Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 14 (1923)

Heft: 2

Artikel: Ableitung und Wanderwellen

Autor: Breitfeld, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1060363

noch vor, dass man nur elementar oder rein handwerklich ausgebildete Leute für solche Stellen „theoretisch nachbilden" lassen will, was nie wirklich gelingen kann. Da wäre es doch richtiger, bei dem heutigen Ueberfluss an höher gebildeten Elektrikern, für derartige Stellen solche zu verwenden, auch wenn sie nicht unbedingt gerade in dem betreffenden Spezialgebiet bereits praktisch tätig waren. Es gibt auch unter den theoretisch gebildeten Elektrotechnikern solche, die „nicht unpraktisch" sind, ja viele, die Handarbeitspraxis durchmachten, vor allem aber: Die umfassendere technische oder wissenschaftliche Anschauung befähigt sie, selbst in einem bisher fremden Gebiete sich relativ rasch zurecht zu finden und den minder Gebildeten dann zu überholen. Bei den heutigen Verhältnissen dürfte man den Versuch, auch für solche Stellen höher Gebildete zu verwenden, öfter machen, vermutlich nur zum Vorteil der betreffenden Spezialgebiete.

Ableitung und Wanderwellen.

Von Prof. Dr. *C. Breitfeld,* Prag (Deutsche, Technische Hochschule).[1]

Der Autor entwickelt in diesem ersten Teile, anknüpfend an den durch K. W. Wagner gegebenen Gedankengang, die Theorie der Wanderwellen beim Einschalten einer Gleichstromleitung unter Berücksichtigung der Ableitung (durch unvollkommene Isolation bezw. Koronaerscheinungen).

L'auteur adoptant les idées de K. W. Wagner développe dans cette première partie la théorie des ondes perturbatrices produites au moment de la mise en circuit d'une ligne à courant continu en tenant compte de la dérivation dûe à l'isolement imparfait (effets corona).

Die Verfolgung der elektromagnetischen Ausgleichvorgänge auf langen Leitungen geschieht zumeist mit Vernachlässigung der sogenannten „Ableitung", d. h. der Leitfähigkeit des zwischen den Leitern liegenden Dielektrikums.

Dem Problem der Ausgleichvorgänge liegt bekanntlich die Frage nach dem Ladungsvorgang der offenen Gleichstromleitung zu Grunde. Es soll im folgenden diese Frage ohne jede Vernachlässigung beantwortet und dabei der Gedankengang des für das ganze Problem klassisch gewordenen Werkes „Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln" von K. W. Wagner beibehalten werden.

Der Strömungsvorgang auf einer Leitung wird durch die beiden folgenden Gleichungen dargestellt:

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = r\,i + L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{1}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g\,e + C\frac{\partial e}{\partial t} \tag{2}$$

wo e und i Spannung und Strom an einer beliebigen Stelle x der Leitung, und r, L, g und C die elektrischen Konstanten der Leitung pro Längeneinheit sind. D. h. $r =$ Widerstand, $L =$ Induktivität, $C =$ Kapazität und $g =$ Ableitung.

x ist die Entfernung von der Stromquelle, t die laufende Zeit.

Setzt man für die Spannung der Stromquelle einen Beharrungszustand voraus, so streben Spannung und Strom an jeder Stelle der Leitung Beharrungszuständen zu.

Spannung und Strom an beliebiger Stelle, zu beliebiger Zeit, lassen sich dann in der Form darstellen:

$$e = e_b + e_v \tag{3}$$

$$i = i_b + i_v \tag{4}$$

wo e_b und i_b die zu erreichenden Beharrungszustände, e_v und i_v veränderliche Zustände sind, die sich mit den Beharrungszuständen zu den fraglichen Werten von e und i ergänzen.

---

[1]) Eingegangen am 26. Juni 1922. Die Redaktion.

Ist W eine Funktion des Ortes und der Zeit, so können wir e und i durch partielle Ableitungen dieser Funktion darstellen, indem wir setzen:

$$i = -C\frac{\partial W}{\partial t} - g\,W \quad \text{und} \quad e = \frac{\partial W}{\partial x} \tag{5}$$

führt man diese Beziehungen in (1) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = r g\, W + (r C + g L)\frac{\partial W}{\partial t} + L C\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{6}$$

als die Grundgleichung, von der wir ausgehen wollen.

Eine einfache Ueberlegung sagt, dass auch W aus einem beharrenden und einem veränderlichen Teile besteht, somit durch die Gleichung

$$W = W_b + W_v \tag{7}$$

gegeben ist.

Wir betrachten nun den oben erwähnten einfachsten Fall, die *Ladung der offenen Gleichstromleitung.*

Wir legen im Momente $t = 0$ das eine Leitungsende ($x = 0$) an die dauernd konstant gehaltene Generator-Spannung E. Dann gilt für alle Zeiten, d. h. für $t \gtreqless t_0$:

$$\underset{x=0}{e} = E \qquad \underset{x=l}{i} = 0$$

wenn l die Leitungslänge bezeichnet.

Zur Berechnung des Beharrungszustandes setzen wir in (6) den beharrenden Teil W_b von W ein; welcher aber nur vom Orte und nicht von der Zeit abhängt. Gleichung (6) geht daher über in:

$$\frac{d^2 W_b}{d x^2} = r g\, W_b$$

woraus

$$W_b = k_1\, \varepsilon^{\lambda x} + k_2\, \varepsilon^{-\lambda x}$$

mit

$$\lambda = \sqrt{r g}$$

und k_1 und k_2 gleich Integrationskonstanten.

Mit Hilfe obiger Grenzbedingungen ergibt sich

$$k_1 = \frac{E}{\lambda\,(1 + \varepsilon^{2\lambda l})}; \qquad k_2 = -\frac{E}{\lambda\,(1 + \varepsilon^{2\lambda l})}\,\varepsilon^{2\lambda l}$$

und somit wegen:

$$e_b = \frac{d\,W_b}{d\,x}; \qquad i_b = -g\,W_b$$

wird:

$$\left.\begin{aligned} e_b &= \frac{E}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}}\left\{\varepsilon^{\lambda x} - \varepsilon^{\lambda(2l - x)}\right\} \\ i_b &= -\frac{g}{\lambda}\,\frac{E}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}}\left\{\varepsilon^{\lambda x} - \varepsilon^{(2l - x)}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Das sind die stationären Glieder von Spannung und Strom. Hätten wir die Ableitung $g = 0$ gesetzt, somit $\lambda = 0$ so erhielten wir

$$e_b = E; \quad i_b = 0 \quad \text{für alle Werte von } x.$$

Um den veränderlichen Zustand zu erfassen, haben wir in (6) für W den Wert W_v einzusetzen.

Setzen wir:

$$rg = a; \qquad rC + gL = b; \qquad LC = c \tag{I}$$

so geht (6) über in

$$\frac{\partial^2 W_v}{\partial x^2} = a W_v + b \frac{\partial W_v}{\partial t} + c \frac{\partial^2 W_v}{\partial t^2} \tag{9}$$

Setzt man zur Lösung dieser Gleichung:

$$W_v = X \cdot I \tag{9a}$$

wo X nur vom Orte, I nur von der Zeit abhängen sollen, dann wird:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{d x^2} - \frac{1}{I} \left\{ b \frac{dI}{dt} + c \frac{d^2 I}{dt^2} \right\} = a \tag{9b}$$

welche Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{d x^2} = - m^2; \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{I} \left\{ b \frac{dI}{dt} + c \frac{d^2 I}{dt^2} \right\} = - \beta^2 \tag{9c}$$

worin m^2 und β^2 Konstanten sind.

Somit:

$$X = K_1 \sin(m x) + K_2 \cos(m x) \tag{10}$$

$$I = K_3 \varepsilon^{\varrho_1 t} + K_4 \varepsilon^{\varrho_2 t} \tag{11}$$

mit:

$$\varrho_1 = - \frac{b}{2c} + \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{\beta^2}{c}}; \qquad \varrho_2 = - \frac{b}{2c} - \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{\beta^2}{c}}.$$

Nach (9b) und (9c) besteht die Beziehung:

$$- m^2 + \beta^2 = a \tag{12}$$

Wir setzen nun:

$$\frac{b}{2c} = \alpha; \qquad \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{\beta^2}{c}} = n' \tag{II}$$

n' kann hierbei — wie ersichtlich — reell oder imaginär sein.
So wird:

$$I = K_3 \varepsilon^{-\alpha t} \cdot \varepsilon^{n't} + K_4 \varepsilon^{-\alpha t} \cdot \varepsilon^{-n't}.$$

Nach (9a) ist somit:

$$W_v = \varepsilon^{-\alpha t} \{K_1 \sin(m x) - K_2 \cos(m x)\} \{K_3 \varepsilon^{n't} + K_4 \varepsilon^{-n't}\}. \tag{13}$$

und daher nach (5)

$$e_v = \frac{\partial W_v}{\partial x} = m \varepsilon^{-\alpha t} \{K_1 \cos(m x) + K_2 \sin(m x)\} \{K_3 \varepsilon^{n't} + K_4 \varepsilon^{-n't}\}$$

Da nach (4) $\qquad e = e_b + e_v$

und laut Annahme für $x = 0$ das e für alle Zeiten gleich E und nach Gleichung (8) für $x = 0$ auch e_b für alle Zeiten gleich E ist, so gilt für $x = 0$:

$$E = E + e_v \qquad \text{oder} \qquad e_v = 0.$$

Daraus folgt: $\qquad K_1 = 0.$

Setzen wir ferner: $\qquad K_2 K_3 = A; \quad K_2 K_4 = B$

so wird:

$$e_v = - m \varepsilon^{-\alpha t} \sin(m x) A \varepsilon^{n't} + B \varepsilon^{-n't} \tag{14a}$$

wo A und B Konstanten sind.

Weiter ergibt sich nach (5) und (13)

$$i_v = -C\frac{\partial W_v}{\partial t} - g\,W_v = a\,C\,\varepsilon^{-at}\{K_1 \sin(mx) + K_2 \cos(mx)\}\{K_3\,\varepsilon^{n't} + K_4\,\varepsilon^{-n't}\}$$

$$- n'C\,\varepsilon^{-at}\{K_1 \sin(mx) + K_2 \cos(mx)\}\{K_3\,\varepsilon^{n't} - K_4\,\varepsilon^{-n't}\}$$

$$- g\,\varepsilon^{-at}\{K_1 \sin(mx) + K_2 \cos(mx)\}\{K_3\,\varepsilon^{n't} + K_4\,\varepsilon^{-n't}\}\,.$$

Mit Rücksicht auf: $K_1 = 0;\quad K_2 K_3 = A;\quad K_2 K_4 = B$

wird: $$i_v = \varepsilon^{-at}\cos(mx)\{\varepsilon^{n't} A(aC - n'C - g) + \varepsilon^{-n't} B(aC + n'C - g)\} \tag{15a}$$

Nach (4) ist: $i = i_b + i_v$

Laut Annahme ist für $x = l$: $i = 0$ für alle Zeiten

nach (8) ist für $x = l$: $i_b = 0$ für alle Zeiten

somit: $0 = 0 + i_v$ und daher $i_v = 0$.

Daraus folgt: $\cos(ml) = 0$

und daher $ml = (2K + 1)\frac{\pi}{2}$; mit: $K = 0, 1, 2, 3 \ldots . \infty$

und $$m_k = (2K + 1)\frac{\pi}{2}\frac{1}{l} \tag{16}$$

Es ergibt sich also ml als Grösse, die unendlich viele Werte und zwar ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ annehmen kann. Nach (12) und (II) sind demnach auch die Grössen β und damit n' unendlich vieler Werte fähig.

Es gehen somit (14a) und (15a) über in:

$$e_v = -\sum_{k=0}^{k=\infty} m_k\,\varepsilon^{-at}\sin(m_k x)\{A_k\,\varepsilon^{n_k' t} + B_k\,\varepsilon^{-n_k' t}\} \tag{14b}$$

$$i_v = \sum_{k=0}^{k=\infty}\varepsilon^{-at}\cos(m_k x)\{\varepsilon^{n_k' t} A_k(aC - n_k' C - g) + \varepsilon^{-n_k' t} B_k(aC + n_k' C - g)\}. \tag{15b}$$

Wir finden in (14b) und (15b) Fouriersche Reihen mit ungeraden Vielfachen des Argumentes $\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}$.

Für die Zeit $t = 0$ ist auf der ganzen Leitung — ausgenommen $x = 0$ — die Spannung gleich Null, also:

$$0 = e_b + e_v; \qquad \text{oder} \qquad e_b = - e_v$$

Somit nach (8) und (14b)

$$\frac{E}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}}(\varepsilon^{\lambda x} + \varepsilon^{\lambda(2l - x)}) = \sum_0^\infty m_k \sin(m_k x)\{A_k + B_k\}$$

gesetzt $$A_k + B_k = F_k \tag{17a}$$

so wird: $$m_k F_k = \frac{1}{l}\frac{E}{1 + \varepsilon^{2\lambda l}}\int_0^{2l}(\varepsilon^{\lambda x} + \varepsilon^{\lambda(2l - x)})\sin\left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right\}dx$$

woraus: $$F_k = \frac{2E}{l}\frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \tag{17}$$

Ferner ist nach unserer Annahme, für $t = 0$, die Stromstärke auf der ganzen Leitung gleich Null; also

$$i = 0 = i_b + i_v; \quad \text{oder} \quad i_v' = - i_b$$

und somit nach (8) und (15b)

$$\frac{g}{\lambda}\frac{E}{1+\varepsilon^{2\lambda l}}\{\varepsilon^{\lambda x} - \varepsilon^{\lambda(2l-x)}\} = \sum_0^\infty cos(m_k x)\{A_k(aC - n_k'C - g) + B_k(aC + n_k'C - g)\}$$

Setzen wir: $aC - n_k'C - g = P_k; \quad aC + n_k'C - g = Q_k$

und
$$A_k P_k + B_k Q_k = H_k \tag{18a}$$

so ergibt sich:

$$H_k = \frac{g}{\lambda}\frac{E}{1+\varepsilon^{2\lambda l}} \cdot \frac{1}{l}\int_0^{2l}(\varepsilon^{\lambda x} - \varepsilon^{\lambda(2l-x)})\, cos\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right\} dx$$

woraus:
$$H_k = - g\, l \frac{8E}{1+\left(\lambda\dfrac{2l}{(2k+1)\pi}\right)^2}\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2} \tag{18}$$

Aus (17a) und (18a) ist:

$$A_k = \frac{F_k O_k - H_k}{Q_k - P_k}; \qquad B_k = \frac{H_k - F_k P_k}{Q_k - P_k}$$

und bei Einsatz der Werte:

$$A_k = \frac{E}{l}\frac{1}{n_k'}\frac{n_k' + a}{m_k^2 + \lambda^2}; \qquad B_k = \frac{E}{l}\frac{1}{n_k'}\frac{n_k' - a}{m_k^2 + \lambda^2} \tag{19}$$

Führen wir diese Ausdrücke in (14b) und (15b) ein, so wird:

$$e_v = - \sum_0^\infty \frac{1}{n_k'}\frac{2E}{l}\frac{m_k}{m_k^2 + \lambda^2} sin\,(m_k x)\,\varepsilon^{-at}\{n'_k cosh(n_k' t) + a\, sinh(n_k' t)\}\ ^{1)} \tag{14c}$$

$$i_v = \sum_0^\infty \frac{1}{n_k'}\frac{2E}{l}\frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} cos\,(m_k x)\,\varepsilon^{-at}\{[(a^2 - n_k'^2)C - a g]\, sinh(n_k' t) - n_k' g\, cosh(n_k' t)\} \tag{15c}$$

Dies sind die Ausdrücke für e_v und i_v unter der Voraussetzung, dass n'_k eine reelle Grösse ist.

Es war nun nach (II)

$$n_k' = \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{\beta^2}{c}}$$

wobei nach (12) $\beta_k^2 = a + m_k^2$

und daher
$$n_k' = \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c} - \frac{m_k^2}{c}}.$$

Diese Grösse ist reell wenn:

$$\frac{b^2}{4c^2} \gtreqless a + m^2_k$$

Oder nach (I) und (16) wenn:

$$(rC - gL)^2 \geqq 4LC\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{1}{l}\right\}^2. \tag{20}$$

---

1) Mit *sinh, cosh* etc. werden die hyperbolischen Funktionen bezeichnet.

Diese Bedingung zeigt deutlich, von welcher Bedeutung für die Wesenheit von n'_k die Grössen g (Ableitung) und l (Kabellänge) sind.

Wird nun:
$$(rC-gL)^2 < 4LC\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{1}{l}\right\}^2 \tag{20a}$$
so wird n'_k imaginär.

Mit $j=\sqrt{-1}$ wird:
$$n_k' = j\sqrt{\frac{m_k^2}{c}+\frac{a}{c}-\frac{b^2}{4c^2}} = j\sqrt{\frac{\beta_k^2}{c}-\frac{b^2}{4c^2}}$$
und setzen wir:
$$n_k = \sqrt{\frac{\beta_k^2}{c}-\frac{b^2}{4c^2}} \tag{III}$$
so wird
$$n_k' = j\,n_k\,.$$
Dies in (14c) und (15c) eingesetzt, ergibt:
$$e_v = -\sum_0^\infty \frac{1}{n_k}\frac{2E}{l}\frac{m_k}{m_k^2+\lambda^2}\sin(m_k x)\,\varepsilon^{-\alpha t}\{n_k\cos(n_k t)+\alpha\sin(n_k t)\} \tag{14d}$$
$$i_v = \sum_0^\infty \frac{1}{n_k}\frac{2E}{l}\frac{1}{m_k^2+\lambda^2}\cos(m_k x)\,\varepsilon^{-\alpha t}\{[(n_k^2+\alpha^2)C-\alpha g]\sin(n_k t)-n_k g\cos(n_k t)\} \tag{15d}$$

Die Gleichungen (14c), (15c), (14d) und (15d) zeigen, dass sich der veränderliche Zustand — die freie Schwingung — aus Summen aperiodischer (Hyperbelfunktionen) oder periodischer (Kreisfunktionen) Glieder zusammensetzt.

Aus (20a) folgt, dass die Vorgänge „periodisch" sind für:
$$m_k^2 > \frac{(rC-gL)^2}{4LC},$$
dass sie „aperiodisch" sind für:
$$m_k^2 \leqq \frac{(rC-gL)^2}{4LC}.$$
Da nun:
$$m_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{1}{l}$$
eine Grösse ist, die von der Kabellänge abhängt, so sehen wir, dass wir m_k durch Verlängerung der Leitung beliebig verkleinern können.

Andererseits können wir bei gegebener Länge l durch Vergrösserung von g stets die Relation herstellen:
$$m_k^2 < \frac{(rC-gL)^2}{4LC}.$$

Bei gegebener Kabellänge ist nun die Grösse m_k durch die Ordnungszahl k bestimmt; und zwar verhalten sich die Werte von m_k wie die ungeraden Zahlen,
$$m_0 : m_1 : m_2 : m_3 : \ldots . = 1 : 3 : 5 : 7 : \ldots .$$

Daraus geht hervor, dass auf demselben Kabel die Relation bestehen kann:
$$m_k^2 \gtreqless \frac{(rC-gL)^2}{4LC},$$
dass wir also neben periodischen auch aperiodische Vorgänge finden können.

Der Uebergang vom periodischen zum aperiodischen Vorgang für irgend ein Glied unserer Summe findet statt durch Verlängerung des Kabels oder durch Vergrösserung von g der Ableitung.

Jedenfalls wird

$$n_k = n_k' = 0; \quad \text{für:} \quad m_k^2 = \frac{(rC - gL)^2}{4LC}$$

Da nun:

$$\lim_{(n_k=0)} \frac{a \sin(n_k t)}{n_k} = a t$$

und

$$\lim_{(n_k=0)} \frac{\{(n_k^2 + a^2) C - a g\} \sin(n_k t)}{n_k} = (a^2 C - a g) t$$

so wird jenes Glied unserer Summe in (14) und (15), für welches n_k oder $n'_k = 0$ ist, die Form erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \underset{(n_k=0)}{\text{Spannungsglied}} &= -\frac{2E}{l} \frac{m_k}{m_k^2 + \lambda^2} \sin(m_k x)\, \varepsilon^{-at} (1 + at) \\ \underset{(n_k=0)}{\text{Stromglied}} &= \frac{2E}{l} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x)\, \varepsilon^{-at} \{(a^2 C - a g) t - g\} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Die Funktion: $\varepsilon^{-at}(1 + at)$ hat nun ihr einziges Maximum für $t = 0$ im Betrage 1.

Die Funktion: $\varepsilon^{-at}\{(a^2 C - a g) t - g\}$ hat ihr Maximum für:

$$t = \frac{C}{aC - g}$$

im Betrage von:

$$\varepsilon^{-\frac{aC}{aC-g}} \{aC - g\}$$

Die periodischen Spannungs- und Stromglieder aus (14d) und (15d) gehen also für $n_k = 0$ über in die aperiodischen nach (21).

Das heisst physikalisch: Die zeitliche Schwingung der räumlichen Sinusfunktion mit dem Argumente $(m_k x)$ im Spannungsgliede ist zum Stillstand gekommen und in eine dauernde Abnahme derselben übergegangen. Die zeitliche Schwingung der räumlichen Cosinusfunktion, mit dem Argumente $(m_k x)$, im Stromgliede ist zum Stillstand gekommen, erfährt von dem Momente t_0, wo dies geschieht, noch eine Vergrösserung bis zur Zeit $t - t_0 = \dfrac{C}{aC - g}$ auf den Betrag:

$$\frac{2E}{l} \frac{1}{m_k^2 + \lambda^2} \cos(m_k x)\, \varepsilon^{-\frac{aC}{aC-g}} \{aC - g\}$$

um von hier aus dauernd abzunehmen.

Die beiden Gleichungssysteme (14c), (15c) und (14d), (15d) zeigen für $n'_k = n_k = 0$ den Uebergang von der trigonometrischen zur hyperbolischen Funktion, vom periodischen zum aperiodischen Vorgang.

Setzen wir:

$$\gamma = \frac{rC - gL}{2\sqrt{LC}} \quad (22)$$

so lautet die Bedingung für das Eintreten des periodischen Vorganges oder für das Auftreten der zeitlichen Schwingung mit der Kreisfrequenz n_k:

$$m_k > \pm \gamma,$$

wobei das positive Zeichen für ein positives, das negative Zeichen für ein negatives γ gilt.

Mit Rücksicht auf den Wert von m_k Gleichung (16) ergibt sich hieraus die Länge, die die Leitung haben muss, damit die zeitliche Schwingung mit der Ordnungszahl k auftritt mit:

$$l < \frac{\pi}{2} \frac{1}{\pm \gamma} (2k+1) \tag{23}$$

[Aus (22) folgt, dass für:

$$g = r \frac{C}{L}$$

d. h. für $\gamma = 0$ auch im beliebig langen Kabel sämtliche Schwingungen auftreten.]

Verlängern wir jetzt das Kabel, oder vergrössern wir bei ungeänderter Kabellänge die Grösse γ durch g so erlischt mit

$$l = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\pm \gamma} (2k+1)$$

die Schwingung mit der Ordnungszahl k und geht nach früherem über in den aperiodischen Vorgang.

Wir können also aus:

$$k_x = \pm \gamma \frac{l}{\pi} - \frac{1}{2} \tag{24}$$

eine Zahl berechnen — sie wird im allgemeinen zwischen zwei ganzen Zahlen liegen — welche uns Aufschluss gibt über die Ordnungszahlen der vorhandenen „zeitlichen" Schwingungen und nur „gedämpften, räumlichen" Wellen.

Die der Zahl k_x nächstliegende „kleinere" ganze Zahl k_1 ist die höchste Ordnungszahl der nur räumlichen Wellen; die, der Zahl k_x nächstliegende „grössere" Zahl k_2 ist die niedrigste Ordnungszahl der zeitlichen Schwingungen. Hierbei ist Null als ganze Zahl mitzuzählen. Ist k_x selbst eine ganze Zahl, so ist $k_x = k_1$; wird k_x negativ, so ist Null die nächstliegende grössere Zahl, d. h. die Grundschwingung und mit ihr alle Obertöne sind vorhanden.

Wir erhalten demnach ganz allgemein für unseren veränderlichen Zustand die Gleichungen:

$$e_v = -\frac{2E}{l}\,\varepsilon^{-at} \sum_{0}^{k_1} \frac{1}{n_k'} \frac{m_k}{m_k^2+\lambda^2} \sin(m_k x)\left\{n_k' \cosh(n_k' t) + a \sinh(n_k' t)\right\} \tag{25}$$

$$-\frac{2E}{l}\,\varepsilon^{-at} \sum_{k_2=k_1+1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{m_k}{m_k^2+\lambda^2} \sin(m_k x)\left\{n_k \cos(n_k t) + a \sin(n_k t)\right\}$$

$$i_v = \frac{2E}{l}\,\varepsilon^{-at} \sum_{0}^{k_1} \frac{1}{n_k'} \frac{1}{m_k^2+\lambda^2} \cos(m_k x)\left|\left\{\left[(a^2-n_k'^2)\,C - a g\right] \sinh(n_k' t) - n_k' g \cosh(n_k' t)\right\}\right.$$

$$+\frac{2E}{l}\,\varepsilon^{-at} \sum_{k_2=k_1+1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \frac{1}{m_k^2+\lambda^2} \cos(m_k x)\left\{\left[(n_k^2+a^2)\,C - a g\right] \sin(n_k t) - n_k g \cos(n_k t)\right\}.$$

Wir sehen also den veränderlichen Zustand dargestellt durch die Summe einer endlichen Anzahl aperiodischer Glieder, vermehrt um die Summe einer unendlichen Anzahl periodischer Glieder.

Die Wellenlängen der vorkommenden Wellen sind gegeben aus:

$$\lambda_k = \frac{2\pi}{m_k} = \frac{2\pi}{(2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{1}{l}} = \frac{4l}{2k+1}. \tag{27}$$

Woraus: $$\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 : \ldots\ldots = 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \ldots\ldots$$

Die Wellenlänge der Grundschwingung ($k = 0$) ist demnach

$$\lambda_0 = 4l.$$

Die Kreisfrequenzen n_k der zeitlichen Schwingungen sind gegeben aus (III) und (12) mit

$$n_k = \sqrt{\frac{m_k^2}{LC} - \frac{\gamma^2}{LC}} = \frac{m_k}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{m_k^2}}. \tag{28}$$

Also nur wenn γ^2 gegenüber $m^2{}_k$ zu vernachlässigen ist, stehen, mit Rücksicht auf den Wert von m_k (laut 16), die Frequenzen im Verhältnis der ungeraden Zahlen und es gilt:

$$n_k = \frac{m_k}{\sqrt{LC}}.$$

Zum Gebrauch der Gleichungen (25) und (26) übergehend haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

(I) k_x ist negativ; d. h. die Grundschwingung und sämtliche Oberschwingungen treten auf.

(II) k_x ist positiv oder Null; d. h. zu den periodischen Vorgängen sind aperiodische hinzugetreten.

Fall (I). $k_x =$ negativ,

oder aus (24) $$l < \frac{\pi}{2}\frac{1}{\pm\gamma}.$$

Wir wollen gleich bemerken, dass dies der Normalfall für die in Betracht kommenden Starkstrom*kabel* ist, der, wenn auch nur angenähert, durch die bekannten, rechteckigen Wanderwellen dargestellt wird (siehe K. W. Wagner, Ausgleichsvorgänge).

Die Untersuchung dieses Falles hat zur theoretischen Erkenntnis der Gefahr der Wanderwellen und der damit verbundenen Ueberspannungen geführt.

Fall (II). $k_x =$ positiv,

oder: $$l > \frac{\pi}{2}\frac{1}{\pm\gamma}$$

Wir wollen hier den konkreten Fall betrachten

$$1 > k_x > 0$$

d. h. die zeitliche Grundschwingung ist erloschen.

Es gelten demnach für die Leitung die Gleichungen (25) und (26) in der Form:

$$e_v = -\frac{2E}{l}\varepsilon^{-at}\frac{1}{n_1'}\frac{m_1}{m_1^2+\lambda^2}\sin(m_1 x)\{n_1'\cosh(n_1' t) + a\sinh(n_1' t)\} \tag{29}$$

$$-\frac{2E}{l}\varepsilon^{-at}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}\frac{m_k}{m_k^2+\lambda^2}\sin(m_k x)\{n_k\cos(n_k t) + a\sin(n_k t)\}$$

$$i_v = \frac{2E}{l}\,\varepsilon^{-at}\,\frac{1}{n_1'}\,\frac{1}{m_1^2+\lambda^2}\cos(m_1 x)\,\{[(a^2-n_1'^2)\,C-a\,g]\sinh(n_1' t)-n_1' g\cosh(n_1' t)\} \quad (30)$$

$$+\frac{2E}{l}\,\varepsilon^{-at}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}\,\frac{1}{m_k^2+\lambda^2}\cos(m_k x)\,\{[(n_k^2+a^2)\,C-a\,g]\sin(n_k t)-n_k g\cos(n_k t)\}$$

Setzen wir:

$$\delta_k = arc\,tg\,\frac{a}{n_k} \quad (31)$$

$$\left.\begin{aligned}(a^2-n_1'^2)\,C-a\,g &= A_1' \;;\quad n_1' g = B_1' \\ (n_k^2+a^2)\,C-a\,g &= A_k \;;\quad n_k g = B_k\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

$$\varrho_k = arc\,tg\,\frac{B_k}{A_k} \quad (32a)$$

und:

$$n_k = m_k v_k \quad (IV)$$

so gehen (29) und (30) über in:

$$e_v = -\frac{2E}{l}\,\varepsilon^{-at}\,\frac{1}{n_1'}\,\frac{m_1}{m_1^2+\lambda^2}\sin(m_1 x)\{n_1'\cosh(n_1' t)+a\sinh n_1' t)\} \quad (33)$$

$$-\frac{E}{l}\,\varepsilon^{-at}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m_k}{n_k}\,\frac{\sqrt{n_k^2+a^2}}{m_k^2+\lambda^2}\sin\{m_k(x+v_k t)-\delta_k\}$$

$$-\frac{E}{l}\,\varepsilon^{-at}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m_k}{n_k}\,\frac{\sqrt{n_k^2+a^2}}{m_k^2+\lambda^2}\sin\{m_k(x-v_k t)+\delta_k\}$$

$$i_v = \frac{2E}{l}\,\varepsilon^{-at}\,\frac{1}{n_1'}\,\frac{1}{m_1^2+\lambda^2}\cos(m_1 x)\,\{A_1'\sinh(n_1' t)-B_1'\cosh(n_1' t)\} \quad (34)$$

$$+\frac{E}{l}\,\varepsilon^{-at}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n_k}\,\frac{\sqrt{A_k^2+B_k^2}}{m_k^2+\lambda^2}\sin\{m_k(x+v_k t)-\varrho_k\}$$

$$-\frac{E}{l}\,\varepsilon^{-at}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}\,\frac{\sqrt{A_k^2+B_k^2}}{m_k^2+\lambda^2}\sin\{m_k(x-v_k t)+\varrho_k\}$$

Wir sehen also die freien Schwingungen von Spannung und Strom dargestellt durch eine gedämpfte, feststehende, räumliche Sinusfunktion bezw. Cosinusfunktion der Länge (Argument $m_1 x$) und durch je zwei unendliche Reihen gedämpfter, räumlicher Sinusfunktionen der Länge, von denen die Glieder der einen $(-v_k)$ mit der Geschwindigkeit v_k nach dem Leitungsende, die Glieder der andern $(+v_k)$ mit der Geschwindigkeit v_k nach dem Leitungsanfang wandern.

Die Geschwindigkeit v_k der einzelnen Glieder unserer Reihen folgt aus (IV) mit:

$$v_k = \frac{n_k}{m_k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{m_k^2}} \quad (35)$$

sie ist also für die einzelnen Harmonischen verschieden.

Jedenfalls wird sie mit dem Wachsen der Grösse $\frac{\gamma^2}{m_k^2}$ kleiner und wird für $\gamma^2 = m_k^2$ zu Null, d. h. unter dieser Bedingung ist die Welle mit der Ordnungszahl k zum Stillstand gekommen.

Da nun nach (IV) auch

$$n_k = 0$$

so heisst dies, dass die zeitliche Schwingung der $k$ten Harmonischen erloschen ist. Es ist nach (29) und (30) eine gedämpfte, räumliche Sinus- bezw. Cosinuswelle daraus geworden von der Form (21).

Da auch hier die Gleichungen (3) und (4) gelten, also:

$$e = e_b + e_v\,; \qquad i = i_b + i_v$$

so folgt für $t = 0$

$$0 = e_b - \frac{2E}{l}\frac{m_1}{m_1^2 + \lambda^2} sin\,(m_1 x) - \frac{E}{l}\sum_1^\infty \frac{m_k}{n_k}\frac{\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{m_k^2 + \lambda^2} sin\,(m_k x - \delta_k)$$

$$- \frac{E}{l}\sum_1^\infty \frac{m_k}{n_k}\frac{\sqrt{n_k^2 + \alpha^2}}{m_k^2 + \lambda^2} sin\,(m_k x + \delta_k) \qquad (36)$$

$$0 = i_b - \frac{2E}{l}\frac{1}{n_1'}\frac{B_1'}{m_1^2 + \lambda^2} cos\,(m_1 x) + \frac{E}{l}\sum_1^\infty \frac{1}{n_k}\frac{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}{m_k^2 + \lambda^2} sin\,(m_k x - \varrho_k)$$

$$- \frac{E}{l}\sum_1^\infty \frac{1}{n_k}\frac{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}{m_k^2 + \lambda^2} sin\,(m_k x + \varrho_k) \qquad (37)$$

d. h.: Im Momente $t = 0$ ist die Summe der beiden unendlichen Reihen der Wanderwellen gegeben durch die Differenz des Beharrungszustandes und der stillstehenden ungedämpften Grundwelle. (Fortsetzung folgt.)

Berechnung einfacher Abspannmaste und Eckmaste aus Holz.

Von Prof. Ing. *Robert Edler,* Wien.

(Fortsetzung und Schluss)

Der Verfasser untersucht in diesem Schlussteile seiner Arbeit[1]) die Spannungsverteilung im Erdreich, verursacht durch einen auf Biegung beanspruchten Mast, sowie den Einfluss der Mastdurchbiegung auf den Durchhang der Leitungen. Im Anschluss an die theoretischen Abhandlungen wird anhand eines praktischen Beispiels die Anwendung der Formeln und Tabellen erläutert. Als Anhang zum Aufsatz erscheint ein Literatur- und Fabriksnachweis.

1) Siehe Bulletin 1923, No. 1, Seite 11 u. ff.

Dans cette partie finale[1]) l'auteur étudie la répartition des pressions dans le sol sous l'influence du pylône flechissant aussi que l'influence de la flexion du pylône sur les flêches des conducteurs. Les formules et tableaux sont ensuite appliquées à un exemple de la pratique. A la fin se trouve une liste des publications se rapportant au même sujet.

1) Voir bulletin 1923, No. 1, page 11 et ensuite.

4. Einbautiefe des Mastes. – Sicherheit gegen Umwerfen.

Die einfache, aber häufig vorkommende Annahme der *Spannungsverteilung* im Erdboden *nach dem Gesetze der geraden Linie* (Fig. 14), welche bei gleichmässig widerstandsfähigem Material zutrifft, ist hier *unzulässig,* weil das Erdreich an der Oberfläche bei A eine nur sehr geringe Widerstandsfähigkeit besitzt und nur am unteren Mastende bei C mit dem Höchstwerte p_e kg/cm² beansprucht werden darf. Verstärkungen nach Art der Fig. 15 sind nicht allgemein anwendbar, da sie sehr breite Löcher erfordern.