Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer

Elektrizitätswerke

Band: 8 (1917)

Heft: 12

Artikel: Induktion und Kapazität von Leitungen

Autor: Fischer-Hinnen, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1059595

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich mit den Jahres-Beilagen "Statistik der Starkstromanlagen der Schweiz" sowie "Jahresheft" und wird unter Mitwirkung einer vom Vorstand des S. E. V. ernannten Redaktionskommission herausgegeben.

Alle den Inhalt des "Bulletin" betreffenden Zuschriften sind zu richten an das

Generalsekretariat

des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins, Neumühlequai 12, Zürich 1 - Telephon: Hottingen 37.08

Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition und Inserate sind zu richten an den Verlag:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei A.-G., Hirschengraben 80/82 Zürich 1 Telephon Hottingen 36.40

Abonnementspreis
für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft und Statistik:
Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 25.—.
Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 1.50 plus Porto.

Publié sous la direction d'une Commission de Rédaction nommée par le Comité de l'A.S.E.

Ce bulletin paraît mensuellement et comporte comme annexes annuelles la "Statistique des installations électriques à fort courant de la Suisse", ainsi que l'"Annualre".

Prière d'adresser toutes les communications concernant la matière du "Bulletin" au

Secrétariat général

de l'Association Suisse des Electriciens Neumühlequai 12, Zurich 1 - Telephon: Hottingen 37.08

Toutes les correspondances concernant les abonnements, l'expédition et les annonces, doivent être adressées à l'éditeur :

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A. Hirschengraben 80/82 Zurich 1 Téléphone Hottingen 36.40

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de l'A. S. E.), y compris l'Annuaire et la Statistique, Fr. 15.—
pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger.
L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 1.50, port en plus.

VIII. Jahrgang VIII^e Année

Bulletin No. 12

Dezember Décembre

Induktion und Kapazität von Leitungen.

Von J. Fischer-Hinnen, Oerlikon.

Ueber diesen Gegenstand finden sich in der Literatur so zahlreiche, allerdings sehr verstreute Angaben, dass eine weitere Abhandlung darüber überflüssig erscheinen könnte. Geht man jedoch der Sache näher auf den Grund, so zeigt es sich bald, dass die Mehrzahl dieser, gewöhnlich für einen beschränkten Leserkreis bestimmten Arbeiten im allgemeinen über theoretische Erörterungen und eine Besprechung der einfachsten Fälle nicht hinaus kommen und es dem Leser überlassen, wie er sich in den verwickelteren Fällen zurechtfindet.

In nachstehendem soll nun das Problem mehr von der praktischen Seite behandelt und gezeigt werden, wie man auf elementarem Wege zu allgemein gültigen Formeln gelangt, die sich unmittelbar auf praktische Fälle übertragen lassen.

I. Induktion.

Liegt die Aufgabe vor, den induktiven Spannungsabfall einer aus Hin- und Rückleitung gebildeten Schleife zu berechnen, so sind bekanntlich zwei Wege gangbar. Der erste besteht darin, dass man zunächst von dem hypothetischen Falle einer einzelnen Strom durchflossenen Leitung ohne Rückleitung ausgeht und ihre Selbstinduktion mit der von einer zweiten Leitung ausgeübten gegenseitigen Induktion kombiniert. Die Lösung dieser Aufgabe, mit der sich unter andern Neumann, Blondel und Sumec (E. T. Z. 1906) befassten, ist ziemlich umständlich.

Eine zweite Methode, der wir uns hier anvertrauen werden, besteht darin, dass man gleich mit dem resultierenden Felde beider Leitungen rechnet. Setzt man den induktiven Spannungsabfall der ganzen Schleife

 $e_s = 2 \pi f \Phi_r 10^{-8} = \omega L J$, f = Periodenzahl

so stellt in diesem Falle L den "wirklichen Selbstinduktionskoeffizienten" der ganzen Schleife dar, dagegen ist nicht ohne weiteres ersichtlich, was man jetzt unter $\frac{L}{2}$ zu verstehen habe, weil diese Grösse je nach der Länge der Leitung nur etwa $^{1}/_{1000}$ bis $^{1}/_{100000}$ des nach der ersten Methode berechneten "wirklichen" Wertes der Selbstinduktionskoeffizienten beträgt. Es könnte daher leicht zu Missverständnissen führen, wenn man $\frac{L}{2}$ einfach als Selbstinduktionskoeffizienten einer einzelnen Hin- oder Rückleitung anspricht. Nun interessiert uns im Grunde genommen diese Grösse nur insofern, als wir sie für die Berechnung unsymmetrischer Mehrfachleitungen benötigen. Wir werden sie deshalb, um Missverständnissen vorzubeugen, kurzweg als Induktionskoeffizient einer einfachen Leitung bezeichnen.*)

1. Induktion einer Einphasenleitung.

Betrachten wir eine aus Hin- und Rückleitung gebildete Drahtschleife AB, in welcher ein Wechselstrom J (effektiv) fliesst, so kann man sich den von dem Leiter A erzeugten magnetischen Flux aus drei Komponenten zusammengesetzt denken, nämlich

- 1. dem Fluxe Φ' , der ausschliesslich im Innern des Drahtes verläuft,
- 2. dem Fluxe Φ'' , welcher seinen Weg durch die Schleife hindurch nimmt, und
- 3. dem Fluxe Φ''' , welcher beide Leiter umschlingt und bis ins Unendliche reicht. Ebenso werden aber auch von dem Leiter B_1 drei gleich starke Felder ihren Ausgang nehmen, von denen jedoch nur Flux Φ''' um den Leiter A_1 herum verläuft. Da der letztere entgegengesetzte Richtung wie der von A_1 erzeugte Flux Φ''' hat, so heben sich die beiden gegenseitig auf und kommen für die induktive Wirkung des Leiters A_1 nur die Kraftlinienmengen Φ' und Φ'' in Betracht. Ihre Grösse ergibt sich aus

mengen Φ' und Φ'' in Betracht. Ihre Grösse ergibt sich aus folgender Ueberlegung. Bekanntlich ist die von dem Strome J im Abstande x erzeugte Liniendichte

$$B_x = \frac{2\,\mathrm{J}}{10\;r^2}x \quad \text{für } x < r \text{ und}$$

(2)
$$B_x = \frac{2 J}{10 x}$$
 für $x = > r$

Daraus folgt

$$\Phi' = \int_{0}^{r} B_x l dx = \int_{0}^{r} \frac{2^r J l x}{10 r^2} dx = \frac{J l}{10} \quad (l = einfache Länge in cm.)$$

In Wirklichkeit kommt dieses Feld aber nur für die innersten Stromfäden voll zur Geltung, während es für die an der Peripherie des Drahtes liegenden Stromfäden gleich Null ist.

$$L = \frac{2 \, l_k}{10^4} \left(\ln \cdot \frac{2 \, l_k \cdot 10^5}{r} - 0.75 \right) \text{ beziehungsweise}$$

$$M = \frac{2 \, l_k}{10^4} \left(\ln \cdot \frac{2 \, l_k \cdot 10^5}{r} - 1 \right)$$

ausgehend auf 1 km bezogen

$$L_1 = \frac{2}{10^4} \left(\ln \frac{2 \cdot 10^5}{r} - 0.75 \right) \text{ bezw. } M_1 = \frac{2}{10^4} \left(\ln \cdot \frac{2 \cdot 10^5}{r} - 1 \right)$$

setzt. Dass das Endresultat trotzdem richtig ist, hängt mit einem Umstande zusammen, auf den wir weiter unten zurückkommen werden.

^{*)} Wie wenig es übrigens bei derartigen Rechnungen auf die "wirkliche" Selbstinduktion ankommt, beweist der Umstand, dass man dieselbe ebensogut unendlich gross annehmen kann, indem man, was natürlich ganz unzulässig ist, den Gültigkeitsbereich der unten stehenden Formel (2) auf beliebige Abstände ausdehnt, ohne dass an dem Endresultat etwas geändert wird. Ebenso ist z. B. in dem vorzüglichen Werke von Kyser (Elektr. Kraftübertragung II) der Koeffizient der Selbstinduktion und gegenseitigen Induktion pro km unrichtig angegeben, indem er von der richtigen Formel

Anderseits ist wegen (2)

Es genügt daher vollkommen mit einem mittleren Werte $\Phi' = \frac{J1}{10} \cdot 0,5$ zu rechnen.

$$\Phi'' = \int_{a}^{b} B_x 1 dx = \int_{a}^{b} \frac{2J1}{10x} dx = \frac{J1}{10} \cdot 4,6 \log \frac{b}{r}$$

Der resultierende Flux ist daher

$$\Phi_{\rm r} = \Phi' + \Phi'' = \frac{\text{Jl}}{10} \left(0.5 + 4.6 \log \frac{\rm b}{\rm r} \right);$$

folglich der induktive Spannungsabfall in einer Hin- oder Rückleitung

$$E_{s} = \frac{\omega \Phi}{10^{8}} = \frac{2 \pi f}{10^{8}} \frac{J l}{10} \left(0.5 + 4.6 \log \frac{b}{r} \right)$$

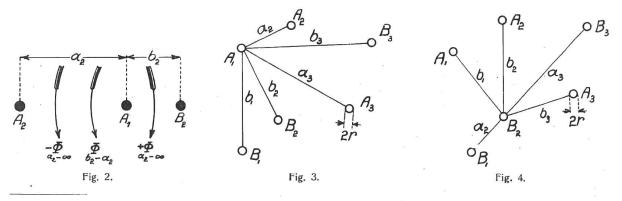
oder (3)
$$E_s = 2 \pi f \left[\frac{l_k}{10^4} \left(0.5 + 4.6 \log \frac{b}{r} \right) \right] \cdot J$$

wenn l_k die einfach gemessene Länge der Leitung in km bedeutet. Um den Spannungsabfall in der ganzen Schleife zu erhalten, muss die rechte Seite noch mit 2 multipliziert werden. In dieser Gleichung bedeutet der Ausdruck in der viereckigen Klammer den weiter oben definierten Induktionskoeffizienten. Fügt man zu den bestehenden Leitungen A_1B_1 noch zwei weitere A_2B_2 hinzu, welche gegenüber A_1 die Abstände a_2 bezw. b_2 haben (Fig. 2), so wirken auf den Leiter A_1 zwei neue Felder ein, nämlich das von A_2 herrührende Feld, mit dem Flux + Φ und das von B_2 erzeugte entgegengesetzt gerichtete Feld, mit dem

Flux — Φ . Ist $a_2 > b_2$ so kann man den letzteren wiederum in zwei Komponenten — Φ und — Φ zerlegen. Dann heben sich die Felder — Φ gegenseitig auf und es bleibt $a_2 - \infty$ als resultierender Flux nur noch Φ , wofür man $b_2 - a_2$

$$\Phi = -\int_{b_2-a_2}^{a_2} B_x \, dx = -\frac{Jl}{10} \, 4,6 \log \frac{a_2}{b_2} = +\frac{Jl}{10} \, 4,6 \log \frac{b_2}{a_2}$$

erhält.*) Zu genau demselben Resultat führt aber auch die Bedingung $b_2 > a_2$. In ähnlicher Weise verfährt man, wenn mehr als vier Drähte oder allgemein 2n Drähte vorhan-



^{*)} Damit erklärt sich nachträglich, warum sozusagen jede Formel brauchbare Resultate liefert, sofern sie die Kraftliniendichte wenigstens im Bereiche der entferntesten Drähte richtig angibt. Da sich nämlich die um Hin- und Rückleitung verlaufenden Feldkomponenten gegenseitig aufheben, so bleibt es sich eben gleich, durch was für eine Formel wir sie darstellen.

den sind, d. h. es werden je zwei Drähte verschiedener Stromrichtung zusammengenommen und ihre Wirkung auf den betrachteten Leiter untersucht. Durch Addition erhält man schliesslich den gesamten resultierenden Flux

$$\begin{split} \varPhi_{r} &= \frac{J \, l}{10} \left(0.5 + 4.6 \log \frac{b_{1}}{r} + 4.6 \log \frac{b_{2}}{a_{2}} + 4.6 \log \frac{b_{3}}{a_{3}} + \dots 4.6 \log \frac{b_{n}}{a_{n}} \right) \\ &= \frac{J \, l}{10} \left(0.5 + 4.6 \log \frac{b_{1} \cdot b_{2} \cdot b_{3} \dots b_{n}}{r \cdot a_{2} \cdot a_{3} \dots a_{n}} \right) \end{split}$$

und daraus den Induktionskoeffizienten der betrachteten Leitung A1

(4)
$$L_{A_1} = \frac{l_k}{10^4} \left(0.5 + 4.6 \log \frac{b_1 b_2 \cdot b_3 \cdot \dots b_n}{r \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots a_n} \right) \text{Henry}$$

Die Handhabung dieser Formel lässt sich am besten an den Fig. 3 und 4 erklären. In diesen Figuren bedeuten A_1 , A_2 , A_3 die Drähte der einen, B_1 , B_2 , B_3 diejenigen der andern Stromrichtung, und zwar ist diese Bezeichnung unveränderlich. Soll nun beispielsweise für A_1 der Induktionskoeffizient bestimmt werden, so denkt man sich von A_1 Strahlen nach allen übrigen Leitern gezogen (Fig. 3) und die Abstände nach Leitern gleicher Stromrichtung mit a_2 , a_3, diejenigen nach Leitern entgegengesetzter Stromrichtung mit b_1 , b_2 , b_3 numeriert und die betreffenden Werte in die Gleichung (4) eingesetzt. Die Reihenfolge bleibt sich dabei gleich. Handelt es sich um den Leiter B_2 , so sind die Strahlen von B_2 auszuziehen (Fig. 4), wobei wiederum die Abstände nach Leitern derselben Stromrichtung mit a_2 , a_3, diejenigen nach Leiter umgekehrter Stromrichtung mit b_1 , b_2 ... bezeichnet werden. Es ändert sich also nur die Bezeichnung der Abstände.

Beispiel. Man berechne den Induktionskoeffizient für die in Fig. 5 dargestellte Anordnung. Für den Leiter A_1 ist

$$a_2 = 2a$$
; $b_1 = a$; $b_2 = 3a$

somit

$$LA_{1} = \frac{1k}{10^{4}} \left(0.5 + 4.6 \log \cdot \frac{a \cdot 3a}{r \cdot 2a} \right) = \frac{1k}{10^{4}} \left(1.3 + 4.6 \log \frac{a}{r} \right) \text{ Henry.}$$

Für den Leiter B1 wird

$$a_2 = Distanz \ B_1 \ B_2 = 2 \ a \ ; \qquad b_1 = Distanz \ B_1 \ A_1 = a \ ; \qquad b_2 = Distanz \ B_1 \ A_2 = a$$

also

$$LB_1 = \frac{1k}{10^4} \left(0.5 + 4.6 \log \cdot \frac{a \cdot a}{r \cdot 2 a} \right) = \frac{1k}{10^4} \left(-0.88 + 4.6 \log \frac{a}{r} \right) \text{ Henry.}$$

Für den Leiter A2 erhält man

$$a_2 = Dist. A_2 A_1 = 2 a$$
; $b_1 = Dist. A_2 B_1 = a$; $b_2 = Dist. A_2 B_2 = a$.

Der letztere verhält sich demnach gleich wie B_1 und ebenso B_2 wie A_1 .

Wie man sieht entstehen bei dieser Anordnung verhältnismässig grosse Differenzen. Inwieweit dieselben den Parallelbetrieb beeinflussen, lässt sich nur von Fall zu Fall entscheiden. Angenommen der Drahtdurchmesser sei $8\,$ mm und der Abstand $a=800\,$ mm, so wird

$$LA_1 = \frac{1}{10^4} \left(1,3 + 4,6 \log \frac{80}{0,4} \right) = 0,001 \, 108 \, \text{Henry/km.}$$

$$LA_2 = \frac{1}{10^4} \left(-0,88 + 4,6 \log \frac{80}{0,4} \right) = 0,000 \, 970 \, \text{Henry/km.}$$

was bei 50 Perioden einen induktiven Widerstand

$$r_{A1} = 2 \pi 50 \cdot 0,001 \, 108 = 0,348 \, \text{Ohm/km}$$

bezw.

$$r_{A2} = 2 \pi 50 \cdot 0,000970 = 0,305$$
 , , ergibt.

Ferner ist der ohmsche Widerstand

$$r = 0.35$$
 Ohm/km,

somit der scheinbare Widerstand

der Leitung
$$A_1 = \sqrt{0,35^2 + 0,348^2} = 0,494$$
 Ohm/km, der Leitung $A_2 = \sqrt{0,35^2 + 0,305^2} = 0,465$ Ohm/km,

Der Unterschied beträgt also rund $6\,^{\circ}/_{\circ}$, was zur Folge hat, dass der Leiter A_2 einen $6\,^{\circ}/_{\circ}$ grösseren Strom als A_1 aufnimmt. Arbeiten die Leitungen auf getrennte Stromkreise, so können

die dadurch entstehenden Spannungsdifferenzen dadurch ausgeglichen werden, dass man A_1 und B_1 und ebenso A_2 und B_2 zu einer Schleife vereinigt. Es ist dann für die ganze Schleife

$$L = LA_1 + LB_1 = LA_1 + LA_2$$
.

Weitere Beispiele dieser Art finden sich in der Tabelle I am Schluss des Aufsatzes.

2. Induktion einer Einphasenbahn.

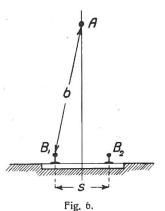
Es soll der Spannungsabfall einer Einphasenbahn bestimmt werden. Derselbe setzt sich aus zwei Teilen zusammen, nämlich dem Spannungsabfall der Fahrleitung und demjenigen der Schienen, welche als Rückleitung dienen. Der erstere ist leicht an Hand der Formel (3) zu berechnen, wenn man für b den Abstand des Fahrdrahtes von den Schienen einsetzt.

Etwas unsicherer ist die Bestimmung des induktiven Widerstandes der Schienen. Um Anhaltepunkte darüber zu gewinnen, werden wir die sehr ausführlichen Versuche von *Lichtenstein* (E.T. Z. 1907) an der Versuchsstrecke *Marienfeld-Zossen* zu Rate ziehen. Dieselben sind, soweit sie für uns in Betracht kommen, in der nachstehenden Tabelle übersichtlich zusammengestellt. Die Versuche No. 1-18 wurden in der Weise ausgeführt, dass man einen der drei Fahrdrähte mit einer Schiene in Serie schaltete und Spannung, Strom und Wattaufnahme an der so gebildeten, kurz geschlossenen Schleife ablas. Der induktive Widerstand der Schiene wird somit erhalten, indem man die wattlose Komponente $E\sin\varphi$ durch den Strom dividiert und hievon den mit Hülfe von Gleichung (3) berechneten induktiven Widerstand der Fahrleitung in Abzug bringt.

Bei den Versuchen No. 19—21 diente der Fahrdraht als Hinleitung, die beiden parallel geschalteten Schienen als Rückleitung.

Kurzschlussversuch auf der Strecke Marienfel	er	auf	der	Strecke	Marienfeld-	Zossen.
--	----	-----	-----	---------	-------------	---------

Lauf. No.	Länge lk in km	Perioden- zahl f	E	J	cos v	Gesamter ohmscher Widerstand $R = \frac{E \cos \Psi}{J \cdot l_k}$ pro km	Gesamter induktiver Widerstand $\omega L = \frac{E \sin \psi}{J \cdot l_k}$ pro km	Induktions- koeffizient $L = \frac{\omega L}{2 \pi f}$ pro km
1		48,8	71,1	37,5	0,376	0,384	0,950	31×10-4
2	4.05	47,6	131,3	70	0,407	0,415	0,925	31
3	1,85	44,3	223,6	122	0,425	0,420	0,910	32,6
. 4	•	43	295	166	0,453	0,435	0,855	31,6
5		58,5	54,7	49	0,343	0,449	1,23	33,4
6	0,85	58,5	100,3	89,6	0,352	0,462	1,23	33,4
7	0,65	57,6	144,5	129,6	0,367	0,482	1,22	33,7
8		56,3	172,6	153,4	0,370	0,490	1,22	34,4
. 9		25	49,75	43,5	0,535	0,330	0,522	33,3
10	1,85	24,5	78,3	68,5	0,558	0,345	0,513	33,4
11	1,00	23,3	145,5	129,2	0,564	0,342	0,505	34,5
12	1.00	22,2	186,6	164,8	0,578	0,354	0,498	35,7
13		56,8	142,4	49,3	0,405	0,468	1,05	29,4
14	2,5	55	215	75,8	0,410	0,465	1,03	29,9
- 15		51,2	326	121,6	0,445	0,476	• 0,96	29,9
16	Ì	28,5	77,8	47,5	0,554	0,329	0,494	27,6
17.	2,75	27,7	115	71,4	0,569	0,367	0,483	27,7
18	_,	26,2	202,4	120,8	0,559	0,340	0,505	30,7
19		26,1	36,8	37,3	0,567	0,558	0,439	26,7
20	1,85	25,4	94,5	97,5	0,576	0,559	0,427	26,7
21	-1	24,3	150,5	161	0,575	0,536	0,414	27



Aus den ersten 18 Versuchsdaten folgt

Mittlerer Wert von R = 0,408 Ohm/km , L =
$$31.9 \cdot 10^{-4}$$
 Henry/km.

Die Daten der betreffenden Linie sind:

Abstand des Fahrdrahtes von den Schienen 5,35 m, Durchmesser des Fahrdrahtes 8 mm, Querschnitt der Schienen 5160 mm².

Bei diesen Versuchen waren die Erdplatten abgeschraubt, dagegen die Schienen an den Stössen durch Kupferdrähte miteinander verbunden.

Widerstand der Schienen

$$R_s = 0.2 \cdot \frac{1000}{5160} = 0.0387$$
 Ohm pro km

Zuschlag für die Stösse (15 %) . . = 0.0058 " " zusammen 0.0445 Ohm/km

gegenüber 0,0434 (im Mittel) mit Gleichstrom gemessen.

Widerstand des Fahrdrahtes

$$R_f = 0.0177 \cdot \frac{1000}{50} = 0.354 \text{ Ohm/km bei } 5^{\circ} \text{ C}.$$

Somit gesamter ohmscher Widerstand

 $R = R_s + R_f = 0.0445 + 0.354 \approx 0.4$ Ohm statt 0.408 aus den Versuchen.

Induktionskoeffizient der Fahrleitung nach Gleichung (3)

$$L_f = \frac{1}{10^4} \left(0.5 + 4.6 \log \cdot \frac{535}{0.4} \right) = \frac{14.8}{10^4} \text{ Henry/km.}$$

Der Mittelwert aus den ersten 18 Ablesungen gibt $L = \frac{31,9}{10^4}$ Henry/km, es bleiben also noch für die Schienen

$$L_s = L - L_f = \frac{31,9 - 14,8}{10^4} = rund \frac{17}{10^4} Henry/km$$

und zwar ändert sich dieser Wert innert den üblichen Grenzen von $5^1/_2$ — $6^1/_2$ m nur wenig mit dem Abstande des Fahrdrahtes von den Schienen.

Um daraus den Induktionskoeffizient bei parallel geschalteten Schienen zu berechnen, ist eine kleine Ueberlegung erforderlich. Zunächst ist klar, dass an der Grösse von $L_{\rm f}$ nichts geändert wird, wohl aber ändert sich $L_{\rm s}$, weil jetzt nur noch der halbe Strom durch eine Schiene fliesst. Ausserdem wirken die beiden Schienen induktiv aufeinander. Nun entspricht dem vollen Strome J bei dem obigen Versuche eine gesamte Kraftlinienmenge

$$\varPhi = \varPhi_{\scriptscriptstyle \rm i} + \varPhi_{\scriptscriptstyle \rm I_1-b} = 17 \cdot 10^4 \, l_{\scriptscriptstyle R} \rm J$$
 Linien

um die Schiene, und zwar entspricht Φ_i dem im Innern der Schiene verlaufenden Feld und Φ demjenigen Feld, das durch die aus Schiene und Fahrdraht gebildete Schleife r_1-b hindurchtritt. Der Faktor r_1 hat hier den Sinn eines "fiktiven" Radius, indem man sich die Schiene durch einen Leiter vom Radius r_1 ersetzt denkt.

Schalten wir jetzt die Schienen parallel, so entstehen um jede derselben folgende Felder (siehe Fig. 6)

- 1. Das vom eigenen Strome $\frac{J}{2}$ erzeugte, im Innern verlaufende Feld, dessen Flux = $+\frac{1}{2}\Phi_{\rm i}$,
- 2. Das ebenfalls vom eigenen Strom herrührende, bis ins Unendliche reichende Feld, dessen Flux = $+ \frac{1}{2} \frac{\Phi}{r_1 \omega} = \frac{1}{2} \frac{\Phi}{r_1 b} + \frac{1}{2} \frac{\Phi}{b \omega},$
 - 3. Das von der zweiten Schiene erzeugte Feld, dessen Flux =

$$+\frac{1}{2} \Phi = \frac{1}{2} \Phi + \frac{1}{2} \Phi$$
, und

4. Das vom Fahrdraht erzeugte Feld, dessen Flux = $-\Phi$.

Alle zusammen ergeben als resultierende Kraftlinienmenge:

$$\Phi_{\rm r} = \frac{1}{2} (\Phi_{\rm i} + \Phi_{\rm r_1-b}) + \frac{1}{2} \Phi_{\rm s-b}.$$

In dieser Gleichung ist aber nach früherem

$$\frac{1}{2}(\Phi_{i} + \Phi) = 8.5 \cdot 10^{4} \, l_{k} \, J ,$$

$$\frac{1}{2} \Phi = 10^{4} \, l_{k} \, J \cdot 2.3 \log \frac{b}{s} .$$

ferner

Somit ergibt sich in den Schienen ein induktiver Spannungsabfall

(5)
$$e'_{s} = \frac{2 \pi f \Phi_{r}}{10^{8}} = \frac{2 \pi f l_{k}}{10^{4}} \left(8,5 + 2,3 \log \frac{b}{s}\right) \cdot J \text{ Volt.}$$

Dazu kommt noch der induktive Spannungsabfall in der Fahrleitung

(6)
$$e''_{s} = \frac{2 \pi f l_{k}}{10^{4}} \left(0.5 + 4.6 \log \frac{b}{r} \right) \cdot J \text{ Volt.}$$

Der gesamte induktive Spannungsabfall ist daher

$$e_s = e'_s + e''_s = \frac{2 \pi f l_k}{10^4} \left(9 + 4,6 \log \frac{b}{r} + 2,3 \log \frac{b}{s}\right) \cdot J$$

oder

(7)
$$e_{s} = \frac{0.145f}{100} l_{k} \left(3.9 + 2 \log \frac{b}{r} + \log \frac{b}{s} \right) \cdot \mathbf{J} \text{ Volt}$$

anderseits ist der ohmsche Spannungsabfall

(8)
$$e_w = \left(R_f + \frac{1}{2} R_s\right) J,$$

und schliesslich der gesamte Spannungsabfall mit genügender Genauigkeit

$$(9) e = e_s \sin \varphi + e_w \cos \varphi$$

 φ = Phasenverschiebungswinkel.

Beispiel. Die Brauchbarkeit dieser Formeln lassen sich sehr leicht an den letzten drei Versuchen nachprüfen. Da die einfache Leitungslänge bei diesen Versuchen 1,85 km betrug, wird

$$e_s = \frac{0.145 \,f}{100} \cdot 1.85 \left(3.9 + 2 \log \frac{535}{0.4} + \log \frac{535}{143.5} \right) \,J = \frac{2.88}{100} \,f \,J \,,$$

$$e_w = 1.85 \,(0.354 + 0.022) \,J = 0.695 \,J \,.$$

Die Uebereinstimmung ist also eine befriedigende, wenn man berücksichtigt, dass die Leitfähigkeit der Erde, welche sich natürlich der Rechnung entzieht, durch die Parallelschaltung jedenfalls erheblich zugenommen hat. Ausserdem hatte es, wie der Versuchsbericht angibt, vorher stark geregnet, so dass zum vorneherein eine grössere Leitfähigkeit erwartet werden durfte.

Beispiel 2. Bei der Lötschbergbahn wurde ein scheinbarer Widerstand von 0,27 Ohm/km ermittelt. Die Daten derselben sind

$$b = 670 \text{ cm}, \qquad s = 143.5 \text{ cm}, \qquad f = 15 \qquad r = 0.55 \text{ cm}.$$

Somit ist für diesen Fall

der induktive Widerstand . . .
$$=\frac{0.145 \cdot 15}{100} \left(3.9 + 2 \log \frac{670}{0.55} + \log \frac{670}{143.5}\right) = 0.233 \text{ Ohm/km}$$

Widerstand des Fahrdrahtes . . =
$$0.0177 \cdot \frac{1000}{100} = 0.177 \text{ Ohm/km}$$

Widerstand der Schienen inkl. Ver-

bindungen =
$$1,15 \cdot \frac{0,2 \cdot 1000}{2 : 5000} = 0,023 \text{ Ohm/km}$$

Gesamter ohmscher Widerstand . =
$$0,177 + 0,023 = 0,2 \text{ Ohm/km}$$

Scheinbarer Widerstand . . .
$$=\sqrt{0,233^2+0,2^2}=0,3$$
 Ohm/km, gegenüber 0,27 gemessen.

Auch hier dürfte der Unterschied von der Leitfähigkeit der Erde herrühren.

Anmerkung. Die Formel 7 gilt natürlich nur für jene Strecken, wo die Stromzuführung ausschliesslich durch den Fahrdraht erfolgt. Laufen parallel zur Bahn noch Speiseleitungen, so muss auf die induktive Wirkung derselben ebenfalls Rücksicht genommen werden. In diesem Falle tritt an Stelle von Gleichung (7) die ebenfalls leicht abzuleitende Gleichung (7a)

(7a)
$$e_{s} = \frac{2\pi f}{10^{4}} l_{k} \left[\left(9 + 4,6 \log \frac{b}{r} + 2,3 \log \frac{b}{s} \right) \cdot J_{1} + \left(8,5 + 4,6 \log \frac{d}{a} + 2,3 \log \frac{b}{s} \right) \cdot J_{2} \right]$$

$$= \frac{0,145}{100} f l_{k} \left[\left(3,9 + 2 \log \frac{b}{r} + \log \frac{b}{s} \right) \cdot J_{1} + \left(3,7 + 2 \log \frac{d}{a} + \log \frac{b}{s} \right) \cdot J_{2} \right]$$

worin

- b den Abstand des Fahrdrahtes von den Schienen in cm (siehe Fig. 7),
- a den mittleren Abstand der Speiseleitungen vom Fahrdraht, d den mittleren Abstand der Speiseleitungen von der Schienenmitte,
- J_1 den Strom im Fahrdraht, und J_2 den Strom in allen Speiseleitungen zusammen bedeutet.

Für $J_2 = 0$ geht Gleichung (7a) in (7) über.

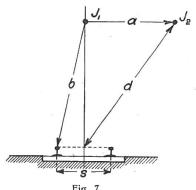


Fig. 7.

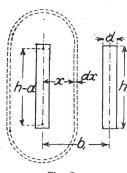


Fig. 8.

3. Spannungsabfall in massiven Barren.

Derartige Leitungen kommen hauptsächlich in metallurgischen Anlagen, Karbidwerken usw. vor, wo sie nicht selten zu höchst unangenehmen Ueberraschungen geführt haben. Obwohl man es hier mit verhältnismässig kurzen Leitungen zu tun hat, können doch infolge der grossen Stromstärken und der geringen Betriebsspannung bedeutende prozentuale Spannungsabfälle auftreten. Das einzige Mittel zu ihrer Vermeidung besteht in einer möglichst weitgehenden Unterteilung der Leitungen, die so angeordnet werden, dass abwechslungsweise Barren verschiedener Stromrichtung nebeneinander zu liegen kommen (Sandwichanordnung).

Wie leicht einzusehen, sind für diesen Fall die für runde Drähte abgeleiteten Formeln nicht mehr anwendbar. Da nun eine "genaue" Rechnung nicht nur sehr umständlich, sondern auch wenig aussichtsreich wäre, werden wir uns im Nachstehenden mit einer Näherungsrechnung begnügen, die sich eng an das frühere Verfahren anschliesst. Unter der Annahme, dass die Kraftlinien etwa den in Fig 8 angedeuteten Verlauf nehmen, lässt sich die Kraftliniendichte H_x im Abstande x von der Barrenmitte durch die Formel

$$H_x = \frac{4 \pi}{10} \cdot \frac{J}{\text{Kraftlinienlänge}} = \frac{4 \pi}{10} \cdot \frac{J}{2 \pi x + 2 (h - d)}$$

ausdrücken, wenn J den Strom in einer Barre bedeutet

Für $x = \frac{d}{2}$, also dicht am Umfange wird daher

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{J}{\pi d + 2 (h - d)}.$$

Von hier nimmt die Kraftliniendichte nach der Mitte geradlinig ab, so dass man im Mittel für den Flux

$$\Phi' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{HId}}{2} = \frac{\text{JI}}{10} \cdot \frac{\pi \text{ d}}{\pi \text{ d} + 2 \text{ (h - d)}} = \frac{\text{JI}}{10} \cdot \frac{\text{d}}{\text{d} + 2 \text{ h}_0}$$

setzen kann, worin h_0 zur Abkürzung für $\frac{h-d}{\pi}$ steht. Anderseits ist die durch die Hin-

und Rückleitung gebildete Schleife tretende Linienzahl

$$\Phi'' = \int_{\frac{d}{2}}^{b_1} H_x \, I \, dx = \frac{J \, I}{10} \cdot 4,6 \cdot \log \frac{b_1 + h_0}{\frac{d}{2} + h_0}$$

Wir lassen nun die Bedingung einer einfachen Schleife fallen und untersuchen, welche induktive Wirkung zwei beliebige Barren entgegengesetzter Stromrichtung im Abstande b_m und a_m auf den betrachteten Leiter ausüben. Analog dem früher behandelten Beispiele (siehe Fig. 2) wird allgemein

$$\Phi''' = \frac{J_1}{10} 4,6 \log \frac{b_m + h_0}{a_m + h_0}$$
 sein.

Alle diese Kraftlinienmengen addiert, ergeben als resultierenden Flux

$$\Psi_{r} = \frac{\text{J1}}{10} \left[\frac{d}{d+2 h_{0}} + 4,6 \log \frac{(b_{1} + h_{0}) (b_{2} + h_{0}) (b_{3} + h_{0}) \dots (b_{n} + h_{0})}{\left(\frac{d}{2} + h_{0}\right) (a_{2} + h_{0}) (a_{3} + h_{0}) \dots (a_{n} + h_{0})} \right]$$

dem ein gesamter induktiver Spannungsabfall (in Hin- und Rückleitung)

$$e_s = 2 \cdot \frac{2 \pi f}{10^8} | \Phi_r$$
 Volt entspricht.

In Wirklichkeit fällt indessen der Spannungsabfall durchschnittlich ca. 50 - 60 % grösser aus, so dass man für eine approximative Rechnung — und um eine solche kann es sich hier höchstens handeln —

$$(10) \quad e_{s} = \frac{2 f l_{m}}{1000} \left[\frac{d}{d + h_{0}} + 4.6 log \frac{(b_{1} + h_{0}) (b_{2} + h_{0}) (b_{3} + h_{0}) ... (b_{n} + h_{0})}{\left(\frac{d}{2} + h_{0}\right) (a_{2} + h_{1}) (a_{3} + h_{0}) ... (a_{n} + h_{0})} \right] \frac{J}{1000}$$

setzen kann, wenn Im die einfach gemessene Länge in m bedeutet.

Einige Beispiele, welche sich auf ausgeführte Anlagen beziehen, mögen das Gesagte erläutern:

Beispiel 1. Die gesamte Leitung (Hin- und Rückleitung) besteht aus 16 Barren, welche, wie Fig. 9 zeigt, angeordnet sind. Strom pro einzelne Barre J=2000~A; Periodenzahl f=60. Länge unbekannt, dagegen soll der Spannungsabfall pro laufenden m etwas weniger als 2 Volt betragen.

Aus der Figur folgt: d = 0.8; h = 12.5,

$$h_0 = \frac{h-d}{\pi} = \frac{12,5-0,8}{\pi} = \text{rund } 3,7 \text{ cm}$$

$$a_1 = \frac{d}{2} = 0,4 \text{ cm}.$$

$$b_1 \text{ bis } b_n = 10,4 \quad 12 \quad 31,2 \quad 32,8 \quad 52 \quad 53,6 \quad 72,8 \quad 74,4 \\ h_0 = 3,7 \quad 3,7 \quad 3,7 \quad 3,7 \quad 3,7 \quad 3,7 \quad 3,7 \\ b+h_0 = 14,1 \quad 15,7 \quad 34,9 \quad 36,5 \quad 55,7 \quad 57,3 \quad 76,5 \quad 78,1$$

$$a_1 \text{ bis } a_n = 0,4 \quad 1,6 \quad 20,8 \quad 22,4 \quad 41,6 \quad 43,2 \quad 62.4 \quad 64 \\ h_0 = 3,7 \quad 3,7 \\ a+b_0 = 4,1 \quad 5,3 \quad 24,5 \quad 26,1 \quad 45,3 \quad 46,9 \quad 66,1 \quad 67,7$$

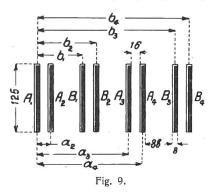
$$e_s = \frac{2 \cdot 60}{1000} \bigg[\frac{0.8}{0.8} + \frac{0.8}{2 \cdot 3.7} + 4.6 \, \log \frac{14.1 \cdot 15.7 \cdot 34.9 \cdot 36.5 \cdot 55.7 \cdot 57.3 \cdot 76.5 \cdot 78.1}{4.1 \cdot 5.3 \cdot 24.5 \cdot 26.1 \cdot 45.3 \cdot 46.9 \cdot 66.1 \cdot 67.7} \bigg] \frac{2000}{1000} = 1.8 \, \text{Volt pro m.}$$

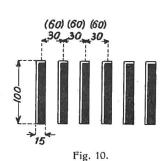
Beispiel 2. Die Leitung besteht wiederum aus 16 Barren, in welchen ein Strom von 3000 A bei 45 Perioden fliesst.

Abstand der Barren

a) auf eine Strecke von
$$1,84 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

b) ", ", ", 0,80 m = 6 cm





Mit Bezug auf die Figur 10 ist hier

$$h_0 = \frac{h - d}{\pi} = \frac{10 - 1.5}{\pi} = 2.7 \text{ cm.}$$

$$a_1 = \frac{d}{2} = 0.75$$
a)
$$b_1 \text{ bis } b_8 = 3 \qquad 9 \qquad 15 \qquad 21 \qquad 27 \qquad 33 \qquad 39 \qquad 45$$

$$h_0 = 2.7 \qquad 2.7$$

$$b + h_0 = 5.7 \qquad 11.7 \qquad 17.7 \qquad 23.7 \qquad 29.7 \qquad 35.7 \qquad 41.7 \qquad 47.7$$

$$a_1 \text{ bis } a_8 = 0.75 \qquad 6 \qquad 12 \qquad 18 \qquad 24 \qquad 30 \qquad 36 \qquad 42$$

$$h_0 = 2.7 \qquad 2.7$$

$$a + h_0 = 3.45 \qquad 8.7 \qquad 14.7 \qquad 20.7 \qquad 26.7 \qquad 32.7 \qquad 38.7 \qquad 44.7$$

Anmerkung: Auf die Verschiedenheit der Ströme in den einzelnen Barren, welche ziemlich gross sein dürfte, ist bei den obigen Rechnungen keine Rücksicht genommen. Sehr wahrscheinlich ist auch diese Verschiedenheit zum Teil der Grund, warum der wirkliche Spannungsabfall etwas grösser ausfällt.

4. Induktion bei unverkettetem Zweiphasenstrom.

Der Rechnungsgang ist ähnlich wie bei Einphasenstrom. Es seien

 $A_1 \ A_2 \ A_3 \dots A_n$ die Hinleitungen der Phase I, $B_1 \ B_2 \ B_3 \dots B_n$ " Rückleitungen " " I, $C_1 \ C_2 \ C_3 \dots C_n$ " Hinleitungen " " II, $D_1 \ D_2 \ D_3 \dots D_n$ " Rückleitungen " " II,

ferner a₂ a₃ ... a_n die Abstände nach den Drähten gleicher Phase und Stromrichtung.

 $b_1 \ b_2 \ b_3 \dots b_n$, , , , aber entgegengesetzter Stromrichtung.

 $c_1 \ c_2 \ c_3 \dots c_n$ bezw. $d_1 \ d_2 \dots d_n$ die Abstände nach den Drähten der zweiten Phase.

Nimmt man für einen Moment an, die zweite Phase sei stromlos, so würde auf den Leiter A_1 der Flux

$$\Phi_{\rm I} = \frac{\rm J\,I}{10} \left(0.5 + 4.6 \log \frac{\rm b_1\,b_2 \dots b_n}{\rm r\,a_2\,a_3 \dots a_n} \right)$$

einwirken. Dazu kommt aber jetzt noch das von den Leitern der zweiten Phase herrührende Feld, dessen Flux

$$\Phi_{II} = \frac{Jl}{10} \cdot 4,6 \log \frac{d_1 d_2 d_3 \dots d_n}{c_1 c_2 c_3 \dots c_n}$$

der dem ersteren je nach der Reihenfolge der Phasen um 90° vor- oder nacheilt. Beide setzen sich folglich zu einer resultierenden Kraftlinienmenge

$$\Phi_{\rm r}=\sqrt{\Phi_{\rm l}^{\ 2}+\Phi_{\rm ll}^{\ 2}}$$

zusammen. Nun genügt aber eine kleine Nachrechnung, um einzusehen, dass man Φ_{II} gegenüber Φ_{I} praktisch vernachlässigen kann. In der Tat beträgt der dadurch entstehende Fehler selbst bei der denkbar ungünstigsten Anordnung, No. 8, Tabelle II, nur etwa 1%, während er bei allen übrigen unter 0,5% liegt. Infolgedessen können Zweiphasenleitungen wie Einphasenleitungen nach Gleichung (4) berechnet werden. Auf die Durchrechnung eines Beispieles kann verzichtet werden, zumal es an Hand der in Tabelle II zusammengestellten Beispiele ein leichtes ist, den Rechnungsgang zu verfolgen.

5. Induktion bei Drehstrom.

Es seien A_1 A_2 A_3 ..., B_t B_2 B_3 ..., C_1 C_2 C_3 ... die Drähte der aufeinanderfolgenden Phasen, J der Strom pro Phase, a_2 a_3 a_4 ... die Abstände des betrachteten Leiters nach

den übrigen gleicher Phase und b₁ b₂ ... bezw. c₁ c₂ ... diejenigen nach den Drähten der beiden andern Phasen, wobei sich die Reihenfolge gleich bleibt.

Um auch auf diesen Fall die frühere Betrachtungsweise anwenden zu können, denken wir uns zu jeder Leitung eine besondere Rückleitung gezogen und sämtliche Rückleitungen in einen gemeinsamen Strang vereinigt, der von der betrachteten Leitung den Abstand R habe; ausserdem werden wir diesen Abstand so gross annehmen, dass R für alle drei Phasen praktisch gleich gross ist. Diese Freiheit ist ohne weiteres gestattet, da ja bekanntlich die Summe aller durch die Rückleitung fliessenden Ströme gleich Null ist. Durch den Hinzutritt dieser fiktiven Rückleitung wird also an der Sachlage nichts geändert.

Wir berechnen nun in gewohnter Weise die von den einzelnen Drähten und ihren Rückleitungen erzeugten Felder und erhalten für den magnetischen Flux der drei um je 120° verschobenen resultierenden Felder:

$$\Phi_{A} = \frac{JI}{10} \left(0.5 + 4.6 \log \frac{R}{r} + 4.6 \log \frac{R}{a_{2}} + 4.6 \log \frac{R}{a_{3}} + \dots \right)
= \frac{JI}{10} \left(0.5 + 4.6 \log \cdot \frac{R^{n}}{r a_{2} a_{3} \dots a_{n}} \right),
\Phi_{B} = \frac{JI}{10} \cdot 4.6 \log \frac{R^{n}}{b_{1} b_{2} b_{3} \dots b_{n}}
\Phi_{C} = \frac{JI}{10} \cdot 4.6 \log \frac{R^{n}}{c_{1} c_{2} c_{3} \dots c_{n}}$$

Die beiden letzteren lassen sich wieder in eine Komponente in der Richtung $\Phi_{\rm A}$ und senkrecht dazu zerlegen. Dadurch erhält man an Stelle von drei noch zwei senkrecht aufeinanderstehende Felder

$$\Phi_{\rm I} = \Phi_{\rm A} + \Phi_{\rm B} \cdot \cos 120 + \Phi_{\rm C} \cdot \cos 240 = \Phi_{\rm A} - 0.5 \,\Phi_{\rm B} - 0.5 \,\Phi_{\rm C}$$

oder ausgerechnet

$$\Phi_{I} = \frac{\text{JI}}{10} \left(0.5 + 4.6 \log \cdot \frac{\sqrt{(b_1 b_2 b_3 \dots b_n) (c_1 c_2 c_3 \dots c_n)}}{r a_2 a_3 \dots a_n} \right)$$

und

$$\varPhi_{\rm II}\!=\!\varPhi_{\rm B}\sin$$
 120 + $\varPhi_{\rm C}\sin$ 240 $=$ 0,866 $\varPhi_{\rm B}$ $-$ 0,866 $\varPhi_{\rm C}$,

oder ausgerechnet

$$\Phi_{\text{II}} = \frac{\text{J1}}{10} \cdot 4 \log \cdot \frac{c_1 c_2 c_3 \dots c_n}{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}$$

Der auf den Leiter A_1 einwirkende $resultierende\ Flux$ ist somit

$$\varPhi_{\rm r} = \sqrt{\varPhi_{\rm l}^{\,2} + \varPhi_{\rm ll}^{\,2}}$$

Nun lässt sich leicht nachweisen, dass auch hier wiederum Φ_{Π} gegenüber Φ_{Π} vernachlässigt werden darf. Folglich erhält man als Induktionskoeffizient einer einzelnen Leitung oder Phase

(11)
$$\dot{L} = \frac{1_k}{10^4} \left(0.5 + 4.6 \log \frac{\sqrt{(b_1 b_2 b_3 \dots b_n) (c_1 c_2 c_3 \dots c_n)}}{r a_2 a_3 \dots a_n} \right) \text{Henry/km}$$

Beispiel 1: Mit Bezug auf die Anordnung No. 1, Tabelle III ist für den Leiter A und C: $b_d=a$; $c_1=2$ a, (die übrigen fallen weg)

$$\begin{split} \text{daher L}_A &= \text{Lc} = \frac{l_k}{10^4} \left(0.5 + 4.6 \, \log \sqrt[4]{\frac{a \cdot 2 \, a}{r}} \right) = \frac{l_k}{10^4} \left(0.5 + 4.6 \, \log \frac{a \, \sqrt{2}}{r} \right) \\ &= \frac{l_k}{10^4} \left(0.5 + \frac{4.6}{2} \log 2 + 4.6 \log \frac{a}{r} \right) = \frac{l_k}{10^4} \left(1.19 + 4.6 \log \frac{a}{r} \right) \, \text{Henry/km.} \end{split}$$

Für den Leiter B wird: $b_1 = a$, $c_1 = a$

somit
$$L_B = \frac{l_k}{10^4} \left(0.5 + 4.6 \log \sqrt[3]{\frac{a \cdot a}{r}} \right) = \frac{l_k}{10^4} \left(0.5 + 4.6 \log \frac{a}{r} \right)$$
 Henry/km.

Beispiel 2: Als zweites Beispiel wählen wir die Anordnung No. 5, Tabelle III. für die symmetrisch gelegenen Drähte A_1 , A_2 , C_1 , C_2 :

345

$$a_2 = d$$
; $b_1 = b$; $c_1 = 2 b$,
 $b_2 = c$; $c_2 = a$,

$$\text{daher } LA_1 = LA_2 = LC_1 = LC_2 = \frac{l_k}{10^4} \left(0.5 + 4.6 \log \sqrt{\frac{b \cdot c \cdot 2 \cdot b \cdot a}{r \cdot d}} \right) = \frac{l_k}{10^4} \left(0.5 + 4.6 \log \frac{b}{r \cdot d} \sqrt{2 \cdot a \cdot c} \right)$$

oder wenn b = a, also $c = a \sqrt{2}$, $d = a \sqrt{5}$ wird.

$$\begin{split} \text{LA}_1 \text{LA}_3 \ \text{oder} = & \frac{l_k}{10^4} \left(0.5 + 4.6 \, \log \frac{a}{r \, a \, \sqrt{5}} \, \sqrt{2 \cdot a \cdot a \, \sqrt{2}} \, \right) = & \frac{l_k}{10^4} \left(0.5 - \frac{4.6}{2} \log \frac{5}{2.82} + 4.6 \, \log \frac{a}{r} \right) \\ = & \frac{l_k}{10^4} \left(-0.07 + 4.6 \, \log \frac{a}{r} \right). \end{split}$$

Anderseits erhält man für die Drähte B1 und B2

b für b = a

$$LB_1 = LB_2 = \frac{1_k}{10^4} \left(1,19 + 4,6 \log \frac{a}{r} \right).$$

(Tabelle III, am Schluss des Aufsatzes.)

Diese beiden Beispiele dürften genügen. Im übrigen sei auf die Tabelle III verwiesen, welche so ziemlich alle in der Praxis vorkommenden Leitungsanordnungen enthält. Von denselben sind nur die Ausführungsarten No. 2, 9 und 10 symmetrisch, alle andern dagegen mehr oder weniger unsymmetrisch. Im allgemeinen hat dies nicht viel zu sagen, da sich diese Unsymmetrie mehr durch eine Verschiedenheit in der Wattaufnahme der drei Phasen bei leerlaufenden Motoren bemerkbar macht. Auch lässt sich dieselbe, wenn absolut nötig, durch Verdrillung, d. h. zyklische Vertauschung der Leitungen beheben. Das geschieht z. B. bei den Anordnungen No. 8, 11, 12 und 13, indem man

 A_1 mit B_1 , B_1 mit C_1 und C_1 mit A_1 A_2 mit B_2 , B_2 mit C_2 und C_2 mit A_2 vertauscht. Gewöhnlich sieht und gleichzeitig man aber wegen den grossen Kosten von der Verdrillung ab.

Wir sehen ferner, dass die Anordnung 11 gegenüber 12 einen etwas kleineren Induktionskoeffizienten besitzt, da der arithmetische Mittelwert von y nur

$$\frac{1}{3}(1,18+0,64-0,34)=0,493$$

gegenüber

$$\frac{1}{3}(-0.03 + 0.64 + 1.73) = 0.78$$
 beträgt.

Diese ohnehin kleine Differenz spielt jedoch keine Rolle, da die 2ten Glieder bedeutend überwiegen.

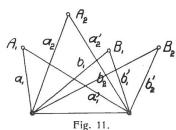
Grössere Differenzen weisen die Ausführungen No. 8 bezw. 9 und 10 auf, von denen die letzteren beiden schon wegen der getrennten Anordnung der Phasen entschieden vorzuziehen sind.

II. Induktion auf freie Leitungen.

Unter freien Leitungen sind Telephon- oder Telegraphenleitungen zu verstehen, welche parallel zur Kraftleitung laufen. Obwohl eine direkte Störung des Telephonbetriebes erst bei Vorhandensein von höheren Harmonischen zu befürchten ist, so können doch Ströme induziert werden, welche unter Umständen die Signalapparate zum Ansprechen bringen oder auch wegen ihrer Spannung eine gewisse Gefahr in sich bergen und deshalb zu vermeiden sind.

1. Bei Einphasenstrom.

Nach den weiter oben gegebenen Erklärungen können wir uns kurz fassen. Es seien FF₁ die beiden Drähte der Freileitung,



so ist die von den Leitern $A_1\,A_2\,...$ erzeugte, durch die Schleife FF_1 gehende gesamte Kraftlinienanzahl

generate gesante relationeralization
$$\Phi_{A} = 4.6 \frac{\text{J l}}{10} \left[\log \frac{a'_{1}}{a_{1}} + \log \frac{a'_{2}}{a_{2}} + \dots \right] = 4.6 \frac{\text{J l}}{10} \log \left(\frac{a'_{1} a'_{2} a'_{3} \dots}{a_{1} a_{2} a_{3} \dots} \right)$$

Dazu kommt noch der von den Leitern $B_1 B_2 ...$ erzeugte Flux $\Phi_B = 4.6 \frac{\text{J I}}{10} \left[\log \frac{b_1}{b_1'} + \log \frac{b_2}{b_2'} + \right] = 4.6 \frac{\text{J I}}{10} \log \left(\frac{b_1 b_2 b_3}{b_1' b_2' b_3'} \right)$

Die in der Schleife induzierte EMK ist daher

$$e_{m} = 2 \pi f \left\{ \frac{l_{k}}{10^{4}} 4.6 \left[log \left(\frac{a'_{1} a'_{2} a'_{3} \dots}{a_{1} a_{2} a_{3}} \right) + log \left(\frac{b_{1} b_{2} b_{3} \dots}{b'_{1} b'_{2} b'_{3} \dots} \right) \right] \right\} J$$

oder

(12)
$$e_{m} = 2 \pi f \left[\frac{l_{k} 4.6}{10^{4}} \left(log \frac{b_{1} b_{2} b_{3} ...}{a_{1} a_{2} a_{3} ...} - log \frac{b'_{1} b'_{2} b'_{3} ...}{a'_{1} a'_{2} a'_{3} ...} \right) \right] \cdot \mathbf{J} \text{ Volt}$$

Benützt man als Rückleitung die Erde, so dass also der Leiter F_1 wegfällt, so ist für $a'_1 a'_2 \dots$ und $b'_1 b'_2 \dots$ der Abstand der Drähte $A_1 A_2 \dots B_1 B_2 \dots$ von der Erde einzusetzen. Nun nähert sich aber merklich der Quotient $\frac{b'_1 b'_2 b'_3 \dots}{a'_1 a'_2 a'_3 \dots}$ der Einheit. Infolgedessen wird der log derselben gleich Null und es bleibt nur noch das erste Glied.

2. Bei Zweiphasenstrom.

Hier ändert sich die Sachlage nur insofern, als noch ein zweites um $90^{\,0}$ verschobenes Feld entsteht, das von den Drähten C_1 C_2 , D_1 D_2 der zweiten Phase herrührt. Analog dem vorigen Falle ergibt sich daher eine induzierte EMK

(13)
$$e_m = 2\pi f \frac{l_k 4.6}{10^4} \sqrt{\left(\log \frac{b_1 b_2 \dots}{a_1 a_2 \dots} - \log \frac{b'_1 b'_2 \dots}{a'_1 a'_2}\right)^2 + \left(\log \frac{d_1 d_2 \dots}{c_1 c_2 \dots} - \log \frac{d'_1 d'_2 \dots}{c'_1 c'_2 \dots}\right)^2} \cdot J$$

Fällt F₁ weg, so verschwinden ebenfalls die zweiten Glieder in den Klammerausdrücken.

3. Bei Drehstrom.

Wir erhalten zunächst drei Felder mit der Kraftlinienanzahl

$$\Phi_{A} = \frac{J1}{10} 4,6 \log \frac{a'_{1} a'_{2} \dots}{a_{1} a_{2} \dots}$$

$$\Phi_{B} = \frac{J1}{10} 4,6 \log \frac{b'_{1} b'_{2} \dots}{b_{1} b_{2} \dots}$$

und

$$\Phi_{\rm c} = \frac{\rm Jl}{10} 4.6 \log \frac{{\rm c'_1 \, c'_2 \,}}{{\rm c_1 \, c_2 \,}}$$

welche wir wie früher in zwei senkrechte Komponenten

$$\Phi_{\rm I} = \Phi_{\rm A} - 0.5 \, \Phi_{\rm B} - 0.5 \, \Phi_{\rm C} = \frac{\rm J\,I}{10} \, 4.6 \left[\log \frac{a'_1\, a'_2\,}{a_1\, a_2\,} - 0.5 \cdot \log \frac{b'_1\, b'_2\,}{b_1\, b_2\,} - 0.5 \log \frac{c'_1\, c'_2\,}{c'_1 c'_2\,} \right]$$
und

$$\Phi_{\text{II}} = 0,866 \, \Phi_{\text{B}} - 0,866 \, \Phi_{\text{C}} = \frac{\text{J1}}{10} \, 4,6 \cdot 0,866 \left[\log \frac{b_1' \, b_2' \, \dots}{b_1 \, b_2 \, \dots} - \log \frac{c_1' \, c_2' \, \dots}{c_1 \, c_2 \, \dots} \right]$$

zerlegen. Dann ist ausgerechnet

(14)
$$e_{m} = 2\pi f \frac{l_{k} 4.6}{10^{4}} \sqrt{\left(\log \frac{a'_{1}a'_{2} ...}{a_{1} a_{2} ...}\right) \frac{b'_{1}b'_{2}...c'_{1}c'_{2}...}{b_{1} b_{2}...c_{1} c_{2}...}}^{2} + 0.75 \left(\log \frac{b'_{1}b'_{2}...}{b_{1} b_{2}...} \cdot \frac{c_{1} c_{2}...}{c_{1} c_{2}...}\right)^{2}} \cdot J$$

Beispiel. Man berechne die in der Leitung FF'₁ (Fig. 12) induzierte Spannung, wenn $l_{k} = 20 \text{ km}$, $J = 100 \text{ Amp.}$, $f = 50 \text{ ist.}$

Aus der Figur folgt

 $a = \sqrt{30^{2} + 160^{2}} = 163 \text{ cm}$; $a' = \sqrt{70^{2} + 160^{2}} = 174.5 \text{ cm}$
 $b = b' = \sqrt{20^{2} + 246.6^{2}} = 248 \text{ cm}$
 $c = a' = 174.5 \text{ cm}$; $c' = a = 163 \text{ cm.}$

Es ist daher nach Gleichung (14)

 $e_{m} = \frac{2\pi 50 \cdot 20 \cdot 4.6}{10^{4}} \sqrt{\left(\log \frac{174.5}{163} \sqrt{\frac{248 \cdot 163}{243 \cdot 174.5}}\right)^{2}} + 0.75 \left(\log \cdot \frac{248 \cdot 174.5}{248 \cdot 163}\right)^{2} \cdot 100 = \text{rd. 290 V.}$

Fig. 12.

III. Die Kapazität.

1. Allgemeine Erklärungen.

Etwas weniger einfach liegt die Sache mit der Kapazität. Doch sind die Schwierigkeiten mehr scheinbar und rühren zum Teil daher, dass über den Begriff Kapazität noch eine gewisse Unsicherheit herrscht. Es handelt sich eben hier nicht mehr um einen eindeutigen Begriff, der sich durch eine einzige starre Definition umschreiben lässt, vielmehr sind verschiedene Auffassungen zulässig. Gerade diese Vieldeutigkeit hat aber das Gute, dass sie gestattet, ein und dasselbe Problem auf verschiedene Weise in Angriff zu nehmen, wodurch sich mitunter bedeutende mathematische Vereinfachungen ergeben. Wir werden uns daher mit mehreren Methoden befassen.

Um zu einer allgemeinen Grundlage zu gelangen, seien zunächst einige Erklärungen bezüglich des Potentialbegriffes vorausgeschickt.

Denken wir uns dicht an die Oberfläche einer mit der Ladung Q versehenen Kugel vom Radius r_1 eine frei bewegliche gleichartige Einheitsladung herangebracht, so wird dieselbe nach dem Coulombschen Gesetze mit der Kraft

(15)
$$P = \frac{Q \cdot 1}{\varepsilon \, r_1^2} \, \text{Dyn}$$

(ε = Konstante, welche von der Natur des umgebenden Mediums abhängt), abgestossen und bei ihrer Bewegung bis zu einer Distanz r_2 eine *Arbeit* leisten, welche sich zu

(16)
$$V = \int_{r}^{r_2} P dr = \int_{r}^{r_2} \frac{Q}{\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) Erg$$

berechnet. Genau der gleiche Betrag müsste aufgewendet werden, um die Ladung wieder nach der Kugel zurückzubringen.

Dieser Ausdruck erreicht einen maximalen Wert

$$V=rac{Q}{\epsilon}\cdotrac{1}{r_1}$$
 für $r_2=\infty$,

d. h. wenn sich die Ladung bis ins Unendliche entfernen kann. In diesem Falle stellt V überhaupt das gesamte der Ladung 1 gegenüber der Ladung Q innewohnende "Arbeitsvermögen", oder mit andern Worten, das "Potential" der beiden Ladungen dar. Es liegt auf der Hand, dass wir infolge unserer beschränkten terrestrischen Verhältnisse nur einen Teil dieses gesamten Arbeitsvermögens ausnützen können; infolgedessen handelt es sich bei allen hier vorkommenden Aufgaben stets nur um Potentialdifferenzen.

Wir wollen nun annehmen, beide Ladungen seien an metallische Leiter, der Einfachheit halber metallische Kugeln, gebunden, und zwar besitze die Kugel A die Ladung + Q und B die Ladung - 1, dann findet zwischen beiden eine Anziehung statt. Trotzdem kann diesmal keine Bewegung der Elektrizität zu Stande kommen, weil das Dielektrikum wohl den von den elektrischen Massen ausgehenden "Kraftstrom" durchlässt, für die Elektrizität selbst aber einen mehr oder weniger vollkommenen Isolator bildet. Nichtsdestoweniger besitzen beide Ladungen ein bestimmtes Arbeitsvermögen, das sofort frei wird, sobald man die Kugeln durch einen Leiter miteinander verbindet. Es wandert dann die negative Ladung, die wir uns allein als beweglich vorzustellen haben, durch die Leitung nach A, womit ihr Arbeitsvermögen erschöpft ist.

Nun ist unschwer einzusehen, dass diese Arbeit genau gleich jener sein muss, welche erforderlich wäre, um die Ladung durch das Dielektrikum hindurch von A nach B oder umgekehrt zu bewegen. Da die Ladung auf der Kugel B gleichmässig über die Oberfläche verteilt ist und sich demnach so verhält, als ob sie im Mittelpunkte angebracht wäre, wird bei ihrer Bewegung von B nach der Oberfläche von A ein Weg $r_2 - r_1$ zurückgelegt, wenn r_2 den Abstand der Kugelmitten bedeutet. Wir können also die Arbeit sofort mit Hilfe der Gleichung (16) berechnen.

Etwas verwickelter ist die Sache, wenn wir uns an Stelle der beiden Kugeln zwei Platten denken. Hier versagt die bisherige Rechnungsweise und muss zu einer andern Methode gegriffen werden. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir Zähler und Nenner der Gleichung (15) mit 4π ; dann kann der im Zähler stehende Ausdruck 4π Q nach der Faradayschen Anschauungsweise als die Gesamtzahl der von der Ladung Q austretenden elektrischen Kraftlinien aufgefasst werden. Anderseits stellt 4π r² = S im Nenner die Oberfläche der um die Ladung gedachten Kugelfläche, oder allgemein gesprochen, die senkrecht zur Kraftlinienrichtung gemessene Fläche vor, folglich der Quotient aus beiden die Liniendichte Be des elektrischen Feldes. Wir gelangen daher zu zwei neuen Beziehungen

(17)
$$V = Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{4 \pi}{\varepsilon} \cdot \frac{d r}{S}$$
 und (18)
$$V = \int_{r}^{r_2} \frac{B_e}{\varepsilon} \cdot d r *$$

^{*)} Der Quotient $\frac{B_e}{\epsilon}$ wird gewöhnlich als "Feldstärke" bezeichnet. Dabei muss man sich aber hüten, dieselbe etwa mit der Felddichte oder Liniendichte zu verwechseln. Der Unterschied lässt sich am besten an Hand eines Beispieles aus der Beleuchtungstechnik erklären. Besitzt ein Körper die Lichtstärke J, so können wir uns vorstellen, dass von ihm ein Lichtstrom $4\pi J$ (Lichtlinien oder Strahlen) ausgehen. Folglich wird im Abstande r eine Strahlen- (Linien-) dichte $B_1 = \frac{4\pi J}{4\pi r^2} = \frac{J}{r^2}$ entstehen und zwar unabhängig davon, ob der Lichtkörper in einem Zimmer oder im Freien bei Nebel aufgestellt ist. Die eigentliche Beleuchtung, d. h. die physiologisch wahrnehmbare Lichtwirkung oder Lichtstärke (vergleichbar mit der Feldstärke) ist aber nur $\frac{B_1}{\lambda}$, wo λ eine von der Lichtdurchlässigkeit des umgebenden Mediums abhängige Konstante bedeutet.

von denen hauptsächlich die erstere höchst merkwürdig ist. In dieser Schreibweise bedeutet nämlich das Integral nichts anderes als die Arbeit, welche bei der Verschiebung zweier Einheitsladungen um die Strecke r₂ — r₁ geleistet wird. Ausserdem erkennt man in ihm unschwer den Ausdruck eines Widerstandes, und zwar in unserm Falle des Widerstandes des elektrischen Kraftflusses. Damit ist aber auch gleichzeitig die Bedeutung der etwas mysteriösen Dielektrizitätskonstanten & als spezifische dielektrische Leitfähigkeit festgelegt. Um die Eigenschaft eines Widerstandes noch besser zum Ausdruck zu bringen, werden wir das Integral kurzerhand mit R bezeichnen, wobei der wahre Wert von R jederzeit aus Gleichung (17) berechnet werden kann.

Wir haben es bisher absichtlich vermieden, von Kapazität zu sprechen. In der Tat lag kein Grund vor, den uns vertrauteren Begriff des Widerstandes durch einen andern zu ersetzen. Nun gibt es aber einzelne Fälle, wo es vorteilhafter ist, statt mit dem Widerstande, mit seinem reziproken Werte der Leitfähigkeit zu rechnen. Führen wir für dieselbe

die Bezeichnung $C = \frac{1}{R}$ ein, so nimmt die Gleichung (17) die uns bekannte Form

$$V = QR = \frac{Q}{C} \quad \text{an. *})$$

worin man sich unter C die dielektrische Leitfähigkeit, oder wenn schon ein Fremdwort gebraucht werden soll, die Kapazität vorzustellen hat. Dabei hat man sich zu erinnern, dass bei Parallelschaltung von Leitfähigkeiten oder Kapazitäten die gesamte Leitfähigkeit $C = C_1 + C_2 + C_3 \dots$ ist,

während umgekehrt bei der Hintereinanderschaltung

(21)
$$R = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \text{ also}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots} \text{ wird.}$$

Beispiel 1: Man berechne die Kapazität einer Kugel vom Radius r₁ gegen die Erde. Es ist dies eines der wenigen Beispiele wo man direkt von Gleichung (16) ausgehen kann.

Da für r_2 der Abstand der Kugel von der Erdmitte einzusetzen ist, kann offenbar $\frac{1}{r_2}$ gegenüber $\frac{1}{r_1}$

vernachlässigt werden. Ferner ist
$$\varepsilon$$
 für die Luft gleich 1. Wir erhalten daher $V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{r_1}$ oder (22) $C = r_1$ (ESE) $= \frac{r_1}{9 \cdot 10^{11}}$ Farad.

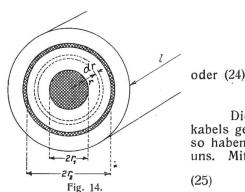
Beispiel 2: Man bestimme die Kapazität eines aus zwei parallelen Platten gebildeten Kondensators (Fig. 13). Wir benutzen Gleichung (17), worin wir für S die Fläche einer Platte einsetzen. Da S einen konstanten Wert beibehält, wird

(22)
$$R = \int_{r_1}^{\frac{1}{2}} \frac{4\pi \, d}{\varepsilon} \frac{r}{S} = \frac{4\pi}{\varepsilon S} (r_2 - r_1)$$
oder (23)
$$C = \frac{\varepsilon \, S}{4\pi \, (r_2 - r_1)} = \frac{\varepsilon \, S}{4\pi \, \delta} \text{ (ESE)}.$$

Beispiel 3: Kapazität eines konzentrischen Kabels. Da die elektrischen Kraftlinien hier radial verlaufen, so ist die senkrecht zur Kraftlinienrichtung gemessene Fläche (nach Fig. 14) im Abstand r

$$S = 2 \pi r 1$$
 1 = Länge des Kabels in cm,

^{*)} Die gleiche Betrachtungsweise ist natürlich auch auf die bewegte Elektrizität, d. h. den elektrischen Strom anwendbar, sofern man die Dielektrizitätskonstante durch die Leitfähigkeit des Leiters ersetzt. Dividiert man ferner beide Seiten der Gleichung (19) durch die Zeit t, so erhält man links die EMK, d. h. die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit und rechts das Produkt aus = J mal dem Widerstande (Ohmsches Gesetz).



somit
$$R = \frac{1}{C} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{4 \pi}{\varepsilon} \cdot \frac{d r}{2 \pi r 1} = \frac{2}{\varepsilon 1} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$C = \frac{\varepsilon 1}{2} \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \text{ (ESE)}.$$

Die gleiche Formel erhält man für die Kapazität eines Einfachkabels gegen den Bleimantel. Ist der letztere von der Erde isoliert, so haben wir den Fall zweier in Serie geschalteter Kapazitäten vor uns. Mit Bezug auf Fig. 15 ist daher die Kapazität gegen die Erde

(25)
$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{\varepsilon 1}{2 \left(\ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{r_4}{r_3} \right)}$$
 (ESE).

Beispiel 4: Als Beispiel für die Parallelschaltung von Kapazitäten soll die Kapazität zweier unter einem spitzen Winkel zueinander stehenden Platten (Fig. 16) bestimmt werden.

Zu diesem Zwecke denken wir uns das Feld aus unendlich vielen Schichten vom Querschnitte b d x und variabler Länge

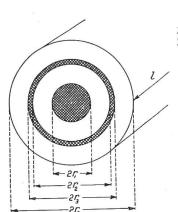
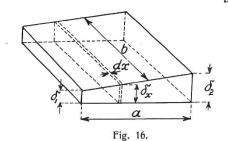


Fig. 15.

 $\delta_{\rm x}=\delta_1+(\delta_2-\delta_{\rm l})rac{{
m x}}{a}$ zerlegt; dann ist die Kapazität einer solchen

$$dC = \frac{4\pi}{2} \frac{b dx}{\delta x} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{b dx}{\delta_1 + (\delta_2 - \delta_1) \frac{x}{\varepsilon}},$$



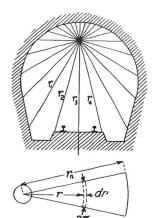


Fig. 17.

und da die gesamte Kapazität gleich der Summe der Einzelkapazitäten ist, folgt, indem man zwischen den Grenzen x = o bis x = a integriert.

(26)
$$C = \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{a \, b}{\delta_2 - \delta_1} \ln \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

Beispiel 5: Auf ähnliche Weise kann die Kapazität einer Fahrleitung in einem Tunnel beliebiger Querschnittsform gegen die Erde bestimmt werden. Wir denken uns zunächst den Umfang des Leiters gleichmässig in eine möglichst grosse Zahl (n) Teile eingeteilt und durch die Teilpunkte und die Leiteraxe Ebenen gelegt. Auf diese Weise entstehen n Prismen von variabler Höhe r_1 , r_2 , r_3 — (Fig. 17). Greifen wir irgend eines derselben heraus, so ist die senkrecht zur Kraftlinienrichtung gemessene Fläche im Radius r

$$S = 1 \frac{2\pi}{n} \cdot r$$

folglich der dielektrische Widerstand

$$R = \int_{r_0}^{r_m} \frac{4\pi}{1} \frac{dr}{\frac{2\pi}{n} \cdot r} = \frac{4.6 \text{ n}}{1} \log \cdot \frac{r_m}{r_0} ,$$

somit die Leitfähigkeit oder Kapazität aller parallel geschalteten Segmente.

(27)
$$C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots = \frac{1}{4,6 \text{ n}} \left[\frac{1}{\log \frac{r_1}{r_0}} + \frac{1}{\log \frac{r_2}{r_0}} + \frac{1}{\log \frac{r_3}{r_0}} + \dots \right] \text{ (ESE)}.$$

Wir werden übrigens weiter unten sehen wie die Aufgabe auch noch auf etwas einfachere Weise gelöst werden kann.

Alle bisher behandelten Beispiele liessen sich entweder direkt mit Hilfe des Potentialbegriffes, Gleichung (16), oder auf dem Umwege über den dielektrischen Widerstand lösen. Nun gibt es aber noch eine Reihe von praktisch wichtigen Beispielen, bei denen man auf diese Weise nur unter Aufwendung eines komplizierten mathematischen Apparates zum Ziele käme. Es sind dies die Freileitungen und Mehrfachkabel, mit denen wir uns im Nachstehenden etwas eingehender befassen werden. Zu ihrer Lösung benützen wir die Gleichung (18).

2. Kapazität von Einphasenleitungen.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall einer aus Hin- und Rückleitung gebildeten Schleife AB, auf welcher sich die Elektrizitätsmenge +Q und -Q befindet. Um hiefür die Potentialdifferenz zu berechnen, genügt es, die Arbeit zu bestimmen, welche es braucht, eine Einheitsladung von A nach B zu bringen.

Befindet sich beispielsweise die Ladun wirkt auf dieselbe sowohl die von A erzeug Feldstärke
$$H_A = \frac{B_A}{\varepsilon} = \frac{4 \pi Q}{\varepsilon 2 \pi r l}$$
 als auch die von B herrührende Feldstärke $H_B = \frac{B_B}{\varepsilon} = \frac{4 \pi Q}{\varepsilon 2 \pi r l}$

Befindet sich beispielsweise die Ladung in P (Fig. 18), so wirkt auf dieselbe sowohl die von A erzeugte

Feldstärke
$$H_A = \frac{B_A}{\varepsilon} = \frac{4 \pi Q}{\varepsilon 2 \pi r}$$

als auch die von B herrührende

Feldstärke
$$H_B = \frac{B_B}{\varepsilon} = \frac{4 \pi Q}{\varepsilon 2 \pi (b-r) l}$$
 ein.

Beide äussern sich nach der gleichen Richtung hin und erzeugen ein resultierendes Feld

$$H = \frac{B_A}{\varepsilon} + \frac{B_B}{\varepsilon} = \frac{2Q}{\varepsilon I} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right).$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (18) ein und berücksichtigt, dass ε für die Luft gleich 1 ist, so folgt

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{2 Q}{1} \int_{r}^{b-r} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right) dr = \frac{4 Q}{1} \ln \frac{b}{r}$$

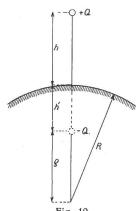
also Kapazität der ganzen Schleife

(28)
$$C = \frac{1}{4 \ln \frac{b}{r}} (ESE) = \frac{0.012 \, l_k}{\log \frac{b}{r}} \quad \mu \, \text{Farad.}$$

Es ist nun zu beachten, dass sich bei mehr als zwei Leitern die Ladungen der verschiedenen Leitungen gegenseitig beeinflussen. Infolgedessen werden auch die Kapazitäten im allgemeinen etwas voneinander abweichen. Das hat wiederum zur Folge, dass sich auch die Ladungen ungleichmässig verteilen. Wollte man allen diesen verwickelten Erscheinungen Rechnung tragen, so würde man zu äusserst komplizierten, praktisch völlig unhandlichen Formeln gelangen. Wir werden deshalb einen Mittelweg einschlagen, d. h. eine gleichmässige Verteilung der Ladung voraussetzen, dagegen die Kapazität ähnlich wie wir dies bezüglich der Induktion hielten, auf einen einzelnen Leiter beziehen und die Umrechnung auf ganze Schleifen erst am Ende vornehmen. In diesem Falle ist demnach als Kapazität eines einzelnen Drahtes die dielektrische Leitfähigkeit bis zur mittleren Aequipotentialfläche vy (Fig. 18) zu verstehen.

Da im Falle einer einfachen Schleife (Fig. 18) beide Teilkapazitäten hintereinandergeschaltet sind, so ist jede doppelt so gross als Gleichung (28) angibt.

Ferner muss bei einer genaueren Rechnung auch die Kapazität gegen die Erde berücksichtigt werden, was am einfachsten mit Hilfe der von Lord Kelvin aufgestellten Vorstellung der "Elektrischen Spiegelbilder" geschieht.



Befindet sich die mit der Ladung Q versehene Leitung im Abstande h (Fig. 19) von der Erde, welche als Rückleitung dient, so ist die Feldverteilung gerade so, als ob die Rückleitung durch eine zweite Leitung im Abstande

$$(29) h' = h \frac{R}{R + h}$$

von der Erdoberfläche erfolge, d. h. die Punkte A und A' verhalten sich mit Bezug auf den Kreisumfäng wie konjugierte Punkte. Da nun im Falle der Erde h gegenüber R im Nenner vernachlässigt werden kann, so wird

$$h' = h$$
,

somit der Abstand zwischen der wirklichen und der fiktiven Leitung gleich 2 h. Es genügt also in Gleichung (28) b durch 2 h zu ersetzen und die rechte Seite mit 2 zu multiplizieren, d. h. es ist die *Kapazität zwischen einer Leitung und der Erde*.

(30)
$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{2 h}{r}} \text{(ESE)} = \frac{0.024 \, l_k}{\log \frac{2 h}{r}} \quad \mu \, \text{Farad.}$$

Beispiel. Die Formel (30) kann auch an Stelle von (27) zur approx. Berechnung der Kapazität eines Fahrdrahtes in einem Tunnel (gegen die Erde) benützt werden, wenn man für h den kürzesten Abstand des Drahtes von der Tunnelwand einsetzt.

Im Tunnel zwischen Kandersteg und Goppenstein der Lötschbergbahn (Länge $l_k = 14.7$ km) hat der Fahrdraht einen Querschnitt von 100 mm² (fiktiver Radius $r_1 = 0.565$ cm) und ist an einem Tragdraht von 8,5 mm ($r_2 = 0.425$ cm) aufgehängt. Die kürzesten Abstände sind in den Aufhängepunkten

$$h_1 = 55 \text{ cm}$$
; $h_2 = 40 \text{ cm}$.

Nach Gleichung (30) ist daher

$$C_1 = \frac{0,024 \cdot 14,7}{\log \frac{2 \cdot 55}{0,565}} = 0,154$$
; $C_2 = \frac{0,024 \cdot 14,7}{\log \frac{2 \cdot 40}{0,425}} = 0,155 \ \mu \text{ F},$

somit gesamte Kapazität $C = C_1 + C_2 = 0.31 \mu F$.

Gemessen wurden beim Fahrdraht links 0,262 μ F., beim Fahrdraht rechts 0,275 μ F. (Die vorstehenden Angaben verdanke ich Herrn *Burlet*, bauleitender Ingenieur der S. B. B.).

Die Differenz mag zum Teil davon herrühren, dass der Abstand infolge des Durchhanges in Wirklichkeit grösser war. Ferner hatte der Fahrdraht eine vom Kreis stark abweichende Form.

Die Bedeutung der Teilkapazitäten geht am besten aus folgendem interessanten Beispiele hervor:

Beispiel. Anlässlich eines Versuches mit den Lokomotiven der Chemin de Fer du Midi auf der Lötschberglinie zeigte es sich, dass die Fahrleitung der Lokomotivremise Spiez, auch wenn sie vollständig von der Hauptleitung abgeschaltet wurde, gegen die Erde eine Spannung von 10 000 Volt aufwies.*) Die dortige Anordnung lässt sich etwa durch das Schema Fig. 20 darstellen, worin A den unter Spannung stehenden Fahrdraht und B die Remisenleitung bedeutet.

Wir haben somit den Fall zweier in Serie geschalteter Kapazitäten C_1 und C_2 vor uns, in deren Mitte die Remisenleitung angeschlossen ist. Da sich die Teilspannungen wie die dielektrischen Widerstände verhalten, also

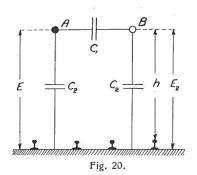
(31)
$$E_{2}: E = \frac{1}{C_{2}}: \left(\frac{1}{C_{2}} + \frac{1}{C_{1}}\right) \text{ so wird}$$

$$E_{2} = \frac{C_{1}}{C_{1} + C_{2}} \cdot E$$

Auf die gleichen Ursachen lässt sich ferner die Erscheinung zurückführen, dass die von der Fahrleitung aus gespeisten Umformer für die Stationsbeleuchtungen auch in ausgeschaltetem Zustande noch eine Spannung von ca. 10000 Volt gegen die Erde haben.

^{*)} Diese Erscheinung wurde übrigens schon bei den ersten Probefahrten der Lötschbergbahn beobachtet und hätte beinahe zu einem Unfalle geführt, indem ein Monteur vom Dache einer in der Remise befindlichen Lokomotive geschleudert wurde. Da sich der Vorfall gerade im Momente ereignete, als ein Zug vorbeifuhr, so schrieb man denselben der Induktion zu und unterliess es bedauerlicherweise, die Spannung zu messen.

somit



Nun ist angenähert b = 800 cm (im Mittel)

$$h = 670 \text{ cm}$$

$$r = 0.4 \text{ cm}$$

E = 15000 Volt, f = 15 Perioden,

$$E_1 = \frac{0,012 \cdot 1_k}{\log \frac{800}{0.4}} = 0,00364 \, 1_k \quad \mu \, F \,,$$

$$C_2 = \frac{0.024 \, I_k}{\log \frac{2.670}{0.4}} = 0.00682 \, I_k \quad \mu \, F,$$

und daraus

$$E_2 = \frac{0,00364}{0,00364 + 0,00682} \cdot 15\,000 = 5100\,\text{Volt,}$$

also nur etwa die Hälfte der wirklich gemessenen Spannung. Es ist indessen zu bemerken, dass die Formel (31) nur unter der ausdrücklichen Bedingung gilt, dass die Isolationswiderstände unendlich gross sind. Denken wir uns dagegen zwischen A und B einen ohmschen Widerstand von R Megohm eingeschaltet, so tritt an Stelle von Formel (31) die vollständigere Formel

$$E_{2} = \frac{C_{1}}{\sqrt{C_{1}^{2} + \frac{2C_{1}C_{2} - C_{2}^{2}}{1 + \left(\frac{1}{R2\pi fC}\right)^{2}}}} \cdot E$$

Setzen wir, um irgend eine Zahl zu wählen, R=10 Megohm, $l_k=0,15$ km, also $C_1=0,00055$, $C_2=rd.\ 0,001$, so erhalten wir eine Teilspannung

$$E_{2} = \frac{0,00055 \cdot 15\,000}{\sqrt{0,00055^{2} + \frac{2 \cdot 0,00055 \cdot 0,001 + 0,001^{2}}{1 + \left(\frac{1}{10 \cdot 2\,\pi\,15 \cdot 0,00055}\right)^{2}}}} = 9500 \text{ Volt}$$

was der Wirklichkeit schon bedeutend näher kommt.

Das voranstehende Beispiel ist auch insofern lehrreich, als es zeigt, welche Fehler entstehen können, wenn man bei derartigen Rechnungen den Isolationswiderstand vernachlässigt. Strenggenommen müsste auch noch der Widerstand der Leitung B gegen die Erde in die Rechnung einbezogen werden, wodurch dieselbe aber ausserordentlich kompliziert würde.

Wir gehen nun zu dem allgemeinen Falle einer Leitung von beliebiger Leiterzahl A_1 A_2 A_3 , ... B_1 B_2 B_3 ... über, welche alle von einem gleichen Strom durchflossen sind. Es liegt also hier ein System arbeitsfähiger, elektrischer Massen vor, dessen Arbeitsvermögen mit Bezug auf die Ladung eines bestimmten Leiters gleich der algebraischen Summe der Arbeitsvermögen aller übrigen Ladungen gegenüber dieser Ladung ist. Dabei liefern die Ladungen ungleichen Vorzeichens positive, diejenige gleichen Vorzeichens negative Arbeitsbeiträge.

Mit Bezug auf den Leiter A1 ist daher

(32)
$$V_1 = \frac{Q}{C_{A_1B_1}} + \frac{Q}{C_{A_1B_2}} + \frac{Q}{C_{A_1B_3}} \dots - \frac{Q}{C_{A_1A_2}} - \frac{Q}{C_{A_1A_3}} - \frac{Q}{C_{A_1A_4}} \dots$$

Anderseits folgt aus Gleichung (28)

$$C_{A_1B_1} = \frac{1}{4 \ln \frac{b_1}{r}}$$
; $C_{A_1B_2} = \frac{1}{4 \ln \frac{b_2}{r}}$; $C_{A_1B_3} = \frac{1}{4 \ln \frac{b_3}{r}}$ usw.

$$C_{A_1A_2} = \frac{1}{4 \ln \frac{a_2}{r}}$$
; $C_{A_1A_3} = \frac{1}{4 \ln \frac{a_3}{r}}$; $C_{A_1A_4} = \frac{1}{4 \ln \frac{a_4}{r}}$ usw.

wobei wie früher die Abstände nach den Drähten gleicher Stromrichtung mit a_2 a_3 a_4 ..., diejenigen nach Drähten entgegengesetzter Stromrichtung mit b_1 b_2 b_3 ... bezeichnet werden. Diese Werte in die Gleichung (32) eingeführt, gibt

$$V_1 = \frac{4 Q}{l} \cdot \ln \frac{b_1 b_2 b_3 ... b_n}{r a_2 a_3 ... e_n}$$

Dazu käme noch das Potential der Spiegelbilder (siehe Fig. 21).

$$V_2 = -\frac{4 \, Q}{l} \cdot \ln \cdot \frac{b_1{'} \, b_2{'} \, b_3{'} \dots \, b_n{'}}{a_1{'} \, a_2{'} \, a_3{'} - a_n{'}} \, ;$$

und zwar muss hier das negative Vorzeichen stehen, weil nach Voraussetzung den fiktiven Leitungen entgegengesetzte Ladungen zukommen.

Durch Addition erhält man

(33)
$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C} = \frac{4 Q}{1} \left[\ln \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{r a_2 a_3 \dots a_n} - \ln \frac{b_1' b_2' b_3' \dots b_n'}{a_1' a_2' a_3' \dots a_n'} \right]$$

somit Teilkapazität des Leiters A₁

(34)
$$C_{A_{1}} = 2 C = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\ln \frac{b_{1} b_{2} b_{3} \dots b_{n}}{r a_{2} a_{3} \dots a_{n}} - \ln \frac{b_{1}' b_{2}' b_{3}' \dots b_{n}'}{a_{1}' a_{2}' a_{3}' \dots a_{n}'}} \right]$$

Es muss jedoch gleich bemerkt werden, dass bei Freileitungen das zweite Glied im Nenner stets gegenüber dem ersten vernachlässigt werden kann. Auf km und μ Farad bezogen ist daher

(35)
$$C_{A_1} = \frac{0,024 \, l_k}{\log \frac{b_1 \, b_2 \, b_3 \dots \, b_n}{r \, a_2 \, a_3 \dots \, a_n}} = \frac{0,024 \, l_k}{\log x} = \frac{0,024 \, l_k}{z + \log \frac{a}{r}} \, \mu \, F$$

wobei die Werte von x und z den früheren Tabellen I — III entnommen werden können. Die zuletzt angegebene Fassung kommt dann zur Anwendung, wenn alle Drähte gleichen Abstand haben.

Beispiel. Man bestimme die Kapazität für die in Fig. 21 dargestellte Anordnung (No. 8, Tabelle I).

Für die Leiter
$$A_1$$
 und B_2 ist
$$a_2=2\,a=100\,,$$

$$a'_1=2\,h=1000\,,$$

$$a'_2=\sqrt{4\,h^2+4\,a^2}=2\,\sqrt{500^2+50^2}=1005\,,$$

$$b_1=a=50\,,$$

$$b_2=3\,a=150\,,$$

$$b'_1=\sqrt{4\,h^2+a^2}=\sqrt{4\cdot500^2+50^2}=1000\,,$$

$$b'_2=\sqrt{4\,h^2+9\,a^2}=\sqrt{4\cdot500^2+9\cdot50^2}=1011\,,$$

$$\log\frac{b_1\,b_2\,b_3\,....\,b_n}{r\,a_2\,a_3\,....\,a_n}=\log\frac{50\cdot150}{0,3\cdot100}=2,398\,.$$

also

Zur Kontrolle berechnen wir auch gleich

$$\log \frac{b_1' b_2' \dots b_n}{a_1' a_2' \dots a_n'} = \log \frac{1000 \cdot 1011}{1000 \cdot 1005} = 0,0027.$$

Wie man sieht, kann dieser Faktor ruhig weggelassen werden. Es bleibt also noch

$$CA_1 = CB_2 = \frac{0.024 \cdot 1_k}{2,398} = \text{rund } 0.01 \text{ lk} \quad \mu\text{F} .$$

In ähnlicher Weise erhalten wir für B1 und A2

$$a_2 = 2 a = 100$$
,
 $a'_1 = 2 h = 1000$,
 $a'_2 = \sqrt{4 h^2 + 4 a^2} = 2 \sqrt{500^2 + 50^2} = 1005$,
 $b_1 = a = 50$,

$$b_2 = a = 50$$

 $b'_1 = \sqrt{4 h^2 + a^2} = \sqrt{4 \cdot 500^2 + 50^2} = 1000$
 $b'_2 = b'_1 = 1000$,

und daraus

$$\log \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{r a_2 a_3 \dots a_n} = \log \frac{50 \cdot 50}{0.3 \cdot 100} = 1,921$$
,

ferner

$$\log \frac{b_1' b_2' b_3' \dots b_n'}{a_1' a_2' a_3' \dots a_n'} = \log \cdot \frac{1000 \cdot 1000}{1000 \cdot 1005} = -0,0022$$

kann also wieder vernachlässigt werden. Daraus folgt

$$CA_2 = CB_1 = \frac{0.0241k}{1.921} = 0.01251k \quad \mu F.$$

Bilden die Leiter A_1B_1 und A_2B_2 für sich getrennte Stromkreise, so ist die gesamte Kapazität dieser Schleifen wegen der Hintereinanderschaltung

$$C_{A_1B_1} = C_{A_2B_2} = \frac{1}{\frac{1}{C_{A_1}} + \frac{1}{C_{B_1}}} = \frac{C_{A_1} \cdot C_{B_1}}{C_{A_1} + C_{B_1}} = \frac{0,01 \cdot 0,0125}{0,01 + 0,0125} \cdot 1_k = 0,00556 \, 1_k \quad \mu F.$$

und der Ladestrom

$$J_c = \frac{E \, 2 \pi \, f \, C A_1 \, B_1}{10^6} \; \; \text{Ampère pro km}$$

für beide Schleifen zusammen also zweimal mehr. Würde man die Drähte $A_1\,A_2$ und $B_1\,B_2$ parallel schalten, so ist ihre Kapazität gleich der Summe der Teilkapazitäten. Dabei nehmen die inneren Drähte einen ca. $25\,^0/_0$ grösseren Ladestrom als die äusseren auf, was sich allerdings erst bei sehr grossen Entfernungen und hohen Spannungen bemerkbar macht.

2. Zweiphasenleitungen.

Was weiter oben bezüglich der Selbstinduktion von Zweiphasenleitungen gesagt wurde gilt auch für die Kapazität, d. h. die Rechnung wird genau so durchgeführt, als ob nur eine Phase vorhanden wäre. Es kann also die früher angegebene Formel (35) benutzt werden.

3. Dreiphasenleitungen.

Wir benützen wieder den Kunstgriff einer gemeinsamen fiktiven Rückleitung, deren Abstand R man sich so gross vorzustellen hat, dass er für alle praktisch als gleich gross angesehen werden kann. Es lassen sich somit folgende drei Gleichungen anschreiben:

$$\begin{split} V_{A} &= \frac{4 \, Q}{l} \bigg[ln \frac{R}{r} + ln \frac{R}{a_{2}} + ln \frac{R}{a_{3}} + ln \frac{R}{a_{n}} \bigg] \\ &= \frac{4 \, Q}{l} \cdot ln \frac{R^{n}}{r \, a_{2} \, a_{3} \, \, a_{n}} \; , \\ V_{B} &= \frac{4 \, Q}{l} \cdot ln \frac{R^{n}}{b_{1} \, b_{2} \, b_{3} \, \, b_{n}} \; , \\ V_{C} &= \frac{4 \, Q}{l} \cdot ln \frac{R^{n}}{c_{1} \, c_{2} \, c_{3} \, \, c_{n}} \; , \end{split}$$

worin man sich unter V und Q nach Belieben Augenblicks- oder Effektivwerte vorstellen kann. Da die drei Vektoren um $^{1}/_{3}$ Periode gegeneinander verschoben sind, also nicht ohne weiteres addiert werden dürfen, werden wir sie wie früher in zwei senkrecht aufeinander stehende Komponenten zerlegen. Es ist dann

$$V_{I} = V_{A} + V_{B} \cos 120 + V_{C} \cos 240 = V_{A} - 0.5 V_{B} - 0.5 V_{C}$$

und

$$V_{II} = V_{B} \sin 120 + V_{C} \sin 240 = 0.866 V_{A} - 0.866 V_{C}$$

oder ausgerechnet

$$V_1 = \frac{4 Q}{l} \ln \frac{\sqrt{(b_1 b_2 \dots b_n)(c_1 c_2 \dots c_n)}}{r a_2 a_3 \dots a_n}$$

$$V_{II} = \frac{4 Q}{l} \cdot 0,866 \ln \cdot \left(\frac{c_1 c_2 c_3 c_n}{b_1 b_2 b_3 b_n} \right)$$
,

und schliesslich

(36)
$$V = \frac{Q}{C} = \sqrt{V_1^2 + V_{11}^2}$$

Nachdem aber das zweite Glied unter der Wurzel gegenüber dem ersten vernachlässigt werden darf, so bleibt noch

$$\frac{Q}{C} = \frac{4 Q}{l} \ln \sqrt{\frac{(b_1 \ b_2 \dots b_n) (c_1 \ c_2 \dots c_n)}{r \ a_2 \ a_3 \dots a_n}}$$

Bezieht man ferner die Kapazität auf einen einzelnen Leiter (also pro Phase) und km und drückt dieselbe in μ Farad aus, so wird

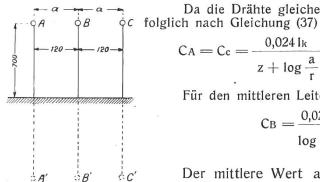
(37)
$$C_{A_1} = \frac{0.024 \, l_k}{\log \frac{1}{(b_1 \, b_2 \dots \, b_n) \, (c_1 \, c_2 \dots \, c_n)}} = \frac{0.024 \, l_k}{\log x} = \frac{0.024 \, l_k}{z + \log \frac{a}{r}} \mu \, F$$

Bezüglich der Faktoren x und z sei auf die Tabellen I — III verwiesen.

Der Ladestrom ergibt sich aus der Beziehung

$$J_c = \frac{E_v}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\pi f C_A}{10^6} \qquad E_v = \text{verkettete Spannung (Spannung im Netz)}.$$

Beispiel. Man berechne den Ladestrom der in Fig. 22 gezeichneten Leitung (Anordnung No. 1, Tab. III) bei f=50 Perioden, $E_V=35\,000$ Volt, r=0,45 cm, $I_k=40$ km. Wir bestimmen zunächst die Kapazität.



 $C_A = C_C = \frac{0,024 \text{ lk}}{z + \log \frac{a}{r}} = \frac{0,024 \cdot 40}{0,15 + \log \frac{120}{0.45}} = 0,3732 \quad \mu \text{ F .*}$

Da die Drähte gleichen Abstand haben, so ist z nach Tab. III = 0,15,

Für den mittleren Leiter B ist z = 0 also

$$CB = \frac{0,024 \cdot 40}{\log \frac{120}{0.45}} = 0,396 \quad \mu F.$$

Der mittlere Wert aller drei Phasen ist 0,38 μ F, folglich ergibt sich ein mittlerer Ladestrom

$$J_c = \frac{E_v}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2 \pi f C}{10^6} = \frac{35000}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2 \pi 50 \cdot 0.38}{10^6} = 2.41 \text{ Amp.}$$

4. Kapazität von Mehrleiterkabeln.

Wir werden uns hier mit einer kurzen Andeutung des Rechnungsganges begnügen. Als einfachsten Fall wählen wir ein Zweileiterkabel (Fig. 23). In dieser Figur stellen A'₁ und B'₁ die fiktiven Leiter vor, deren Einfluss hier ebenfalls zu berücksichtigen ist. Zur Berechnung benützen wir die früher abgeleitete Formel (34)

^{*)} Die vollständige Rechnung mit Berücksichtigung des Gliedes VII in Gleichung (36) sowie der Kapazität gegen die Erde würde 0,3740, also bloss 0,2% mehr ergeben.

$$C_{A_1} = \frac{\varepsilon l}{2} \frac{1}{\ln \frac{b_1}{2} - \ln \frac{b_1'}{a_1'}} = \frac{0.024 \,\varepsilon \, l_k}{\log \frac{b_1 \, a_1'}{r \, b_1'}} \, \mu \, F$$
,

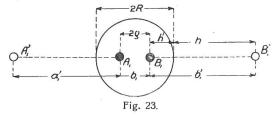
worin wir allerdings noch a'₁ und b'₁ zu bestimmen haben. Nun ist mit Bezug auf Fig. 23

$$h' = R - \rho$$
, ferner nach Gleichung (29)

$$h = R \, \frac{h'}{R - h'} = \frac{R}{\rho} \, (R - \rho) \; , \label{eq:hamiltonian}$$

somit

$$a'_{1} = h + h' = \frac{R^{2} - \rho^{2}}{\rho}$$
, $b' = h + h' + 2 \rho = \frac{R^{2} - \rho^{2}}{\rho}$



und in die obige Gleichung eingesetzt.

(39)
$$C_{A_1} = C_{B_1} = \frac{0,024 \,\varepsilon \,l_k}{\log \left(\frac{2 \,\varrho}{r} \cdot \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 + \varrho^2}\right)} \,\mu \,F.$$

folglich $C_{A_1B_1} = \frac{1}{2} C_{A_1}$ für die ganze Schleife.

Die hier angedeutete Rechnung ist natürlich nur approximativ und setzt voraus, dass ε für die Erde ungefähr den gleichen Wert habe, wie für die Isoliermasse, was nicht vollständig zutrifft.

Dreileiterkabel (Fig. 24). Führt man die Rechnung, wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, vollständig mit Berücksichtigung der fiktiven Leiter durch, so erhält man ausgerechnet

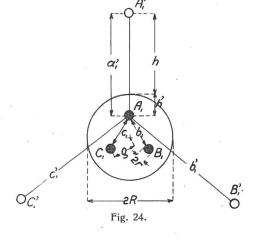
$$C_{A} = C_{B} = C_{C} = \frac{0,024 \ \epsilon \ l_{k}}{\sqrt{\left(\log \frac{a'_{1}}{r} \sqrt{\frac{b_{1} \ c_{1}}{b'_{1} \ c'_{1}}}\right)^{2} + 0,75 \left(\log \frac{c_{1} \ b'_{1}}{c'_{1} \ b_{1}}\right)^{2}}}$$

Nun ist für diesen Fall

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{R^2 - \rho^2}{\rho} \ , \\ b'_1 &= c'_1 = \sqrt{\frac{R^4 + R^2 \rho^2 + \rho^4}{\rho^2}} \\ b_1 &= c_1 \sqrt{3} \cdot \rho \end{aligned}$$

Infolgedessen wird der zweite log unter der Wurzel gleich Null, und es bleibt noch nach einigen Umrechnungen

$$C_{A} = C_{B} = C_{C} = \frac{0.024 \ \epsilon \ l_{k}}{\log \left(\frac{3 \ \rho^{2}}{r^{2}} \frac{(R^{2} - \rho^{2})^{3}}{R^{6} - \rho^{6}}\right)}$$



oder in etwas bequemerer Form, wobei p6 gegenüber R6 vernachlässigt werden kann

(40)
$$C_A = C_B = C_C = \frac{0,024 \ \epsilon \ l_k}{2 \log \sqrt{3} \cdot \frac{\rho}{r} + 3 \log \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)} \ \mu \ F \ \text{pro Phase.}$$

Tabelle I. Einphasenleitungen.
Induktionskoeffizient pro einfache Hin- oder Rückleitung.

 $L = \frac{l_k}{10^4}(0.5 + 4.6 \log x) \text{ Henry/km}, \quad \text{oder für } b = a \quad L = \frac{l_k}{10^4} \left(y + 4.6 \log \frac{a}{r}\right) \text{ Henry/km}.$

Lauf. No.	Anordnung	Werte von x	y	z *)
1	A ₁ B ₁	a r	+ 0,5	0
2	$b = A_1 \qquad A_2$ $B_1 \qquad B_2$	$\frac{b}{ra}\sqrt{a^2+b^2}$	+1,19	+0,15
3	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$\frac{a}{rb}\sqrt{a^2+b^2}$	+1,19	+0,15
4	b € A₁ B₁ B₁	$\frac{ab}{r\sqrt{a^2+b^2}}$	— 0,19	0,15
5	b A ₁ oB ₁ A ₂ oB ₂	Für A_1 und $B_2=rac{a}{rb}\sqrt{a^2+2b^2}$ Für A_2 und $B_1=rac{a^2}{rb}$	+1,59 $+0,5$	+0,24 0
6	B, B ₁	Für A_1 und $B_2=rac{b}{ra}\sqrt{a^2+2b^2}$ Für A_2 und $B_1=rac{b}{r}$	+ 1,59 + 0,5	+ 0,24 0

^{*)} Siehe Kapitel über Kapazität.

	,			
7	h A B E E A 2	Für A_1 und $A_2=rac{ab}{r\sqrt{a^2+2b^2}}$ Für B_1 und $B_2=rac{b}{r}$	− 0,59+ 0,5	0,24 0
8	A, B, A ₂ B ₂	Für A_1 und $B_2=\frac{3}{2}\frac{a}{r}$ $ \text{Für } A_2 \text{ und } B_1=\frac{a}{2r} $	+ 1,31 0,88	+0,18 -0,3
9	A, A ₂ B ₁ B ₂	Für A_1 und $B_2=\frac{6a}{r}$ Für A_2 und $B_1=2\frac{a}{r}$	+4,08 +1,88	+0,78 $+0,3$
10	A ₁ B ₂ B ₁ A ₂	Für A_1 und $A_2=rac{2}{3}rac{a}{r}$ Für B_1 und $B_2=2rac{a}{r}$	- 0,31 + 1,88	-0,18 $+0,3$
11	B ₁ A ₂ B ₂ A ₃ A ₃	$\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{r}$	— 0,31	— 0,18
12	B ₁ A ₂ B ₃ B ₃	Für A_1 , B_1 , A_4 , $B_4 = \frac{3ab}{2r} \sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)(9a^2 + b^2)}}$ Für B_2 , B_3 , A_2 , $A_3 = \frac{ab}{2r} \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)}$	— 0,075 — 0,66	- 0,125 - 0,25
				·

Lauf. No.	Anordnung	Werte von x	у	Z
13	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	Für A_1 , B_1 , A_4 , $B_4 = \frac{b}{6 r a^3} \sqrt{(a^2 + b^2)(4 a^2 + b^2)(9 a^2 + b^2)}$ Für A_2 , B_2 , A_3 , $B_3 = \frac{b}{2 r a^3} (a^2 + b^2) \sqrt{4 a^2 + b^2}$	+ 1,52 + 2,11	+0,22 $+0,35$
14	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	Für A_1 , A_2 , B_3 , $B_4 = \frac{3 a}{2 r b} \sqrt{\frac{(a^2 + b^2) (9 a^2 + b^2)}{4 a^2 + b^2}}$ Für B_1 , B_2 , A_3 , $A_4 = \frac{a}{2 r b} \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{4 a^2 + b^2}}$	+ 2,69 - 1,11	+ 0,48 - 0,35

BULLETIN No. 12 VIII. Jahrgang 1917

360

Tabelle II. Unverkettete Zweiphasenleitungen.

Induktionskoeffizient pro einfache Hin- oder Rückleitung.

$$L = \frac{l_k}{10^4} (0.5 + 4.6 \log x) \text{ Henry/km, oder für } b = a \quad L = \frac{l_k}{10^4} \left(y + 4.6 \log \frac{a}{r} \right) \text{ Henry/km.}$$

Lauf. No.	Anordnung	Werte von x	у	z
1	P C D	a r	+0,5	0 .
2	b A C	<u>b</u> _ r	+0,5	0
3	p A D	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}$	+1,19	+0,15
4	b C C D	<u>b</u>	+0,5	0
5	p C D	<u>a</u> r	+ 0,5	0

Lauf. No.	Anordnung	Werte von x	у.	Z
6	b A a	Für A und B = $\frac{\sqrt{a^2 + 2b^2}}{r}$	+1,59	+0,237
	°C B	Für C und D = $\frac{a}{r}$	+0,5	0
. 7	A B C D	$\frac{a}{r}$	+0,5	0
8	A C B D	$\frac{2a}{r}$	+1,88	0,3
9	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$\frac{ab}{r\sqrt{a^2+b^2}}$	- 0,19	— 0,15
10	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{rb}$	+1,19	+0,15
11	B_1 B_2 C_1 C_2 B_3 B_4 B_5 B_7 B_7 B_8	$\frac{b\sqrt[4]{a^2+b^2}}{ra}$	+1,19	+0,15
12	A B A B	Für A_1 , B_2 , C_1 und $D_2 = \frac{3}{2} \frac{a}{r}$	+1,31	+0,176
	$_{f_{\mathbf{n}}}^{\mathbf{c}}$ $_{\mathbf{c}}^{\mathbf{r}}$ $_{\mathbf{c}}^{\mathbf{r}}$ $_{\mathbf{c}}^{\mathbf{r}}$ $_{\mathbf{c}}^{\mathbf{r}}$	Für A_2 , B_1 , C_2 und $D_1=\frac{a}{2r}$	— 0,89	<u> </u>

BULLETIN No. 12 VIII. Jahrgang 1917

362

Tabelle III. Dreiphasenleitungen.

Induktionskoeffizient einer einzelnen Leitung (Phase).

$$L = \frac{l_k}{10^4} (0.5 + 4.6 \log x),$$
 oder für $b = a$ $L = \frac{l_k}{10^4} (y + 4.6 \log \frac{a}{r})$

Lauf. No.	Anordnung	Werte von x	y	z
1	3 - a -	Für A und $C = \frac{a\sqrt{2}}{r}$	Für A und C = +- 1,19	+0,15
	Å B Č	$F\ddot{u}r B = \frac{a}{r}$	B = +0.5	0
2	B °C	a r	+ 0,5	0
3	A ₁ A ₂	Für A_1 und $A_2 = \frac{a}{r b} \sqrt[4]{a^4 + a^2 b^2 + b^4}$ Für B_1 und $C_2 = \frac{a}{r b} \sqrt{a + b} \cdot \sqrt[4]{a^2 + a b + b^2}$		
	E, °E, c, °C,	Für C_1 und $B_2 = \frac{a}{r b} \sqrt{a - b} \cdot \sqrt[4]{a^2 - a b + b^2}$		
. 4	b Az	Für A_1 , A_2 , C_1 , $C_2 = \frac{b}{r \ a} \sqrt{2 \ c \ d}$	+ 2,34	+0,4
, ,	B ₁ E ₂ C ₂	$F\ddot{u}r B_1 B_2 = \frac{bc}{ra}$	+1,19	+ 0,15

Lauf. No.	Anordnung	Werte von x	у.	Z
5	b A, C ₂	Für A_1 , A_2 , C_1 , $C_2 = \frac{b}{r d} \sqrt{2 a c}$	—, 0,07	— 0,125
	C ₁	$F\ddot{u}r B_1 B_2 = \frac{bc}{ra}$	+1,19	+0,15
	hr A. a	$F\ddot{u}r A_1 C_2 = \frac{b}{r a} \sqrt{2 c d}$	+2,71	+0,48
6	b B. OA2	$F\ddot{u}r \ B_1 B_2 = \frac{b}{r} \sqrt{\frac{c}{a}}$	+1,05	+0,12
	"P.C.*	$F\ddot{u}r \ C_1 A_2 = \frac{b}{r} \sqrt{\frac{2c}{a}}$	+1,74	+0,27
	A 2	Für $A_1 B_2 = \frac{b}{rc} \sqrt{ad}$	+1,07	+0,124
7	B, C,	$F\ddot{u}r B_1 A_2 = \frac{ab}{rc}$	— 0,59	0,237
	°E,	$F\ddot{u}r C_1 C_2 = \frac{ab}{rc} \sqrt{2}$	+0,10	- 0,087
8	A ₁ A ₂		Für $A_1 A_2 C_1 C_2 = +2,29$	+0,39
•	C. C.	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	$B_1 B_2 = +0.21$	— 0,063
9	A_1 C_2 B_1 B_2 C_1 A_2		+0,21	— 0,063

10 -	C ₂ C ₁		+0,21	— 0,063	
*	B. °B.	Für $A_1 C_2 = \frac{a}{r} \cdot \frac{\sqrt{(2a+b)d}}{(a+b)}$	+ .1,18	+0,148	
11	A, C, O Az O Cz	Für $B_1 B_2 = \frac{a}{r(a+b)} \cdot \sqrt{cd}$ Für $A_2 C_1 = \frac{a}{r(a+b)} \cdot \sqrt{bc}$	+0,64 $-0,34$	+0,03 $-0,182$	2
	,	Für $A_1 A_2 = \frac{a}{r(2a+b)} \cdot \sqrt{(a+b)d}$	— 0,03	— 0,115	
12	*B, B ₂ *	$F\ddot{u}r B_1 B_2 \stackrel{\centerdot}{=} \frac{a}{r(a+b)} \cdot \sqrt{cd}$	+ 0,64	+ 0,03	
		Für $C_1 C_2 = \frac{a}{r b} \sqrt{(a+b) c}$	+1,73	+0,27	
13	a A. d.	Für A_1 A_2 C_1 $C_2 = \frac{a}{r b} \sqrt{c d}$	+1,5	+0,22	t
15	C ₁ C ₂ C	$F\ddot{u}r B_1 B_2 = \frac{a d}{r e}$	- 0,19	-0,15	S
	A, C2	Für A_1 A_2 C_1 $C_2 = \frac{a}{rc} \sqrt{bd}$	+ 0,47	- 0,01	
14	• B ₁ B ₂ •	$F\ddot{u}r B_1 B_2 = \frac{a d}{r e}$	- 0,19	. — 0,15	