Dreyfus, Västerås.

Der Verfasser behandelt den Durchschlag von plattenförmigen Isoliermaterialien bei Dauerprüfung zwischen flachen Metallelektroden. Je nach der Dicke der untersuchten Schicht und dem Grade der Inhomogenität des Materials sind die Gesetze des Durchschlages entweder aus einer Theorie für quasihomogenes Material oder aus einer Kanaltheorie für inhomogenes Material herzuleiten. Für beide Annahmen wird die Ableitung der Verlustwärmе durch das Isoliermaterial und die Prüfelektroden eingehend untersucht und das Gesetz der Durchschlagsspannung aufgestellt. Die Kanaltheorie führt im Gegensatz zu K. W. Wagner zu dem Ergebnis, dass die Durchschlagsspannung keine einfache Funktion der Plattenstärke ist, sondern wesentlich von der Ausdehnung der kranken Stelle im inhomogenen Material abhängt.

L'auteur examine le percement d'isolants divers, se présentant sous forme de plaques soumises à l'action prolongée d'un champ électrique, créé entre deux électrodes planes. Suivant l'épaisseur et le degré d'homogénéité de la couche isolante, les lois du percement doivent être déduites soit d'une théorie des matières homogènes, soit de la théorie des canaux élémentaires, valable pour les substances hétérogènes. Dans les deux hypothèses l'auteur détermine la chaleur dissipée dans le diélectrique et dans les électrodes, et il exprime la loi de la tension de percement. Contrairement aux conclusions de K. W. Wagner, la théorie des canaux élémentaires montre que la tension de percement n'est pas une fonction simple de l'épaisseur du diélectrique, mais qu'elle est influencée considérablement par le nombre et l'étendue des défauts d'homogénéité dans l'isolant considéré.

#### II. Teil<sup>1)</sup>:

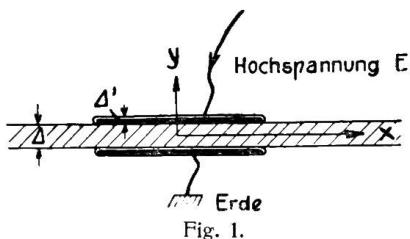
Die Prüfung von plattenförmigem Isolationsmaterial zwischen runden Metallelektroden.

#### Einleitung.

Die gebräuchlichste Art, ein Isolationsmaterial zu prüfen, ist die, dass man es in Plattenform zwischen runden Elektroden untersucht (Fig. 1). Prüft man auf diese

<sup>1)</sup> Der erste Teil dieser Arbeit ist im Bulletin 1924, No. 7, Seite 321 u. ff. erschienen.

Weise sehr dünne Schichten, so pflegt der Durchschlag bald hier, bald dort unter der Elektrodenfläche aufzutreten, ein Zeichen dafür, dass lokale Inhomogenitäten den Durchschlag einleiten. Solange dies der Fall ist, ist eine „Kanaltheorie“ die richtige Behandlungsform.



in dem wir das Isoliermaterial als „quasihomogen“ betrachten dürfen.

Vergrössern wir die Schichtdicke noch mehr und verwenden dünne Elektroden, so treten schliesslich die Durchschläge wieder mit grösserer Häufigkeit in dem mittleren Gebiete unter den Elektroden auf. Offenbar ist jetzt die dort herrschende höhere Temperatur im homogenen Felde für das Material gefährlicher als die Feldkonzentration am Elektrodenumfang bei geringerer Temperatur.

Für die Beurteilung der Prüfungsergebnisse ist es natürlich von Wichtigkeit zu wissen, ob der beobachtete Durchschlag unter die Gesetze der Kanaltheorie oder der Theorie für quasihomogenes Material fällt. Da, wie oben erklärt, eine scharfe Grenze zwischen beiden Gebieten nicht existiert, kann es bei dünnen Materialien zuweilen schwierig sein, diese Frage zu entscheiden. Doch leisten oft folgende beiden Kriterien gute Dienste:

Das erste Kriterium bildet die *Grösse der Verluste*. Wo immer man dazu imstande ist, sollte man die Bestimmung der Durchschlagsspannung mit Verlustmessungen bis zur Nähe der Durchschlagsgrenze kombinieren. Der Eintritt des Kanaldurchschlages ist die Folge einer grossen Verlustkonzentration auf geringem Raum. Die Gesamtverluste sind daher klein, nur die lokalen Verluste sind hoch. Misst man die Gesamtverluste und berechnet daraus die mittlere Verlustziffer für das ganze dem Felde ausgesetzte Volumen, so wird man in vielen Fällen feststellen können, dass diese viel zu klein ist, um den Durchschlag nach der Theorie für quasihomogenes Material zu erklären.

Das zweite Kriterium bildet die *Temperaturerhöhung* des dem Felde ausgesetzten Materials und der Elektroden. Erfolgt die Prüfung in Luft, so ist es zu empfehlen, unmittelbar nach dem Durchschlag die Temperatur der Elektroden und die Oberflächentemperatur des Isolierstoffes unter den Elektroden zu messen oder durch Betasten schätzungsweise festzustellen. Der Durchschlag von quasihomogenem Material erfordert nämlich bei nicht zu grosser Plattenstärke so hohe spezifische Verluste, dass diese bei der Dauerprüfung nicht ohne wesentliche Temperatursteigerung der Elektroden an die Luft abgegeben werden können. Warme Elektroden deuten daher immer auf quasihomogenes Material hin. Kalte Elektroden dagegen berechtigen zu der Vermutung, dass ein Kanaldurchschlag vorliegt. Natürlich setze ich dabei voraus, dass die Elektroden nicht mit anderen Körpern in einer die Wärme gut leitenden Verbindung stehen.

Im folgenden werden die beiden Grenzfälle, der reine Kanaldurchschlag und der Durchschlag quasihomogenen Materials, untersucht. Der Schwerpunkt wird dabei auf die mathematische Erfassung der Wärmeströmung gelegt, und zwar nicht nur der Wärmeströmung innerhalb des Isoliermaterials, sondern auch der Wärmeströmung durch die Elektroden. Dadurch wird es möglich werden, die beiden oben genannten Kriterien ziffernmässig auszudrücken. Die Behandlung des quasihomogenen Materials stützt sich auf den ersten Teil dieser Arbeit, insbesondere auf die graphische Näherungstheorie eindimensionaler ebener Wärmeleitungsprobleme. Das mathematische Gewand, in dem die Kanaltheorie auftritt, ist neu und führt auch zu neuen Erkenntnissen.

### 1. Die Dauerprüfung von quasihomogenem, plattenförmigem Material zwischen runden Metallelektroden (Fig. 2).

Bei der Formulierung der Wärmeströmung können wir annehmen, dass die  $y$ -Komponente symmetrisch zur Mittelebene ( $x$ -Ebene) und die  $x$ -Komponente symmetrisch zur  $y$ -Achse liegt, also radial gerichtet ist. Wir können daher von einem zweidimensionalen Wärmeleitungsproblem sprechen.

Das Hauptinteresse konzentriert sich auf die Frage: Bevorzugt die Ableitung der Verluste die  $y$ -Richtung oder die  $x$ -Richtung. Wird nämlich der grösste Teil der Verlustwärme innerhalb des Materials in der  $y$ -Richtung abgeführt, dann spielt die Schichtdicke  $\Delta$  dieselbe Rolle wie beim Durchschlag im homogenen Feld zwischen unendlich grossen Elektrodenflächen, der schon im ersten Teil dieser Arbeit aufgeklärt wurde. Sollte es sich dagegen zeigen, dass ein grosser Teil der Verlustwärme innerhalb des Materials in der  $x$ -Richtung abfließt, so sind für die Abhängigkeit der Durchschlagfestigkeit von der Plattenstärke neue Gesetzmässigkeiten zu erwarten.

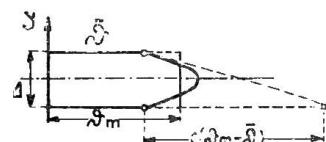


Fig. 2 a.

Ich will versuchen, unter Verzicht auf mathematische Strenge, diese Frage auf einem möglichst einfachen und doch zuverlässigen Wege zu beantworten. Viel wird gewonnen, wenn man die Wärmeströmung in der  $y$ - und  $x$ -Richtung getrennt formuliert: Die Temperaturverteilung in der  $y$ -Richtung wird jedenfalls gemäss Fig. 2a eine parabelähnliche Kurve bilden, welche durch die Uebertemperatur  $\vartheta$  der Randschicht und der Elektroden<sup>2)</sup> über die Umgebung, die mittlere Uebertemperatur  $\vartheta_m - \vartheta$  des Isoliermaterials über die Randschicht und endlich das Temperaturgefälle  $\frac{d\vartheta}{dx}$  in den Randschichten  $y = \pm \frac{\Delta}{2}$  genügend beschrieben wird. Dieses Temperaturgefälle ist deshalb wichtig, weil es die den Elektroden zugeführte achsiale Wärmeströmung  $q_y \left( \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2} \right)$  bestimmt. Gemäss früheren Untersuchungen (Teil I, Abschnitt 2) setzen wir für  $y = \frac{\Delta}{2}$ :

$$q_y = -\lambda \frac{d\vartheta}{dy} = c \lambda \frac{\vartheta_m - \vartheta}{\Delta}, \quad (1)$$

wobei der Koeffizient  $c$  nur wenig kleiner als 6 ist. Die genaueren Werte können Teil I, Fig. 7, entnommen werden.  $\lambda$  bedeutet die Wärmeleitzahl des Isoliermaterials (Watt/cm  $\cdot$   $^0\text{C}$ ).

Die Wärme, die innerhalb der Isolierplatte in der  $x$ -Richtung strömt, ist proportional dem mittleren Temperaturgefälle in dieser Richtung, also:

$$q_x = -\lambda \frac{d\vartheta_m}{dx}, \quad (2)$$

wobei wir nicht zu untersuchen brauchen, wie sich diese Wärmeströmung über den Querschnitt verteilt.

Den Mittelwert der Verlustziffer über die Plattenstärke bezeichnen wir wie früher mit  $p_m$  und denken ihn uns in Abhängigkeit von der mittleren Temperatur  $\vartheta_m$  durch eine Verlustkurve  $p_m = \Phi(\vartheta_m)$  graphisch gegeben.

<sup>2)</sup> Die Annahme: „Oberflächentemperatur des Isoliermaterials = Elektroden temperatur“ setzt guten Kontakt zwischen Elektroden und Isoliermaterial voraus.

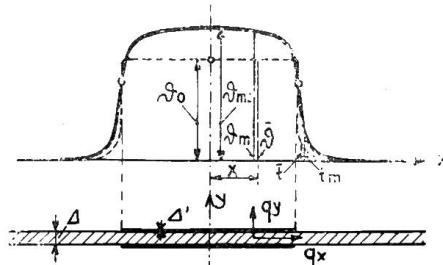


Fig. 2.

Unter diesen Voraussetzungen lautet die Wärmeleitungsgleichung des Isolationsmaterials unter den Elektroden ( $x < \bar{x}$ ):

$$A \lambda \left[ \frac{d^2 \vartheta_m}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d \vartheta_m}{dx} \right] - 2c \lambda \frac{\vartheta_m - \bar{\vartheta}}{A} + p_m A = 0 \quad (3)$$

und ausserhalb der Elektroden (Uebertemperaturen  $t_m$  und  $\bar{t}$ ):

$$A \lambda \left[ \frac{d^2 t_m}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d t_m}{dx} \right] - 2c \lambda \frac{t_m - \bar{t}}{A} = 0. \quad (4)$$

Ausserhalb der Elektroden ( $x > \bar{x}$ ) tritt die Wärmeströmung  $q_y$  direkt in die Luft oder das umgebende Medium aus, wozu eine gewisse Uebertemperatur  $\bar{t}$  erforderlich ist. Wir haben für diesen Wärmeübergang früher die Annahme:

$$q_y = \mu \bar{t} \quad (5a)$$

eingeführt, wobei für Prüfung in Luft  $\mu = 0,001 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \text{ }^0\text{C}}$ , in Oel  $\mu = 0,01 \sim 0,012 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \text{ }^0\text{C}}$  gesetzt werden konnte. In unserem Falle ist daher:

$$c \lambda \frac{t_m - \bar{t}}{A} = \mu \bar{t}. \quad (5)$$

Auch die Elektroden besitzen eine Wärmeleitungsgleichung. Wir wollen uns die Elektroden plattenförmig vorstellen (Dicke  $A'$ , Wärmeleitzahl  $\lambda'$ ), so dass in ihnen die Wärme vorzugsweise in der  $x$ -Richtung strömt. Dagegen wird in der  $y$ -Richtung von dem Isolationsmaterial Wärme empfangen  $\left( c \lambda \frac{\vartheta_m - \bar{\vartheta}}{A} \right)$  und ein Teil davon an die Umgebung abgegeben  $(\mu' \bar{\vartheta})$ . Insgesamt lautet daher die Wärmebilanz einer Elektrode:

$$A' \lambda' \left[ \frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d \bar{\vartheta}}{dx} \right] + c \lambda \frac{\vartheta_m - \bar{\vartheta}}{A} - \mu' \bar{\vartheta} = 0. \quad (6)$$

Als Grenzbedingungen für den Elektrodenumfang ( $x = \bar{x}$ ) beobachten wir:

$$\frac{d \bar{\vartheta}}{dx} = 0, \quad (7a) \quad t_m = \vartheta_m, \quad (7b) \quad \frac{d t_m}{dx} = \frac{d \vartheta_m}{dx}. \quad (7c)$$

Dagegen ist im allgemeinen für  $x = \bar{x}$  nicht  $\bar{t} = \bar{\vartheta}$ , sondern  $\bar{t} < \bar{\vartheta}$ , da wir durch unseren Ansatz sehr schnelle Änderungen der Temperaturverteilung bei konstanter mittlerer Temperatur  $\vartheta_m$  zugelassen haben.

Wir wollen jetzt die Gleichungen unter der vereinfachenden Annahme lösen, dass die mittlere Verlustziffer  $p_m$  überall unter den Elektroden dieselbe Grösse habe. Diese Annahme ist nicht so unzutreffend, wie man zuerst annehmen könnte, da in den meisten Fällen die mittlere Temperatur des Isoliermaterials unter den Elektroden beinahe konstant ist. Die Lösung gelingt am schnellsten auf folgendem Wege. Wir bilden  $3/A \lambda - 6 K/A' \lambda'$  und erhalten:

$$\frac{d^2 (\vartheta_m - K \bar{\vartheta})}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d (\vartheta_m - K \bar{\vartheta})}{dx} - \frac{2c^2}{A'^2} \left[ \vartheta_m \left( 1 + k \frac{A \lambda}{2 A' \lambda'} \right) - \bar{\vartheta} \left( 1 + K \frac{A \lambda}{2 A' \lambda'} + \frac{\mu'}{A' \lambda'} \frac{A^2}{2c} K \right) \right] = - \frac{p_m}{\lambda}. \quad (8)$$

Betrachten wir  $\vartheta_m - K \bar{\vartheta}$  als neue Variable, so müssen wir  $K$  so bestimmen, dass auch die eckige Klammer dieser neuen Variablen proportional wird. Hierfür lautet die Bedingung:

$$\frac{K}{1} = \frac{1 + K \left( \frac{\alpha \lambda}{2 \alpha' \lambda'} + \frac{\mu'}{\alpha' \lambda'} \frac{\alpha^2}{2c} \right)}{1 + K \frac{\alpha \lambda}{2 \alpha' \lambda'}},$$

oder: 
$$K^2 \frac{\alpha \lambda}{2 \alpha' \lambda'} + K \left( 1 - \frac{\alpha \lambda}{2 \alpha' \lambda'} - \frac{\mu'}{\alpha' \lambda'} \frac{\alpha^2}{2c} \right) - 1 = 0. \quad (9)$$

Die Lösung liefert 2 Werte:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &\cong 1 + \frac{\frac{\mu'}{\alpha' \lambda'}}{\frac{2c}{\alpha^2} \left( 1 + \frac{\alpha \lambda}{2 \alpha' \lambda'} \right)} \\ K_2 &\cong - \frac{2 \alpha' \lambda'}{\alpha \lambda} \left( 1 - \frac{\frac{\mu'}{\alpha' \lambda'}}{\frac{2c}{\alpha^2} \left( 1 + \frac{\alpha \lambda}{2 \alpha' \lambda'} \right)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Setzen wir noch:

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 &= \frac{2c}{\alpha^2} \left( 1 + K_1 \frac{\alpha \lambda}{2 \alpha' \lambda'} \right) = \frac{2c}{\alpha^2} \left[ 1 + \frac{\alpha \lambda}{2 \alpha' \lambda'} \right] + \frac{\mu'}{\alpha' \lambda'} \frac{\frac{\alpha \lambda}{2 \alpha' \lambda'}}{1 + \frac{\alpha \lambda}{2 \alpha' \lambda'}} \\ a_2^2 &= \frac{2c}{\alpha^2} \left( 1 + K_2 \frac{\alpha \lambda}{2 \alpha' \lambda'} \right) = \frac{\mu'}{\alpha' \lambda'} \frac{1}{1 + \frac{\alpha \lambda}{2 \alpha' \lambda'}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

so erhält Gleichung (8) die leicht integrierbare Form:

$$\frac{d^2(\vartheta_m - K \bar{\vartheta})}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d(\vartheta_m - K \bar{\vartheta})}{dx} - \alpha^2 (\vartheta_m - K \bar{\vartheta}) = - \frac{p_m}{\lambda}. \quad (12)$$

Die Lösung lautet:

$$\vartheta_m - K \bar{\vartheta} = \frac{p_m}{\lambda} \frac{1}{\alpha^2} - B J_0(i \alpha x), \quad (13)$$

bezw.: 
$$\vartheta_m = \vartheta_{m\infty} - \frac{K_1 B_2 J_0(i \alpha_2 x) - K_2 B_1 J_0(i \alpha_1 x)}{K_1 - K_2}, \quad (13a)$$

$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_\infty - \frac{B_2 J_0(i \alpha_2 x) - B_1 J_0(i \alpha_1 x)}{K_1 - K_2}, \quad (13b)$$

mit:

$$\vartheta_{m\infty} = p_m \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\alpha}{\lambda c} + \frac{1}{\mu'} \right), \quad (14a)$$

$$\bar{\vartheta}_\infty = p_m \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\mu'}. \quad (14b)$$

Die Werte  $\vartheta_{m\infty}$  und  $\bar{\vartheta}_\infty$  gelten für unendlich grosse Elektroden, für welche  $B_1$  und  $B_2$  verschwinden.

Die Besselsche Funktion<sup>3)</sup> erster Art  $J_0(iz)$  und ihre erste Ableitete  $-iJ_1(iz)$

sind in Fig. 3 für  $z < 3$  abgebildet. Beide Funktionen spielen bei zylindrischen Problemen genau dieselbe Rolle wie die  $\cos h$  und die  $\sin h$ -Funktion bei ebenen Koordinaten. Für  $z > 2$  ist mit guter Annäherung:

$$\left. \begin{aligned} J_0(iz) &= \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left( 1 + \frac{1}{8,3z - 6,8} \right) \\ -iJ_1(iz) &= \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left( 1 - \frac{1}{2,73z - 1,3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

und für  $z > 1,5$ :

$$\frac{J_0(iz)}{-iJ_1(iz)} = 1 + \frac{1}{2z - 1,7} \quad (16)$$

Ausserhalb der Elektroden gilt für die mittlere Uebertemperatur im Isoliermaterial eine Differentialgleichung, welche durch Kombination von Gleichung (4) und (5) mit Hilfe der Substitution:

$$\gamma^2 = \frac{2}{\mathcal{A}\lambda + \mathcal{A}^2} \cong 2 \frac{\mu}{\mathcal{A}\lambda} \quad (17)$$

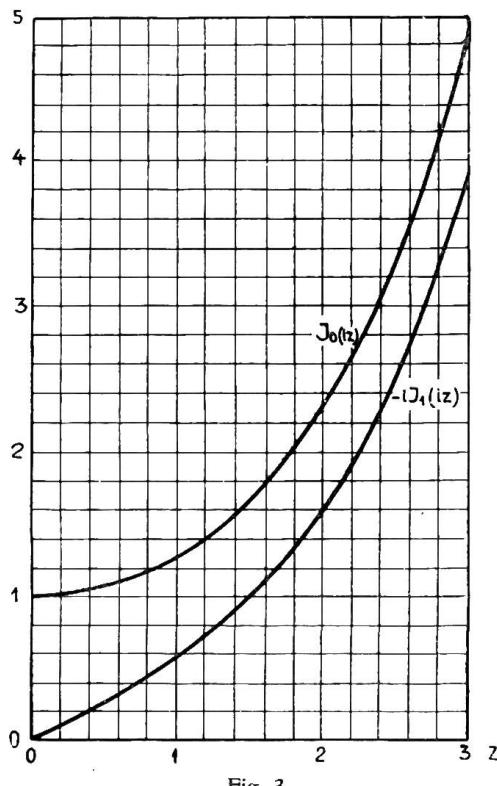


Fig. 3.

Die Funktionen  $J_0(iz)$  und  $-iJ_1(iz)$ .

erhalten wird:

$$\frac{d^2 t_m}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dt_m}{dx} - \gamma^2 t_m = 0 \quad (18)$$

und dieselbe Gleichung gilt auch für die Oberflächentemperatur  $\bar{t}$ , da diese  $t_m$  proportional ist (vgl. 5):

$$\bar{t} = \frac{t_m}{1 + \frac{\mu \mathcal{A}}{c \lambda}} \quad (5a)$$

Die Lösung lautet:

$$t_m = C i H_0^{(1)}(i\gamma x) \quad (18a)$$

Die Besselsche Funktion dritter Art  $iH_0^{(1)}(iz)$  und ihre erste Ableitete  $-H_1^{(1)}(iz)$  entsprechen der Dämpfungsfunktion  $e^{-z}$  bei ebenen Problemen. Für  $z > 0,5$  ist mit guter Annäherung:

$$\left. \begin{aligned} iH_0^{(1)}(iz) &= \frac{e^{-z}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}z}} \left( 1 - \frac{1}{8z + 4} \right) \\ -H_1^{(1)}(iz) &= \frac{e^{-z}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}z}} \left( 1 + \frac{1}{2,7z + 0,6} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

<sup>3)</sup> Bezüglich der Besselschen Funktionen siehe Jahnke und Emde, Funktionentafeln, Teubner 1909.

$$\text{und für } z > 0,3: \quad \frac{i H_0^{(1)}(iz)}{-H_1^{(1)}(iz)} = 1 - \frac{1}{2z + 1,3}. \quad (20)$$

Aus den Grenzbedingungen (7) folgt für die Integrationskonstanten:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{p_m}{2\lambda} \varepsilon \bar{x} \frac{1}{-ia_1 J_1(ia_1 \bar{x})} \\ B_2 &= \frac{p_m}{2\lambda} \varepsilon \bar{x} \frac{1}{-ia_2 J_2(ia_2 \bar{x})} \\ C &= \frac{p_m}{2\lambda} \varepsilon \bar{x} \frac{1}{-\gamma H_1^{(1)}(i\gamma \bar{x})} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

mit:

$$\varepsilon \bar{x} = \frac{2}{\gamma^2} \frac{1}{\frac{i H_0^{(1)}(i\gamma \bar{x})}{-\gamma H_1^{(1)}(i\gamma \bar{x})} + \frac{-K_2}{K_1 - K_2} \frac{J_0(ia_1 \bar{x})}{-a_1 i J_1(ia_1 \bar{x})} + \frac{K_1}{K_1 - K_2} \frac{J_0(ia_2 \bar{x})}{-a_2 i J_1(ia_2 \bar{x})}} \quad (22)$$

$$\cong \frac{2}{\gamma} \frac{1}{1 + \left[ \frac{A}{\sqrt{2c}} + \frac{1}{2} \frac{A\lambda}{\sqrt{\mu' A' \lambda'}} \right] \gamma}. \quad (22a)$$

$\varepsilon$  bedeutet, wie sich leicht zeigen lässt, das Verhältnis der ausserhalb der Elektroden ( $x > \bar{x}$ ) an die Umgebung abgeföhrten Verluste zu den Gesamtverlusten unter den Elektroden. Je grösser daher  $\varepsilon$ , um so mehr werden die Elektroden von der Wärmeableitung entlastet, und um so kleiner wird die Temperatur  $\bar{\vartheta}_0$  der Elektrodenmitte im Verhältnis zu der Grenztemperatur  $\bar{\vartheta}_\infty$ , die bei unendlich grossen Elektroden zu erwarten wäre. Die Ausrechnung liefert:

$$\bar{\vartheta}_0 = \bar{\vartheta}_\infty \left[ 1 - \frac{\mu'}{A\lambda} \varepsilon \bar{x} \frac{B_2 - B_1}{K_1 - K_2} \right], \quad (23)$$

$$\text{oder fast genau: } \bar{\vartheta}_0 \cong \bar{\vartheta}_\infty \left[ 1 - \varepsilon \frac{\frac{a_2 \bar{x}}{2}}{-i J_1(a_2 \bar{x})} \right]. \quad (23a)$$

Wenn man nun bei einem Laboratoriumsversuch die Temperatur  $\bar{\vartheta}_0$  der wärmsten Stelle der Elektroden beobachtet, darf man dann für Erwärmung und Durchschlag dieselben Gesetze anwenden, wie für die Wärmeströmung zwischen unendlich grossen Elektroden bei gleicher Randtemperatur? Diese Frage, deren Wichtigkeit von Anfang an betont wurde, lässt sich jetzt im bejahenden Sinne beantworten. Während wir nämlich bei unendlich grossen Elektroden ein Temperaturgefälle:

$$\vartheta_{m\infty} - \bar{\vartheta}_\infty = p_m \frac{A^2}{2c\lambda} \quad (14c)$$

zu erwarten haben, erhalten wir unter der Mitte endlicher Elektroden:

$$\vartheta_{m0} - \bar{\vartheta}_0 = (\vartheta_{m\infty} - \bar{\vartheta}_\infty) - \left[ \frac{1 - K_2}{K_1 - K_2} B_1 + \frac{K_1 - 1}{K_1 - K_2} B_2 \right] \quad (24)$$

$$= p_m \frac{A^2}{2c\lambda} \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \frac{A\lambda}{2A'\lambda'}} \left( \frac{a_1 \bar{x}}{-2iJ_1(i a_1 \bar{x})} + \frac{A\lambda}{2A'\lambda'} \frac{a_2 \bar{x}}{-2iJ_1(i a_2 \bar{x})} \right) \right]$$

$$\cong p_m \frac{A^2}{2c\lambda} \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \frac{2A'\lambda'}{A\lambda}} \cdot \frac{a_2 \bar{x}}{-2iJ_1(i a_2 \bar{x})} \right]. \quad (24a)$$

Da nun  $\varepsilon < 1$  und  $\frac{\lambda'}{\lambda}$  eine sehr grosse

Zahl ist, wird der Klammerwert meist sehr nahezu gleich 1, d. h. das Wärmegefälle unter der Elektrodenmitte ist nur unmerklich kleiner als für eindimensionale Wärmeströmung. Die radiale Leitfähigkeit auch sehr dünner Elektroden ist eben soviel grösser als die radiale Leitfähigkeit auch ziemlich dicken Isoliermaterials, dass die Elektroden nahezu Isotherme bilden, auf welche die Wärme adiabt zuströmt.

Die gewonnenen Ergebnisse gestatten eine einfache graphische Interpretation. Wir denken uns die Funktion  $p_m = \Phi(\vartheta_m)$  graphisch gegeben (Fig. 4), wobei ich daran erinnere, dass alle Temperaturen  $\vartheta$  und  $t$  Uebertemperaturen über die Umgebung bedeuten. Ferner berechnen wir aus Gleichung (23 a) und

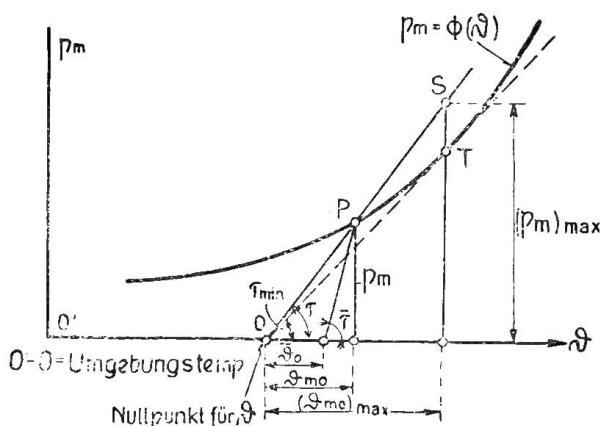


Fig. 4.

Anwendungsbeispiel der graphischen Methode.

(24a) die mittlere Temperatur  $\vartheta_{m0}$  nach erreichtem Wärmegleichgewicht:

$$\vartheta_{m0} = p_m \operatorname{ctg} \tau$$

mit: 
$$\operatorname{ctg} \tau = \left( \frac{A^2}{2c\lambda} + \frac{A}{2\mu'} \right) - \varepsilon - \frac{a_2 \bar{x}}{-2iJ_1(i a_2 \bar{x})} \left( \frac{\frac{A^2}{2c\lambda}}{1 + \frac{2A'\lambda'}{A\lambda}} + \frac{A}{2\mu'} \right). \quad (25)$$

Legen wir dann durch den Nullpunkt  $O$  unserer Temperaturskala eine Gerade unter dem Neigungswinkel  $\tau$ , so schneidet diese die Verlustkurve in dem Gleichgewichtspunkte  $P$ . Legt man durch  $P$  eine Gerade mit dem Neigungswinkel  $\bar{\tau}$ , wobei:

$$\operatorname{ctg} \bar{\tau} = \frac{\vartheta_{m0} - \bar{\vartheta}_0}{p_m} = \frac{A^2}{2c\lambda} \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \frac{2A'\lambda'}{A\lambda}} \frac{a_2 \bar{x}}{-2iJ_2(i a_2 \bar{x})} \right], \quad (24b)$$

so bestimmt der Schnittpunkt mit der Abszissenachse die Elektroden temperatur  $\vartheta_0$ . Wie man mit Hilfe dieses Punktes den Wert von  $c$  kontrollieren kann, ist in Teil I dieser Arbeit (Abschnitt 2, Fig. 7) auseinander gesetzt und soll hier nicht wiederholt werden. Erhöht man die Prüfspannung, bis die Verlustkurve im Verhältnis  $\operatorname{tg} \tau / \operatorname{tg} \tau_{\min}$  höher liegt als die ursprüngliche Kurve, so schlägt das Material bei Dauerprüfung durch.

Um unerwünschte Durchschläge unter dem Rande der Elektroden zu vermeiden, ist es wichtig, dass die dort herrschende Temperatur wesentlich geringer sei als die

Temperatur unter der Elektrodenmitte. Gemäss (7b) und (18a) berechnen wir für  $x = \bar{x}$ :

$$(\vartheta_m)_{\bar{x}} = \frac{p_m}{2\lambda} \frac{\varepsilon \bar{x}}{\gamma} \frac{i H_0^{(1)}(i\gamma \bar{x})}{-H_1^{(1)}(i\gamma \bar{x})} . \quad (26)$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung (25) folgt daraus:

$$\frac{(\vartheta_m)_{\bar{x}}}{\vartheta_{m0}} = \frac{\varepsilon \gamma \bar{x}}{2} \frac{i H_0^{(1)}(i\gamma \bar{x})}{-H_1^{(1)}(i\gamma \bar{x})} \frac{\mu'}{\mu} \frac{1 + \frac{\Delta \mu}{c \lambda}}{\left(1 + \frac{\Delta \mu'}{c \lambda}\right) - \varepsilon \frac{a_2 \bar{x}}{2iJ(i a_2 \bar{x})} \left(1 + \frac{\Delta \mu'}{1 + \frac{2\Delta' \lambda'}{\Delta \lambda}}\right)} \quad (27)$$

$$\approx \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\Delta \mu}{c \lambda}} + \sqrt{\frac{\Delta \lambda}{2\Delta' \lambda'} \frac{\mu}{\mu'}}} . \quad (27a)$$

Obgleich die letzte abgekürzte Formel nicht sonderlich genau ist, zeigt sie doch deutlich, worauf es bei der Vermeidung von Randdurchschlägen ankommt: Gute Kühlung des nicht dem Felde ausgesetzten Materials ( $\mu$ ) bei nicht zu kleinen Wandstärken  $\Delta$ ; möglichst dünne Elektroden  $\Delta'$  mit möglichst kleiner Wärmeleitzahl  $\lambda'$  und geringer Wärmeabfuhr ( $\mu'$ ).

Zum Schlusse möge ein Zahlenbeispiel die gewonnenen Gesetzmässigkeiten noch anschaulicher machen: Ein aus Bakelitpapier gewickelter Zylinder von 3 mm Wandstärke, wie er häufig zur Isolation zwischen Hoch- und Niederspannungswicklung von Transformatoren verwendet wird, soll in 70° heissem Oel auf Durch-

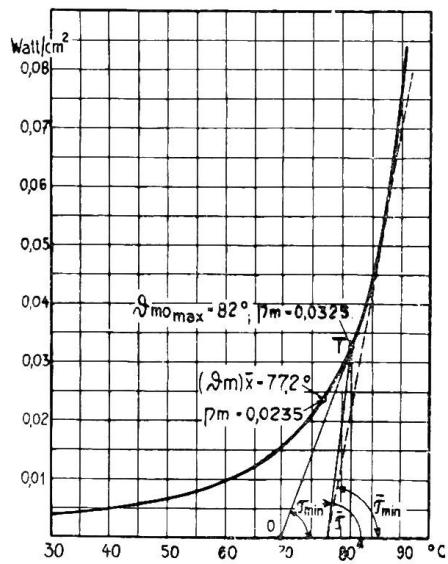


Fig. 5.

Die Verlustziffer als Funktion der Temperatur.

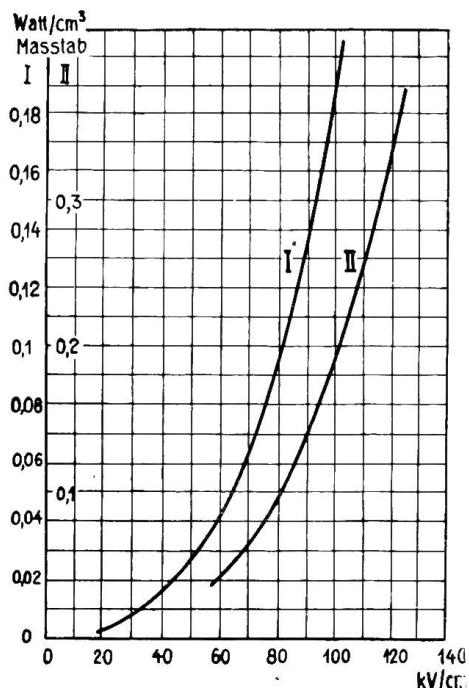


Fig. 6.

Die Verlustziffer in Funktion der Feldstärke.

schlag geprüft werden. Als Elektroden dienen runde Stanniolblättchen von 4 cm Durchmesser und 0,1 mm Dicke, die mittelst Bakelitlösung auf dem Zylinder aufgeklebt werden. Die Verlustziffer bei 40 kV/cm Feldstärke ist durch Fig. 5 als

Funktion der Temperatur gegeben. Fig. 6 illustriert die Abhängigkeit der Verlustziffer von der Feldstärke bei  $70^{\circ}\text{C}$ . Welches ist die grösste Spannung  $E_{\max}$ , welche bei dieser Prüfung dauernd ertragen wird?

$$\begin{aligned} \text{Gegeben:} \quad A &= 0,3 \text{ cm}, & A' &= 0,01 \text{ cm}, \\ \lambda &= 0,00165 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \text{ }^{\circ}\text{C}}, & \lambda' &= 0,63 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \text{ }^{\circ}\text{C}}, \\ \mu' &= \mu = 0,01 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \text{ }^{\circ}\text{C}}, & x &= 2 \text{ cm}. \end{aligned}$$

$$\text{Geschätzt:} \quad c = 5,7.$$

Berechnet:

$$\begin{aligned} \text{nach Gl. (10):} \quad K_1 &= 1,012, & K_2 &= -25,2; \\ \text{„ „ (11):} \quad a_1^2 &= 132, & a_1 &= 11,5, & a_1 \bar{x} &= 23, \\ & a_2^2 = 1,53, & a_2 &= 1,24, & a_2 \bar{x} &= 2,48; \\ \text{„ „ (16):} \quad \frac{J_0(i a_1 \bar{x})}{-i J_1(i a_1 \bar{x})} &= 1,023, & \frac{J_0(i a_2 \bar{x})}{-i J_1(i a_2 \bar{x})} &= \frac{3,24}{2,48} = 1,307; \\ \text{„ „ (17):} \quad \gamma^2 &= 30,6, & \gamma &= 5,25, & \gamma \bar{x} &= 11,05; \\ \text{„ „ (20):} \quad \frac{i H_0^{(1)}(i \gamma \bar{x})}{-H_1^{(1)}(i \gamma \bar{x})} &= 0,957; \\ \text{„ „ (22):} \quad \varepsilon \bar{x} &= 0,219, & \varepsilon &= 0,1095; \\ \text{„ „ (22a):} \quad \varepsilon \bar{x} &= 0,222 \text{ (also gute Annäherung);} \\ \text{„ „ (14):} \quad \vartheta_{m\infty} &= 19,8 p_m, & \bar{\vartheta}_{\infty} &= 15 p_m \text{ (für unendlich grosse Elektroden);} \\ \text{„ „ (23a):} \quad \bar{\vartheta}_0 &= 14,2 p_m; \\ \text{„ „ (24a):} \quad \vartheta_{m0} - \bar{\vartheta}_0 &= 4,8 p_m = \vartheta_{m\infty} - \bar{\vartheta}_{\infty}; \\ \text{„ „ (26):} \quad (\vartheta_m) \bar{x} &= 11,5 p_m; \\ \text{„ „ (27):} \quad \frac{(\vartheta_m) \bar{x}}{\vartheta_{m0}} &= 0,605; \\ \text{„ „ (27a):} \quad \frac{(\vartheta_m) \bar{x}}{\vartheta_{m0}} &= 0,568 \text{ (also brauchbare Annäherung).} \end{aligned}$$

Damit sind alle Werte ermittelt, deren man zur Anwendung der graphischen Methode bedarf. Aus Fig. 5 entnimmt man für  $40 \text{ kV/cm}$ :

$$\text{ctg } \tau_{\min} = 370 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{Watt/cm}^3}.$$

$$\text{Berechnet wurde:} \quad \text{ctg } \tau = \frac{\vartheta_{m0}}{p_m} = 19.$$

An der Grenze der Stabilität dürfen daher die Ordinaten der Verlustkurve im Verhältnis  $370:19$ , das ist 19,5 mal höher sein als in der für  $40 \text{ kV/cm}$  gezeichneten Kurve (Fig. 5). Nun beträgt aber die Verlustziffer bei  $40 \text{ kV/cm}$  und  $70^{\circ}\text{C}$ :  $0,015 \text{ Watt/cm}^3$ . Also darf die Verlustziffer in Wirklichkeit bei gleicher Temperatur

$19,5 \cdot 0,015 \cdot 0,293$  betragen. Dem entspricht nach Fig. 6 eine Feldstärke von  $107 \text{ kV/cm}$ , also eine höchste Prüfspannung von:

$$A \cdot 107 = 32 \text{ kV.}$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst und ich will nur noch einige interessante Details anführen: Die Tangente durch  $O$  (Fig. 5) berührt die Verlustkurve in einem Punkte mit der Verlustziffer  $0,0325$  und der Temperatur  $82^\circ$ . Die mittlere Temperatur des Zylinders unter der Elektrodenmitte steigt also auch bei der Prüfung mit  $32 \text{ kV}$  auf  $82^\circ$  und die Verlustziffer auf  $19,5 \cdot 0,0325 = 0,635 \text{ Watt/cm}^3$ . Dieser Verlustziffer entspricht eine grösste Elektrodentemperatur von  $70 + 14,2 \cdot 0,63 = 79^\circ$ .

Unter dem Elektrodenende ist die mittlere Temperatur des Zylindermaterials geringer. Sie beträgt  $70^\circ + 0,605 \vartheta_{m0} = 77,2^\circ$ . Die Verlustziffer beträgt dabei  $19,5 \cdot 0,0235 = 0,0458$ , d. i.  $72\%$  der Verlustziffer unter der Elektrodenmitte. Falls also die Feldkonzentration die mittleren Verluste nicht mehr als um  $100 \frac{28}{72} = 39\%$  erhöht, so werden keine Randdurchschläge auftreten.

Endlich kann man noch die Schätzung  $c = 5,7$  nach der im ersten Teil, Abschnitt 2, angegebenen Methode wie folgt kontrollieren: Man legt durch den der grössten Elektrodentemperatur entsprechenden Punkt der Abszissenachse ( $\vartheta_0 + 70 = 79^\circ$ ) die Tangente an die Verlustkurve der Fig. 5 und bestimmt deren Neigung durch:

$$\operatorname{ctg} \tau_{\min} = 160.$$

Zieht man ebenfalls durch  $79^\circ$  die Gerade nach dem Berührungs punkt  $P$  der  $70^\circ$ -Tangenten, so findet man:

$$\operatorname{ctg} \tau = \frac{3^\circ}{0,0325 \text{ Watt/cm}^3} = 92,2.$$

Daraus berechnet man einen Parameter:

$$\delta = \frac{92,2}{160} = 0,576$$

und findet:

$$c \cong 6 - 0,3 \delta = 5,8.$$

Die Schätzung  $c = 5,7$  verursacht also keinen erheblichen Fehler.

## 2. Der Durchschlag fester Isolierstoffe bei Dauerprüfung nach der Kanaltheorie.

Die Kanaltheorie in der Form, welche K. W. Wagner<sup>4)</sup> ihr gegeben hat, behauptet, die Durchschlagsspannung fester Isolierstoffe sei der Schichtdicke proportional. Abweichende experimentelle Ergebnisse seien auf die Feldkonzentration an den Rändern der Elektroden zurückzuführen. Demgegenüber habe ich gezeigt, dass nach der Theorie des Durchschlages von quasihomogenen, festen Isolierstoffen die Durchschlagsspannung auch im homogenen Feld immer langsamer als die Plattenstärke zunimmt und sogar mit wachsender Plattenstärke einem gewissen Grenzwert zustrebt.

Man könnte versucht sein, daraus folgenden Schluss zu ziehen: Solange die Durchschlagsspannung proportional der Schichtstärke wächst, gilt die Kanaltheorie; wächst sie dagegen langsamer, so gilt die Theorie für quasihomogene Stoffe.

In Wirklichkeit ist jedoch eine solche Trennung weder zulässig noch möglich: Zunächst lässt Gleichung (11), Teil I, der Theorie für quasihomogenes Material die Möglichkeit zu, dass die Durchschlagsspannung in sehr dünnen Schichten *nahezu*

<sup>4)</sup> The physical nature of the electrical breakdown of solid dielectrics, Journal of the A.I.E.E., Vol. 41, Dec. 1922.

proportional der Plattenstärke zunimmt, nämlich dann, wenn in dem Exponentialgesetz der Verlustziffer  $p$  als Funktion der Feldstärke  $F = \frac{E}{A}$ :

$$p = C \left( \frac{E}{A} \right)^n \quad (1)$$

der Exponent  $n$  eine sehr grosse Zahl ist. Wir haben Grund zu der Annahme, dass bei dünnen Platten  $n$  in der Tat sehr viel grösser als 2 ist.

Abgesehen davon ist es aber nicht einmal richtig, wenn nach der Kanaltheorie allgemein eine strenge Proportionalität zwischen Durchschlagsspannung und Plattenstärke behauptet wird. Vielmehr fordert in vielen Fällen auch eine konsequent durchgeführte Kanaltheorie, im Gegensatz zu Wagner, dass die Durchschlagsspannungen langsamer als die Plattenstärke wachsen. Nur sind bei gleichem Verlustgesetz (1) die Abweichungen von der Proportionalität kleiner als für quasihomogenes Material.

Die Schwäche der Wagnerschen Theorie liegt in ihrer unscharfen mathematischen Formulierung. In dem Bestreben, die Theorie allgemein zu halten und sich nicht auf eine bestimmte Form des Kanals festzulegen, entging Wagner der Einfluss der Plattenstärke auf die Wärmeableitung und damit auf die Erwärmung und Durchschlagfestigkeit des Materials. Um diese Gesetzmässigkeiten mit möglichst einfachen Mitteln ableiten zu können, wollen wir umgekehrt die physikalische Aufgabe auf einen geometrisch voll bestimmten Fall zurückführen, wenngleich dieser wesentlich einfacher ist als die Wirklichkeit, die er abbilden soll. Wir wollen nämlich annehmen, dass in dem zwischen grossen ebenen Elektroden untersuchten Gebiete nur ein einziger Kanal von abnorm hoher Verlustziffer  $p_{m_0}$  enthalten sei, ferner dass dieser

Kanal die Form eines Kreiszylinders vom Radius  $r$  und der Länge  $A$  (= Plattenstärke) besitze (Fig. 7) und endlich, dass die abnormal hohe Verlustziffer  $p_{m_0}$  des Kanals und die normale Verlustziffer  $p_m$  des gesunden Materials nach erreichtem Wärmegleichgewicht als Konstante betrachtet werden dürfen. Offenbar übertreiben wir durch die letzte Annahme die Rolle, welche das den Kanal unmittelbar umgebende gesunde Material für die radielle Ableitung der Kanalverluste spielt. Denn da

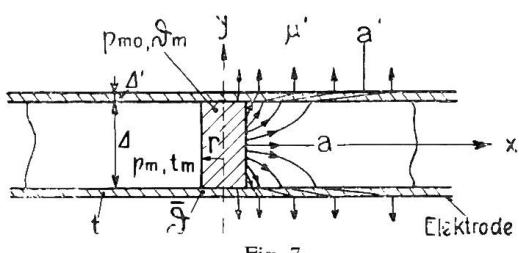


Fig. 7.  
Wärmeströmung im inhomogenen Material.

der Kanal die angrenzenden Schichten des gesunden Materials erwärmt, erhöht er deren Verlustziffer und Temperatur und vermindert damit das radiale Temperaturgefälle. Doch sind dies Feinheiten von untergeordneter Bedeutung gegenüber der prinzipiellen Frage nach dem Einfluss der Plattenstärke  $A$ .

Hier sind die wichtigsten Fragen offenbar folgende:

Erstens: Wird innerhalb des Zylinders die Wärme hauptsächlich in radialer oder achsialer Richtung abgeleitet? Und

Zweitens: Wenn die radiale Wärmeleitung innerhalb des Kanals überwiegt, tritt dann auch in dem gesunden Material das grösste Temperaturgefälle in radialer Richtung auf, oder wird hier gemäss Fig. 7 die Wärmeströmung so schnell abgelenkt, dass das Temperaturgefälle in achsialer Richtung überwiegt? Trifft dies zu, so muss die Plattenstärke von wesentlichem Einfluss auf die Erwärmung des Kanals sein und bei dem guten Leitvermögen auch der dünnsten Metallektroden erscheint die Verwirklichung dieses Falles von vorneherein recht wahrscheinlich.

Bei der quantitativen Unterordnung des oben beschriebenen und durch Fig. 7 festgelegten Problems bedient man sich mit Vorteil derselben Vereinfachungen, die wir schon bei der Behandlung des zweidimensionalen Wärmeleitungsproblems für quasihomogenes Material (Fig. 2) eingeführt haben. Mit den gleichen Bezeichnungen

wie dort erhält man Differentialgleichungen derselben Bauart, so dass ich auf ihre Aufstellung und den Weg zu ihrer Lösung hier nicht näher einzugehen braudhe.

Innerhalb des kranken Kanals, d. h. für  $x = 0$  bis  $x = r$  gilt für das Isolationsmaterial<sup>5)</sup>:

$$\frac{d^2 \vartheta_m}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d \vartheta_m}{dx} - \frac{2c}{A^2} (\vartheta_m - \bar{\vartheta}) = - \frac{p_{m0}}{\lambda} \quad (28)$$

und für die Elektroden zwischen denselben Grenzen:

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d \bar{\vartheta}}{dx} + \frac{2c^2}{A^2} \frac{A \lambda}{2A' \lambda'} (\vartheta_m - \bar{\vartheta}) = - \frac{\mu'}{A' \lambda'} \bar{\vartheta}. \quad (29)$$

Ausserhalb des Kanals gilt für das gesunde Isolationsmaterial:

$$\frac{d^2 t_m}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d t_m}{dx} - \frac{2c^2}{A^2} (t_m - \bar{t}) = - \frac{p_m}{\lambda} \quad (30)$$

und für die Elektroden genau wie oben:

$$\frac{d^2 \bar{t}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d \bar{t}}{dx} + \frac{2c^2}{A^2} \frac{A \lambda}{2A' \lambda'} (t_m - \bar{t}) = - \frac{\mu'}{A' \lambda'} \bar{t}. \quad (31)$$

Beide Gebiete gehen für  $x = r$  stetig ineinander über, so dass wir als Grenzbedingungen:

$$\vartheta_m = t_m, \quad \frac{d \vartheta_m}{dx} = \frac{d t_m}{dx}, \quad \bar{\vartheta} = \bar{t}, \quad \frac{d \bar{\vartheta}}{dx} = \frac{d \bar{t}}{dx} \quad (32)$$

erhalten. Denken wir uns ferner die Platte aus Isoliermaterial und die Prüfelektroden unendlich ausgedehnt, so muss sich die Temperaturverteilung mit wachsendem  $x$  den Grenzwerten:

$$t_{m\infty} = p_m \frac{A}{2} \left( \frac{A}{\lambda c} + \frac{1}{\mu'} \right) \quad (33a)$$

$$\bar{t}_{\infty} = p_m \frac{A}{2} \frac{1}{\mu'} \quad (32b)$$

annähern.

Die Lösung der Differentialgleichungen lautet mit den früher eingeführten Substitutionen:

$$K_1, \quad K_2 \quad (\text{allgemein } K), \quad a_1, \quad a_2 \quad (\text{allgemein } a)$$

und den früher erklärten Zeichen  $J$  und  $H$  für Besselsche Funktionen:

$$\vartheta_m - K \bar{\vartheta} = \frac{p_{m0}}{\lambda} \frac{1}{a^2} - B J_0(i a x), \quad (34)$$

$$t_m - K \bar{t} = \frac{p_m}{\lambda} \frac{1}{a^2} + i C H_0^{(1)}(i a x), \quad (35)$$

<sup>5)</sup> Alle Temperaturen sind Uebertemperaturen über die Umgebungstemperatur.

$\vartheta_m$  bzw.  $t_m$  bezeichnen den Mittelwert der Uebertemperatur im Isolationsmaterial über die Schichtdicke  $A$  an irgend einer Stelle  $x$ .

$\bar{\vartheta}$  bzw.  $\bar{t}$  sind die Oberflächen-Uebertemperaturen, die bei gut anliegenden Elektroden mit der Elektroden temperatur an gleicher Stelle übereinstimmen.

Die Wärmeableitung erfolge symmetrisch zur  $x$ -Ebene und zur Kanalachse.

oder:  $\vartheta_m = t_{m\infty} \frac{p_{m0}}{p_m} - \frac{K_1 B_2 J_0(i a_2 x) - K_2 B_1 J_0(i a_1 x)}{K_1 - K_2} , \quad (36)$

$$\bar{\vartheta} = \bar{t}_\infty \frac{p_{m0}}{p_m} - \frac{B_2 J_0(i a_2 x) - B_1 J_0(i a_1 x)}{K_1 - K_2} , \quad (37)$$

$$t_m = t_{m\infty} + \frac{K_1 C_2 i H_0^{(1)}(i a_2 x) - K_2 C_1 i H_0^{(1)}(i a_1 x)}{K_1 - K_2} , \quad (38)$$

$$\bar{t} = \bar{t}_\infty + \frac{C_2 i H_0^{(1)}(i a_2 x) - C_1 i H_0^{(1)}(i a_1 x)}{K_1 - K_2} . \quad (39)$$

Aus den Grenzbedingungen folgt für die Integrationskonstanten  $B_1$ ,  $B_2$  ( $B$ ) bzw.  $C_1$ ,  $C_2$  ( $C$ ):

$$B = \frac{p_{m0} - p_m}{\lambda} \frac{1}{a^2} \frac{1}{-i J_1(i a r) \left[ \frac{J_0(i a r)}{-i J_1(i a r)} + \frac{i H_0^{(1)}(i a r)}{-H_1^{(1)}(i a r)} \right]} , \quad (40)$$

$$C = \frac{p_{m0} - p_m}{\lambda} \frac{1}{a^2} \frac{1}{-H_1^{(1)}(i a r) \left[ \frac{J_0(i a r)}{-i J_1(i a r)} + \frac{i H_0^{(1)}(i a r)}{-H_1^{(1)}(i a r)} \right]} . \quad (41)$$

Wir wollen von einer eingehenden Diskussion dieser Lösung absehen und nur das herausgreifen, was zur Beantwortung der vorher gestellten Fragen dienlich erscheint: Die erste Frage betraf die Wärmeleitung innerhalb des kranken Kanals.

Wir unterscheiden die Gesamtverluste des Kanals:

$$P_0 = p_{m0} r^2 \pi \Delta \quad (42a)$$

und die zusätzlichen Kanalverluste oder den Verlustüberschuss:

$$P_z = (p_{m0} - p_m) r^2 \pi \Delta \quad (42b)$$

über die normalen Kanalverluste:

$$P = p_m r^2 \pi \Delta . \quad (42c)$$

Von den Gesamtverlusten  $P_0$  wird schon innerhalb des Kanals ein Teil:

$$P_y = \frac{2 c \lambda}{\Delta} \int_0^r (\vartheta_m - \bar{\vartheta}) 2 x \pi dx \quad (42d)$$

in achsialer Richtung an die Elektroden abgeleitet. Hierbei kann  $\vartheta_m - \bar{\vartheta}$  aus Gleichung (34) eingesetzt werden, da sich für alle praktisch in Betracht kommenden Fälle  $K_1$  nicht merklich von der Einheit unterscheidet. Die Ausrechnung liefert:

$$P_y = P_0 - P_z \frac{f(a_1 r)}{1 + K_1 \frac{\Delta \lambda}{2 \Delta' \lambda'}} \cong P + P_z (1 - f(a_1 r)) . \quad (43a)$$

Die Funktion:

$$f(a_1 r) = \frac{1}{a_1 r \left[ \frac{J_0(i a_1 r)}{-i J_1(i a_1 r)} + \frac{i H_0^{(1)}(i a_1 r)}{-H_1^{(1)}(i a_1 r)} \right]} \quad (43b)$$

kann Fig. 8 entnommen werden, wobei zu beachten ist, dass der Parameter:

$$a_1 r = \frac{r}{\Delta} \sqrt{2c} \cong \sqrt{3} \frac{2r}{\Delta} \quad (44)$$

dem Verhältnis aus Kanaldurchmesser und Kanallänge proportional ist.

Gleichung (43a) lehrt, dass die normalen Kanalverluste  $P$  stets in achsialer Richtung abgeleitet werden, von dem Verlustüberschuss  $P_z$  dagegen nur ein gewisser Prozentsatz, den die Funktion  $1 - f(a_1 r)$  angibt. Aus Fig. 8 sehen wir, dass für sehr dünne Kanäle, nämlich für:

$$a_1 r \leq 0,35$$

$$\text{bezw. } \frac{2r}{\Delta} \leq \frac{1}{5}$$

$P_y - P \leq 0,08 P_z$  erhalten wird, also mit guter Näherung vernachlässigt werden kann. Mit der Verbreiterung des Kanals steigt jedoch die in der achsialen Richtung abgeleitete Verlustwärme sehr schnell und schon bei:

$$a r = 1,7 \quad \text{bezw. } \frac{2r}{\Delta} \cong 1$$

wird nicht weniger als die Hälfte des Verlustüberschusses  $P_z$  schon innerhalb des Kanals an die Elektroden abgeführt. Von da an überwiegt die achsiale Wärmeleitung und für:

$$a r \geq 5 \quad \text{bezw. } \frac{2r}{\Delta} \geq 3$$

werden mindestens 80 % des gesamten Verlustüberschusses  $P_z$  auf diesem Wege abgeleitet, so dass für den Kanal schon nahezu dieselben Gesetzmäßigkeiten der Erwärmung und der Durchschlagsspannung als Funktion der Schichtdicke  $\Delta$  gelten wie für quasihomogenes Material von gleicher Verlustziffer im homogenen Feld.

Ich übergehe die Behandlung der Wärmeströmung ausserhalb des Kanals und wende mich gleich zum Kernpunkte unseres Problems, das ist der Erwärmung des Kanals und dem Einfluss der Schichtdicke  $\Delta$  auf diese Erwärmung: Zweckmässig unterscheidet man die mittlere Uebertemperatur des Kanals über die Raumtemperatur oder die Temperatur des umgebenden Mediums, also:

$$\text{Mittl. } (\vartheta_m) = \frac{1}{r^2 \pi} \int_0^r 2x \pi \vartheta_m dx \quad (45)$$

und die mittlere Uebertemperatur des Kanals über das gesunde Isolationsmaterial, also das radiale Temperaturgefälle innerhalb des Isolationsmaterials:

$$\text{Mittl. } (\vartheta_{mz}) = \text{Mittl. } (\vartheta_m) - t_{m\infty} . \quad (46)$$

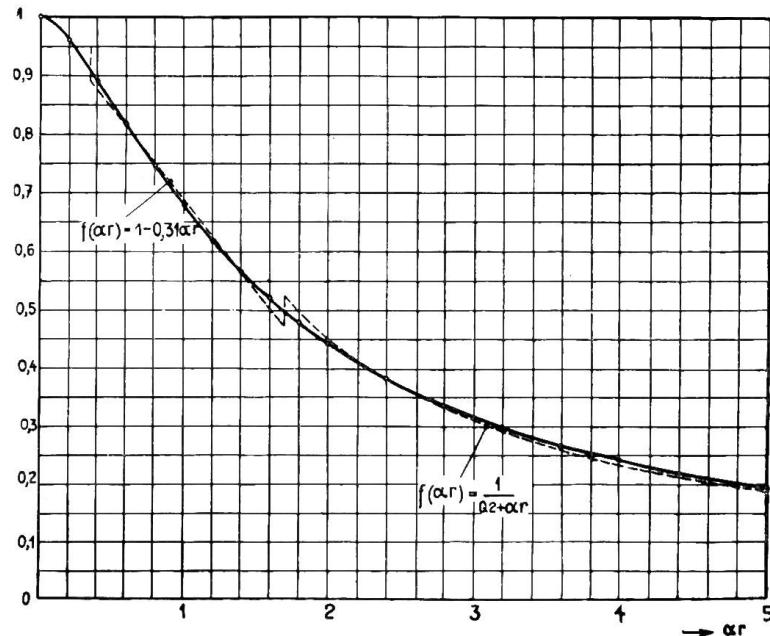


Fig. 8.  
Die Funktion  $f(\alpha r)$ .

Hierfür berechnen wir:

$$\text{Mittl. } (\vartheta_{mz}) = \frac{p_{m0} - p_m}{\lambda} \left[ \frac{1}{1 + \frac{\Delta \lambda}{2 \Delta' \lambda'}} \frac{\left(1 + \frac{\Delta \lambda}{2 \Delta' \lambda'}\right)^2 - f(a_1 r)}{a_1^2} + \frac{1}{1 + \frac{\Delta \lambda}{2 \Delta' \lambda'}} \frac{1 - f(a_2 r)}{a_2^2} \right], \quad (47)$$

$$\cong (p_{m0} - p_m) \Delta \left[ \frac{1}{\Delta \lambda} \frac{1 - f(a_1 r)}{a_1^2} + \frac{1}{2 \Delta' \lambda'} \frac{1 - f(a_2 r)}{a_2^2} \right], \quad (47a)$$

$$\cong (p_{m0} - p_m) \Delta \left[ \frac{1}{\lambda \sqrt{2c}} \frac{1 - f(a_1 r)}{a_1} + \frac{1}{2 \sqrt{\mu' \Delta' \lambda'}} \frac{1 - f(a_2 r)}{a_2} \right], \quad (47b)$$

$$\cong (p_{m0} - p_m) \Delta \left[ \frac{\Delta}{2c \lambda} (1 - f(a_1 r)) + \frac{1}{2 \mu'} (1 - f(a_2 r)) \right], \quad (47c)$$

oder wenn wir das Temperaturgefälle auf die totalen zusätzlichen Kanalverluste  $P_z$  beziehen:

$$\text{Mittl. } (\vartheta_{mz}) \cong \frac{P_z}{\pi} \left[ \frac{1}{\Delta \lambda} \frac{1 - f(a_1 r)}{(a_1 r)^2} + \frac{1}{2 \Delta' \lambda'} \frac{1 - f(a_2 r)}{(a_2 r)^2} \right], \quad (48a)$$

$$\cong \frac{P_z}{r \pi} \left[ \frac{1}{\lambda \sqrt{2c}} \frac{1 - f(a_1 r)}{a_1 r} + \frac{1}{2 \sqrt{\mu' \Delta' \lambda'}} \frac{1 - f(a_2 r)}{(a_2 r)} \right], \quad (48b)$$

$$\cong \frac{P_z}{r^2 \pi} \left[ \frac{\Delta}{2c \lambda} (1 - f(a_1 r)) + \frac{1}{2 \mu'} (1 - f(a_2 r)) \right]. \quad (48c)$$

In allen diesen Gleichungen setzt sich die berechnete Uebertemperatur aus zwei Summanden zusammen. Der erste Summand ist der grösste und wichtigste. Er hat nichts mit den Elektroden zu schaffen, sondern hängt ausschliesslich von den Eigenschaften des Isoliermaterials ab, von seiner Dicke, Wärmeleitfähigkeit, Verlustziffer und dem Durchmesser des Kanals. Dieser Summand ist daher selbst wieder eine für das Material charakteristische Grösse.

Der zweite Summand dagegen kennzeichnet den Einfluss der Elektroden auf die Kanalerwärmung. Er enthält deren Dicke, Leitfähigkeit und Wärmeabgabekonstante, während die Vorgänge im benachbarten Dielektrikum nur durch die zusätzlichen Kanalverluste und den Kanaldurchmesser ausgedrückt werden. Soll die Prüfung dünner Isoliermaterialien zwischen Metallelektroden objektive Ergebnisse liefern, so muss dieser zweite Summand klein sein und glücklicherweise ist dies auch in der Regel der Fall, wie ich später an einem Zahlenbeispiel zeigen werde. Wir können uns daher bei der Diskussion der gefundenen Lösung auf die Untersuchung des ersten Summanden beschränken.

Der erste Summand in Gleichung (47) und (48) (wir bezeichnen ihn mit Mittl.  $(\vartheta_{mz})_1$ ) ist der Funktion  $1 - f(a_1 r)$  proportional. Diese Funktion kann in drei aufeinanderfolgenden Gebieten, nämlich zwischen den Grenzen:

$$ar = 0 \text{ bis } ar = 0,35, \quad ar = 0,35 \text{ bis } ar = 1,7, \quad ar = 1,7 \text{ bis } ar = \infty$$

durch drei verschiedene Näherungsgleichungen ausgedrückt werden und demgemäß wechselt auch der Einfluss der Materialstärke  $\Delta$  auf die Kanalerwärmung.

Den geringsten Einfluss besitzt  $\Delta$  für den ersten Bereich:

$$\alpha_1 r \leq 0,35 \quad \text{bezw.} \quad \frac{\Delta}{2r} \leq 5 \quad (\text{für } c = 6) .$$

Hierfür gilt mit sehr guter Annäherung:

$$\frac{1 - f(\alpha_1 r)}{(\alpha r)^2} = 0,183 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha r} \quad (49)$$

und daher:

$$\text{Mittl. } (\vartheta_{mz})_1 \cong \frac{p_{m0} - p_m}{\lambda} r^2 \left( 0,183 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha_1 r} \right) , \quad (50)$$

$$\cong \frac{p_{m0} - p_m}{2\lambda} r^2 \left( \ln \frac{\Delta}{2r} - 0,182 \right) \quad (\text{für } c = 6) . \quad (50a)$$

Gemäss Fig. 9 wächst die Erwärmung in diesem Gebiete langsamer als die Schichtdicke, vorausgesetzt, dass Verlustziffer und Kanaldurchmesser ihre Werte beibehalten.

Eine stärkere Abhängigkeit von der Schichtdicke zeigt die Erwärmung in dem folgenden Bereich:

$$\alpha_1 r = 0,35 \sim 1,7$$

$$\text{bezw.} \quad \frac{2r}{\Delta} = 0,2 \text{ bis } 1 \quad (\text{für } c = 6) .$$

Hier gilt nämlich näherungsweise (vergl. Fig. 8):

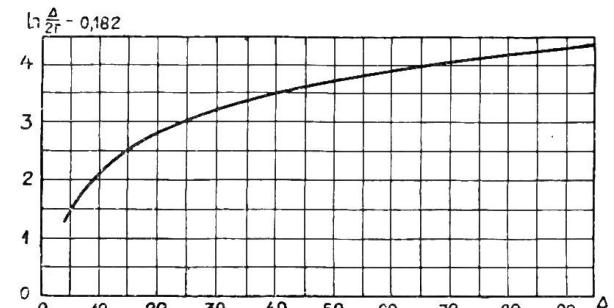


Fig. 9.

Fig. 9.

$$\frac{1 - f(\alpha r)}{\alpha r} = 0,31 \quad (51)$$

und daher:

$$\text{Mittl. } (\vartheta_{mz})_1 \cong \frac{p_{m0} - p}{\lambda} r \Delta \frac{0,31}{\sqrt{2c}} \cong 0,09 \frac{p_{m0} - p}{\lambda} r \Delta \quad (\text{für } c = 6) , \quad (52)$$

oder auch:

$$\text{Mittl. } (\vartheta_{mz})_1 \cong \frac{P_z}{r \pi} \frac{0,31}{\lambda \sqrt{2c}} \cong 0,0286 \frac{P_z}{r \lambda} \quad (\text{für } c = 6) . \quad (53)$$

Die Erwärmung wächst also hier bei konstanter Verlustziffer und Kanalweite direkt proportional der Materialdicke.

Endlich kommt das letzte Gebiet mit:

$$\alpha_1 r > 1,7 \quad \text{bezw.} \quad \frac{2r}{\Delta} > 1 .$$

Hier wird die Verlustwärme schon innerhalb des Kanals mehr und mehr in achsialer Richtung abgeleitet und damit steigt der Einfluss der Schichtdicke. Als Näherungsgesetz gilt hier (vergl. Fig. 8):

$$f(\alpha r) = \frac{1}{0,2 + \alpha r} \quad (54)$$

und daher:

$$\text{Mittl. } (\lambda_{mz})_1 \cong (p_{m0} - p_m) \frac{A^2}{2c\lambda} \left( 1 - \frac{1}{0,2 + a_1 r} \right) \quad (55)$$

$$\cong \frac{P_z}{2c\lambda} \frac{A}{r^2 \pi} \left( 1 - \frac{2}{0,2 + a_1 r} \right). \quad (56)$$

Die Abhängigkeit der Erwärmung von der Schichtstärke nähert sich also bei gleichbleibender Verlustziffer dem quadratischen Gesetz, das wir früher für quasihomogenes Material gefunden haben.

Die vorigen Untersuchungen lehren uns, dass sich über die Abhängigkeit der Erwärmung und Durchschlagsspannung von der Schichtstärke des Dielektrikums nichts aussagen lässt, solange nicht der ungefähre Durchmesser der kranken Stellen bekannt ist. Daher erscheint mir die Bestimmung dieser charakteristischen Größen für verschiedene Isoliermaterialien eine wichtige und lohnende Aufgabe der experimentellen Forschung. Es ist bedauerlich, dass das reiche Versuchsmaterial der

Wagnerschen Arbeit nur eine einzige Kurve aufweist, die hierzu herangezogen werden kann. Es ist dies Fig. 10, welche die Volt-Ampère-Charakteristik eines aus „Zellulose hergestellten“ Dielektrikums enthält. Diese Kurve konnte in der durch Fig. 10a skizzierten Anordnung bis zum Eintreten des labilen Wärmegleichgewichtes, das den Durchschlag einleitet, aufgenommen werden. Unmittelbar vor dem Durchschlag betragen die Verluste:

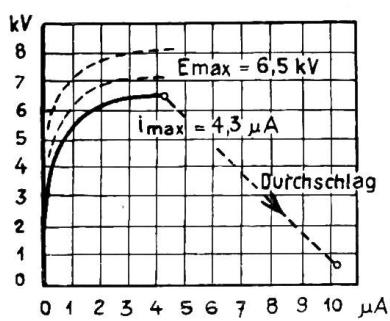


Fig. 10.

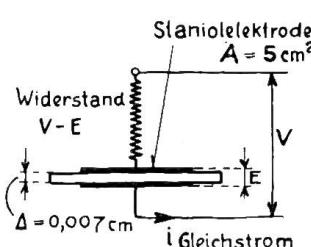


Fig. 10a.

$$6,5 \text{ kV} \times 4,3 \mu\text{A} = 0,028 \text{ Watt.}$$

Nun ist es zwar keineswegs sicher, dass diese Verluste allein oder hauptsächlich in dem einen kranken Kanal auftraten, dessen Durchschlag später beobachtet wurde; es können unter der  $5 \text{ cm}^2$  grossen Elektrodenfläche auch mehrere kranke Stellen vorhanden gewesen sein, deren Stabilitätsgrenze bei einer etwas höheren Spannung erreicht worden wäre (vergl. die strichlierten Kurven in Fig. 10). Wenn man indessen bedenkt, wie schnell der Strom gerade in der Nähe der kritischen Spannung anwächst, so darf man wohl annehmen, dass mindestens 50 % des gesamten beobachteten Stromes auf den *einen* Kanal entfielen. Mit Rücksicht darauf schätzen wir:

$$P_z = 0,014 \sim 0,028 \text{ Watt.}$$

Für die Wärmeleitfähigkeit des Dielektrikums können wir denselben Wert wie für Papier:

$$\lambda = 0,0013 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \text{°C}}.$$

annehmen. Bezuglich der kritischen Uebertemperatur Mittl. ( $\vartheta_{mz}$ ), oberhalb derer kein Wärmegleichgewicht mehr möglich ist, sind wir leider auf blosse Schätzung angewiesen. Je besser und trockener das Papier, desto grösser diese Temperaturdifferenz. Sie kann sich leicht zwischen  $30^\circ$  und  $50^\circ$ , vielleicht sogar innerhalb noch weiterer Grenzen bewegen. Da es jedoch hier nur auf die mutmassliche Größenordnung des Kanals ankommt, können wir auch diese Unsicherheit in Kauf nehmen, und die folgende Rechnung anstellen:

Angenommen, es sei:

$$\text{Mittl. } (\vartheta_{mz}) = 30 \sim 50^{\circ}\text{C}, \quad \lambda = 0,0013 \frac{\text{Watt}}{\text{cm }^{\circ}\text{C}}, \quad \frac{A}{2r} = 0,007 \text{ cm},$$

$$P_z = 0,014 \sim 0,028 \text{ Watt},$$

$$\frac{1 - f(a_1 r)}{(a_1 r)^2} = \frac{\text{Mittl. } (\vartheta_{mz}) \cdot \lambda \pi}{P_z}. \quad (48a)$$

So berechnet sich:

	1. für $P_z = 0,014$	2. für $P_z = 0,028$
$\frac{1 - f(a_1 r)}{(a_1 r)^2}$	0,061 $\sim$ 0,102	0,031 $\sim$ 0,051
$a r$ (Fig. 11)	3,4 $\sim$ 2,4	5,2 $\sim$ 3,8
$2r$ (für $c = 6$ )	0,0138 $\sim$ 0,0097	0,021 $\sim$ 0,0154

Zu diesem Ergebnis ist zu bemerken, dass ein Kanaldurchmesser von 0,1 bis 0,2 mm für ein Zelluloseprodukt zwar gross, aber doch nicht unwahrscheinlich ist. Untersucht man für diesen Durchmesser den Einfluss der Schichtdicke auf die Kanalerwärmung, so wird man sich zu erinnern haben, dass erst für  $\frac{A}{2r} \geq 30$  von einem allmählichen Verschwinden dieses Einflusses gesprochen werden konnte (Fig. 9). Diese Verhältnisse würden in unserem Falle Schichtstärken von  $3 \sim 6$  mm entsprechen. Derartige Wandstärken liegen aber bereits ausserhalb des Rahmens der Kanaltheorie, da bei ihnen die mittleren Verlustziffern elektrisch schwächer ( $p_{m0}$ ) und gesunder Stellen ( $p_m$ ) nicht mehr grosse Unterschiede aufweisen.

Fassen wir die Untersuchungen über den wechselnden Einfluss der Schichtdicke und die Ergebnisse des obigen Zahlenbeispieles zusammen, so können wir folgende Behauptung aufstellen:

Wie gross (bei gleichen spezifischen Verlusten) der Einfluss der Schichtdicke auf die Erwärmung und Durchschlagsspannung schlechter Stellen ist, hängt von der Struktur des Dielektrikums ab. Es gibt jedenfalls Materialien, wie Papier, für welche dieser Einfluss beträchtlich ist.

Andererseits ist es sehr wahrscheinlich, dass die mittlere Verlustziffer des Kanals, den man sich durch eine schlechte Stelle gelegt denken kann, mit wachsender Schichtdicke kleiner wird. Wenn die kranke Stelle eine geringere Dicke besitzt als die Plattenstärke, ist dies sogar wahrscheinlich. In solchen Fällen wird natürlich die Erwärmung mit steigender Materialdicke geringer, als dies bei konstanter Verlustziffer  $p_{m0}$  der Fall wäre. Diese Verminderung der Verluste kann

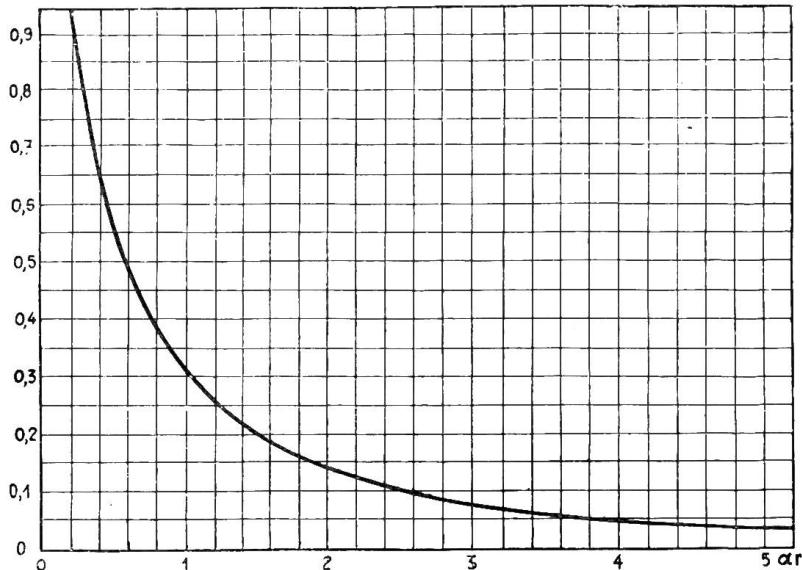


Fig. 11.

Die Funktion  $\frac{1 - f(ar)}{(ar)^2}$ .

möglicherweise so weit gehen, dass unabhängig von der Materialdicke die Gesamtverluste eines durch die schlechte Stelle gelegten Kanals ungefähr gleich bleiben, wenn das Material immer derselben Feldstärke ausgesetzt wird. Dann würde beispielsweise für  $a_1 r = 0,35$  bis  $1,7$  bei konstantem Kanaldurchmesser auch die Erwärmung gleich bleiben (Gl. 53) und daher der Durchschlag stets bei derselben Feldstärke auftreten. Es ist also Proportionalität zwischen Durchschlagsspannung und Schichtdicke auch nach einer konsequent durchgeführten Kanaltheorie nicht unmöglich. Indessen ist die Erklärung eines solchen Phänomens, wenn es wirklich vorhanden sein sollte, eine ganz andere als nach Wagners Theorie.

Wir haben bisher die zusätzliche Erwärmung des kranken Kanals nur durch den ersten Summanden Mittl.  $(\vartheta_m)_1$  der Gleichungen (47) und (48) ausgedrückt. Es muss noch gezeigt werden, dass die Berücksichtigung des zweiten Summanden Mittl.  $(\vartheta_m)_2$  an den gewonnenen Ergebnissen nichts wesentliches ändert, oder mit anderen Worten, dass der Einfluss der Elektroden auf die Kanalerwärmung unerheblich ist. Ich will dabei sogar einen besonders ungünstigen Fall annehmen, nämlich sehr dünne Stanniolektroden ( $\lambda' = 0,63$ ) von nur  $A' = 0,01$  cm Dicke und einer sehr kleinen Wärmeabgabekonstante  $\mu' = 0,001$ . Setzen wir dann für den Kanaldurchmesser die gefundenen Grenzwerte (0,1 bis 0,2 mm) ein, so wird:

$$\begin{aligned} a_2 r &= 0,002 \sim 0,004 \\ \frac{1 - f(a_2 r)}{(a_2 r)^2} &= 0,183 + \ln \sqrt{500} \sim 0,183 + \ln \sqrt{250} \\ &= 3,29 \sim 2,94 \end{aligned} \quad (49)$$

$$\text{und: Mittl. } (\vartheta_m)_2 = \frac{P_z}{\pi} \frac{1}{2 A' \lambda'} \frac{1 - f(a_2 r)}{(a_2 r)^2} = 1,2 \sim 2,1 \text{ }^{\circ}\text{C} . \quad (48a)$$

Die Elektroden sind also nach der Kanaltheorie nur insofern von Einfluss, als die Wärmeabgabekonstante  $\mu'$  auf die Temperatur des gesunden Isolermaterials einwirkt. Bei unendlich grossen Elektroden ist diese Temperatur ( $t_{m\infty}$ ) und die Elektrodentemperatur ( $\bar{t}_z$ ) durch Gleichung (33a) und (33b) gegeben. Bei endlichen Elektroden von der Fläche  $A$  ist zu berücksichtigen, dass eventuell auch die zusätzlichen Kanalverluste die Elektrodentemperatur erhöhen können. Diese Erhöhung:

$$\Delta \bar{t}_z = \frac{P_z}{2 A \mu'}$$

beträgt jedoch für unser Zahlenbeispiel ( $P_z = 0,028$ ,  $A = 5$ ,  $\mu' = 0,001$ ) nur  $2,8 \text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Nachdem nunmehr der mathematische Zusammenhang zwischen Verlustziffer, Kanalbreite, Plattenstärke und Erwärmung aufgedeckt ist, ist es ein Leichtes, die gefundenen Gesetze zur Berechnung der Durchschlagsspannung nutzbar zu machen. Wir müssen nur wissen, wie die Verluste mit der Temperatur und der Feldstärke  $F = \frac{E}{A}$  zusammenhängen.

Nehmen wir an, die Verluste seien mit der Feldstärke durch ein Exponentialgesetz verbunden:

$$p_{m0} = C_0 \left( \frac{E}{A} \right)^n, \quad p_m = C \left( \frac{E}{A} \right)^n, \quad p_{m0} - p_m = C_z \left( \frac{E}{A} \right)^n.$$

Ausserdem seien bei irgend einer Feldstärke  $F'$  die spezifischen Verluste  $p'_{m0} - p'_m$  als Funktion der Temperatur  $\vartheta$  bekannt (Fig. 12). Wollen wir dann den Punkt  $L$  aufsuchen, in dem das Wärmegleichgewicht labil wird, so müssen wir durch den Punkt  $A$  mit der Abszisse  $t_{m\infty}$  eine Gerade ziehen, welche die Verlustkurve in  $L$  berührt. Nach Gleichung (47a) gilt für den Neigungswinkel dieser Geraden:

$$\operatorname{tg} \tau' = \frac{p'_{m0} - p'_m}{\text{Mittl. } (\vartheta_{mz})} \cong \lambda \frac{a_1^2}{1 - f(a_1 r)} \left( \frac{F'}{F_{\max}} \right)^n.$$

Wir erhalten daher für die grösste zulässige Feldstärke  $F_{\max}$  und Prüfspannung  $E_{\max}$ :

$$F_{\max} = F' \left( \operatorname{ctg} \tau' \lambda \frac{a_1^2}{1 - f(a_1 r)} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (57)$$

$$E_{\max} = F' \lambda \left( \operatorname{ctg} \tau' \lambda \frac{a_1^2}{1 - f(a_1 r)} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (58)$$

Ein einheitliches, einfaches Gesetz für die Durchschlagsspannung  $E_{\max}$  als Funktion der Materialdicke  $\lambda$  lässt sich wegen der Veränderlichkeit der Funktion  $1 - f(a_1 r)$  nicht aufstellen. Eine grosse Zahl von Fällen deckt wahrscheinlich das Gebiet:

$$a_1 r = 0,35 \text{ bis } 1,7$$

und da hierfür Gleichung (58) eine besonders einfache Form annimmt, will ich die Formel für diesen Spezialfall noch mitteilen. Gemäss Gleichung (51) und (52) finden wir:

$$\left. \begin{aligned} E_{\max} &= F' \lambda^{\frac{n-1}{n}} \left( \operatorname{ctg} \tau' \lambda \frac{\sqrt{2c}}{0,31 r} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \text{konst. } \lambda^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Je grösser also der Koeffizient  $n$ , um so geringer ist die Abweichung der Kurve  $E_{\max} = f(\lambda)$  von dem Proportionalitätsgesetz  $E_{\max} = \text{konst. } \lambda$ , welches Wagner als allgemein gültiges Gesetz aufstellt. Für quasihomogenes Material erhielten wir seinerzeit das Gesetz:

$$E_{\max} = \text{konst. } \lambda^{\frac{n-2}{n}},$$

also bei gleichem Koeffizienten eine grössere Abweichung von der Proportionalität als nach der Kanaltheorie.

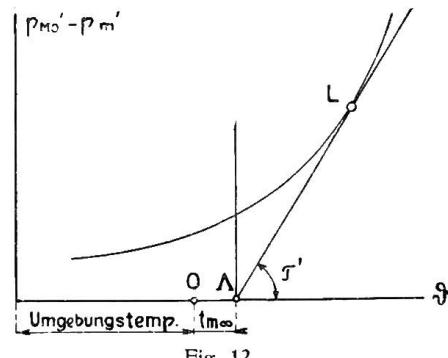


Fig. 12.  
Bestimmung der Durchschlagsspannung.