

**Zeitschrift:** Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

**Herausgeber:** Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

**Band:** 5 (1914)

**Heft:** 5

**Artikel:** Stationäre Zustände und Zustandsänderungen in elektrischen Stromkreisen [Schluss]

**Autor:** Landry, J.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1059664>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

# BULLETIN

# ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich mit den Jahres-Beilagen „Statistik der Starkstromanlagen der Schweiz“ sowie „Jahresheft“ und wird unter Mitwirkung einer vom Vorstand des S. E. V. ernannten Redaktionskommission herausgegeben.

Alle den Inhalt des „Bulletin“ betreffenden Zuschriften sind zu richten an das

Generalsekretariat  
des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins,  
Neumühlequai 12, Zürich 1 - Telephon 9571  
Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition und  
Inserate sind zu richten an den  
Verlag: Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei  
A.-G., Zürich  
Bahnhofstrasse 61, Zürich I (Telephon 6741)

Abonnementspreis  
für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft und Statistik:  
Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 25.—.  
Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 1.50 plus Porto.

V. Jahrgang  
V<sup>e</sup> Année

Bulletin No. 5

Mai 1914

Publié sous la direction d'une Commission de Rédaction  
nommée par le Comité de l'A.S.E.

Ce bulletin paraît mensuellement et comporte comme annexes annuelles la „Statistique des installations électriques à fort courant de la Suisse“, ainsi que l'„Annuaire“.

Prière d'adresser toutes les communications concernant la matière du „Bulletin“ au

Secrétariat général  
de l'Association Suisse des Electriciens  
Neumühlequai 12, Zurich 1 - Téléphone 9571  
Toutes les correspondances concernant les abonnements,  
l'expédition et les annonces, doivent être adressées à l'éditeur:  
Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A.  
Zurich  
Bahnhofstrasse 61, Zurich I (Téléphone 6741)

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de  
l'A.S.E.), y compris l'Annuaire et la Statistique, Fr. 15.—  
pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger.  
L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 1.50, port en plus.

V. Jahrgang  
V<sup>e</sup> Année

Bulletin No. 5

Mai 1914

## Stationäre Zustände und Zustandsänderungen in elektrischen Stromkreisen.

Von Prof. J. Landry, Lausanne.

(Uebersetzung von Ing. E. Payot, Zürich.)

(Schluss.\*)

Diese soeben untersuchten Fälle zeigen, welchen Einflüssen die lokalisierten Stromkreise bei Zustandsänderungen ausgesetzt sein können. Die erhaltenen Resultate ergeben den *allgemeinen Verlauf* der Erscheinungen sowohl beim Oeffnen als beim Schliessen, wobei letzteres als plötzlich angenommen wurde, was offenbar der Wirklichkeit nicht entspricht. Um alle Einzelheiten des Vorganges erkennen zu können, müsste man, besser als es bis jetzt der Fall ist, über die Eigenschaften der Schaltapparate orientiert sein, insbesondere über den Charakter, der sich zwischen den Kontakten der Schalter beim Schliessen und Oeffnen ausbildenden Flammbögen. Es liegt hier Anlass zu interessanten und nützlichen Untersuchungen vor.

Da es ausserhalb des Rahmens dieser Arbeit liegt, im Einzelnen die zur Verhütung der angegebenen Erscheinungen zu verwendenden Mittel zu studieren, wollen wir hier lediglich vom vorangehenden die spezifischen Merkmale der Begleit-Erscheinungen von Zustandsänderungen in lokalisierten Stromkreisen festhalten und ganz besonders die Tatsache, dass die *Ueberspannungen und Ueberströme*, von denen die Rede war, dank der *Lokalisierung* der den Apparaten, aus welchen die Stromkreise bestehen, eigentümlichen Konstanten (Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten) gleichzeitig *die Gesamtheit* oder gewisse bestimmte Zweige dieser Stromkreise beschlagen. Dem entsprechend würde sich eine Ueberspannung, die zum Beispiel einen induktiven Zweig (Generator oder Verbraucherkreis) ergreift, sich *gleichzeitig und gleichmässig* auf der Gesamtheit der Windungen, aus denen

\*) Siehe Februar-Heft, Seiten 33—52; März-Heft, Seiten 77—102; April-Heft Seiten 125—141.

sich dieser Stromkreisteil zusammensetzt ausbreiten und es würde daraus hervorgehen, dass der Ueberspannungsfaktor von *Windung zu Windung* der gleiche wäre, also derjenige der *Gesamtheit*, sodass die genannten Ueberspannungen scheinbar nur in Bezug auf die Isolation gegen die Masse d. h. gegen *Erde*, eine Gefahr bilden würden. So stellte man sich, allerdings seit langem, die Sache vor, sodass alle Schutzanordnungen bis vor relativ kurzer Zeit aus Apparaten bestanden, welche die Erhöhung der Spannung zwischen Leitern, oder Leitern und Erde zu begrenzen, bezeichneten.

Obgleich nun die Umwandlung beliebiger Stromkreise in *lokalisierte Ersatzstromkreise* für die Grössenordnung der totalen Ueberspannungen, denen die elektrische Apparatur ausgesetzt sein kann, Anhaltspunkte gewährt, so besitzt sie doch den schweren Nachteil, uns über den wahren Charakter der Uebertragung des elektrischen Zustandes, die sich ebensowenig, wie diejenige jedes anderen physikalischen Zustandes, plötzlich von einem Punkte des Raumes nach einem andern vollzieht, vollständig im Ungewissen zu lassen.

In der Tat, jede elektrische „Erschütterung“, wie z. B. die durch die Verbindung einer Stromquelle mit den Enden zweier paralleler Leiter, die am andern Ende auf irgend eine Weise geschlossen sind, bewirkte, breite sich allmählich vom Generator nach dem Verbraucher hin aus und wird beim letzteren erst nach einer ganz bestimmten Zeit bemerkbar. Diese Zeit ist im allgemeinen infolge der äusserst grossen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des elektrischen Zustandes sehr kurz, aber ihre Berücksichtigung, d. h. die Einbeziehung des Begriffes „*Abstand*“ (Ort) ist geeignet für viele Erscheinungen (Störungsursachen), die Erklärung zu liefern, wie für das plötzliche Durchschlagen von Windungen induktiver Wicklungen, was die Betrachtung der lokalisierten Ersatzstromkreise aus den oben bereits angegebenen Gründen nicht vermag.

Dies führt uns dazu, auch einiges über die

### Stromkreise mit verteilten Konstanten

zu sagen, sei es mit Rücksicht auf die Resonanzerscheinungen, deren Sitz sie bilden können, sei es allgemeiner mit Rücksicht auf die Art, in welcher sich dort die Zustandsänderungen abspielen.

I. Wir sahen weiter oben, dass die lokalisierten Stromkreise eine Einzel-Periode  $T_0$  der Eigenschwingung (Frequenz  $f_0$ ), deren Wert solange der Widerstand  $R$  des Stromkreises relativ klein ist, nur wenig von  $2\pi\sqrt{CL}$  differiert, und dass der Stromkreis in Resonanz gerät, wenn die Periode einer beliebigen Oberwelle der wirkenden E. M. K. mit  $T_0$  zusammenfällt. Da nun die *Resonanz-Erscheinung* gefährliche Ueberspannungen verursachen kann, ist es wichtig zu wissen, wie sich die Stromkreise mit verteilten Konstanten in dieser Hinsicht verhalten.

Die Bestimmung der *Eigenschwingungs-Periode* eines solchen Netzes kann direkt und ziemlich leicht ausgeführt werden, wenn der Widerstand  $r$  und die Ableitung  $g$  vernachlässigt werden. Die Rechnung führt zur Ermittelung der allgemeinen Lösung der Gleichungen (4) und (5) oder (6) und (7) für die soeben angegebenen Bedingungen. Die Gleichung (6) wird:

$$(142) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = cl \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

Ihre Lösung ist augenscheinlich.

$$(143) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = f_1 \left( x - \frac{1}{\sqrt{cl}} t \right) + f_2 \left( x + \frac{1}{\sqrt{cl}} t \right) \\ \text{und} \quad i = \sqrt{\frac{c}{l}} \left[ f_1 \left( x - \frac{1}{\sqrt{cl}} t \right) - f_2 \left( x + \frac{1}{\sqrt{cl}} t \right) \right] \end{array} \right.$$

In diesen Ausdrücken sind  $f_1$  und  $f_2$  willkürliche Funktionen, die man ziemlich leicht unter Berücksichtigung der Bedingungen des Problems berechnen kann und die, wenig-

stens in den meisten Fällen, in der Form *unharmonischer Reihen* auftreten. Die Rechnungen werden aber etwas weitschweifig und wir ziehen vor, sie zu vermeiden, umso mehr, als es möglich ist, auf kürzerem Wege zum Ziele zu gelangen, das wir uns vorerst gesteckt haben, nämlich die *Vielheit der Resonanz-Perioden* der Stromkreise mit verteilten Konstanten zu zeigen.

Wir werden hiezu die Resultate des der Untersuchung der stationären Zustände gewidmeten Kapitels benutzen und wollen einige einfache Fälle betrachten.

a. — Nehmen wir den Fall der offenen in  $x = L_0$ , durch einen Generator mit vernachlässigbarer Impedanz, der in  $x = 0$ , also am offenen Ende eine Spannung  $v = V\sqrt{2} \sin(\omega t)$  erzeugt gespeisten Leitung, wobei wir also die Abstände vom Verbraucher aus messen.

Da in diesem Falle

$$\beta = 0, \gamma = \omega \sqrt{Ic}, Z_0 = \sqrt{\frac{I}{c}} \text{ und } \delta = 0 \text{ ist,}$$

werden die allgemeinen Lösungen (105) siehe Bulletin No. 3, Seite 96.

$$v = V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \omega \sqrt{Ic} \cdot x - \alpha_1) + V_2 \sqrt{2} \sin(\omega t - \omega \sqrt{Ic} \cdot x - \alpha_2)$$

$$\text{und } i = \sqrt{\frac{c}{I}} [V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \omega \sqrt{Ic} \cdot x - \alpha_1) - V_2 \sqrt{2} \sin(\omega t - \omega \sqrt{Ic} \cdot x - \alpha_2)]$$

Unter Berücksichtigung der speziellen Bedingungen des Problems, d. h. dass  $v = V\sqrt{2} \sin(\omega t)$  und für  $x = 0$  auch  $i = 0$ , erhalten wir für die Bestimmung von  $V_1, V_2, \alpha_1$  und  $\alpha_2$ :

$$V\sqrt{2} \sin(\omega t) = V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_1) + V_2 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_2)$$

$$0 = \sqrt{\frac{c}{I}} [V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_1) - V_2 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_2)]$$

woraus  $V_1 = V_2 = \frac{V}{2}$ ;  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , folglich

(144)

$$v = \frac{V\sqrt{2}}{2} [\sin(\omega t + \omega \sqrt{Ic} \cdot x) + \sin(\omega t - \omega \sqrt{Ic} \cdot x)] = V\sqrt{2} \sin(\omega t) \cos \omega \sqrt{Ic} \cdot x$$

$$\text{und } i = \sqrt{\frac{c}{I}} \frac{V\sqrt{2}}{2} [\sin(\omega t + \omega \sqrt{Ic} \cdot x) - \sin(\omega t - \omega \sqrt{Ic} \cdot x)] = \sqrt{\frac{c}{I}} V\sqrt{2} \cos(\omega t) \sin \omega \sqrt{Ic} \cdot x$$

Diese Resultate zeigen, dass  $v$  und  $i$  als **stehende Wellen** erscheinen. Die Leitung schwingt, elektrisch gesprochen, sodass die Spannung  $v$  zum Beispiel, in allen Punkten der Leitung gleiche Phase besitzt, während ihr Effektivwert oder ihre Amplitude sinoidal längs der Leitung sich ändert. Dies ist auch der Fall für  $i$  aber mit dem Quadrat der Zeit und örtlich in Bezug auf  $v$ . Mit andern Worten weisen die Spannung  $v$  **feste „Knoten“** und die Stromstärke „**feste Bäuche**“ für alle Werte von  $x$  auf (dies wohlverstanden für eine gegebene Frequenz  $f$ ), die der Bedingung genügen:

$$\omega \sqrt{Ic} x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \text{ mit } k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \infty$$

Der erste dieser Spannungs-Knoten oder Strom-Bäuche tritt im Abstand

$$(145) \quad x_0 = \frac{1}{\omega \sqrt{Ic}} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4f \sqrt{Ic}}$$

vom Verbraucher auf und es ist klar, da

$$\frac{V}{V_{L_0}} = \frac{1}{\cos \omega \sqrt{Ic} L_0},$$

ist dass, wenn  $x_0 = L_0$  ist, das Verhältnis  $\frac{V}{V_{L_0}}$  (Verhältnis der Spannung am Ende  $x = 0$  zur

Spannung am Anfang  $x = x_0 = L_0$ ) unendlich gross sein wird. Dies könnte sich für eine verlustfreie Leitung ( $r = g = 0$ ) ereignen, deren Länge gleich dem Viertel der Wellenlänge  $\lambda$  wäre. Eine derartige Erscheinung ist aber, solange man sich auf die Grundwelle der gebräuchlichen Wechselspannungen beschränkt, nicht zu befürchten, da für Freileitungen  $\frac{1}{\sqrt{cI}} = v = 300\,000$  km/sek. beträgt und somit

$$x_0 = \frac{300\,000}{4f} = \frac{75\,000}{f}$$

was für  $f = 50$  1500 km ergibt.

Für einen gegebenen Wert von  $L_0$  kann aber das Verhältnis  $\frac{V}{V_{L_0}}$  unendlich werden für alle Werte von  $\omega$ , welche der Bedingung

$$(146) \quad \omega = \frac{2k+1}{\sqrt{Ic}L_0} \frac{\pi}{2}, \text{ mit } k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \infty \text{ genügen,}$$

oder für alle Frequenzen wie

$$(147) \quad f = \frac{(2k+1)}{4L_0\sqrt{Ic}} = \frac{(2k+1) \cdot 300\,000}{4L_0}$$

und dies erstmalig für

$$f_0 = \frac{75\,000}{L_0}, \text{ dann für } f_1 = \frac{75\,000}{\frac{L_0}{3}} = 3f_0; f_2 = 5f_0, \dots \text{ etc.}$$

Man sieht also, dass eine offene, an einen Generator mit Impedanz null geschlossene Leitung von gegebener Länge und mit vernachlässigbaren Verlusten, für unendlich viele Frequenzen, deren Werte eine unendliche harmonische Reihe bilden, in Resonanz treten kann, während ein lokalisierte Stromkreis nur eine einzige Resonanz-Frequenz besitzt (siehe 136). Anders ausgedrückt, kann eine offene Leitung von der Länge  $L_0$  gleichzeitig in Resonanz mit allen Oberwellen ungerader Ordnung einer komplexen Generatorenspannung deren Grundwelle die oben angegebene Frequenz  $f$  besitzt, treten, während ein mit gleicher totaler Kapazität und gleicher totaler Induktivität behafteter lokalisierte Stromkreis nur für eine einzige, d. h. für die Frequenzwerte  $\frac{2}{\pi}f_0$  in Resonanz geraten würde.

Diese Vielheit der Resonanz-Frequenzen oder der Eigenschwingungs-Perioden der Leitungen bildet den wichtigsten Unterschied zwischen den Stromkreisen mit verteilten Konstanten und den lokalisierten Stromkreisen. Die Leitungen selbst unterscheiden sich nur durch die Größenordnung der kleinsten Frequenz für die Resonanz eintreten kann und dieser erste Frequenzwert ist umso grösser, je kürzer die Leitungen sind.

b. — Nehmen wir nunmehr an, dass die Leitung, die wir immer noch als verlustfrei und von einem Generator mit vernachlässigbarer Impedanz gespeist voraussetzen, an ihrem Ende über einen Kondensator von Kapazität  $C'$  als Verbraucher, geschlossen sei. Die Gleichungen (105) werden dann unter Berücksichtigung, dass für  $x = 0$

$$v = V\sqrt{2} \sin(\omega t) \text{ und } i = \omega C' V\sqrt{2} \cos(\omega t), \text{ für } x = 0,$$

$$V\sqrt{2} \sin(\omega t) = V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_1) + V_2 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_2)$$

$$\text{und } \sqrt{\frac{I}{c}} V \omega C' \sqrt{2} \cos(\omega t) = V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_1) - V_2 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_2)$$

woraus für die Bestimmung von  $V_1$ ,  $V_2$   $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die Bedingungsgleichungen

$$2V_1 \sin(\omega t - \alpha_1) = V \left[ \sin(\omega t) + \sqrt{\frac{I}{c}} \omega C' \cos(\omega t) \right]$$

und  $2V_2 \sin(\omega t - \alpha_2) = V \left[ \sin(\omega t) - \sqrt{\frac{I}{c}} \omega C' \cos(\omega t) \right]$

aus denen wir leicht erhalten:

$$\alpha_2 = \alpha = -\alpha_1 \text{ mit } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{I}{c}} \omega C'$$

und  $V_1 = V_2 = \frac{V}{2} \sqrt{1 + \omega^2 C'^2 \frac{I}{c}} = \frac{V}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{V}{2 \cos \alpha}$

Wir erhalten sodann nach einigen augenscheinlichen Umformungen

(148)

$$v = V\sqrt{2} \sqrt{1 + \omega^2 C'^2 \frac{I}{c}} \sin(\omega t) \cos(\omega \sqrt{Ic} \cdot x + \alpha) = V\sqrt{2} \sin(\omega t) \frac{\cos(\omega \sqrt{Ic} \cdot x + \alpha)}{\cos \alpha} \text{ et}$$

$$i = \sqrt{\frac{c}{I}} V\sqrt{2} \sqrt{1 + \omega^2 C'^2 \frac{I}{c}} \cos(\omega t) \sin(\omega \sqrt{Ic} \cdot x + \alpha) = \sqrt{\frac{c}{I}} V\sqrt{2} \cos(\omega t) \frac{\sin(\omega \sqrt{Ic} \cdot x + \alpha)}{\cos \alpha}$$

und man ersieht, dass  $v$  und  $i$  wiederum als stehende Wellen erscheinen, aber die Strom-Bäuche oder die Spannungs-Knoten sind näher an den Verbraucher gerückt und zwar um einen dem Winkel  $\alpha$  entsprechenden Betrag, d. h. um die Länge

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha}{\omega \sqrt{Ic}}.$$

Die Spannung  $v$  weist Knoten und der Strom  $i$  Bäuche auf für alle Werte von  $x$ , welche der Bedingung

$$\omega \sqrt{Ic} x = -\alpha + (2k + 1) \frac{\pi}{2} \text{ mit } k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \infty$$

genügen.

Man sieht aber insbesondere, dass das Verhältnis  $\frac{V}{V_{L_0}}$ , wobei wir immer mit  $L_0$  die Länge der Leitung bezeichnen, dessen Wert

$$(149) \quad \frac{V}{V_{L_0}} = \frac{1}{\frac{\cos(\omega \sqrt{Ic} L_0 + \alpha)}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\cos \omega \sqrt{Ic} L_0 - \sqrt{\frac{I}{c}} \omega C' \sin \omega \sqrt{Ic} \cdot L_0}$$

für alle Werte von  $\omega$ , welche der transzendenten Gleichung

$$(150) \quad \operatorname{tg} \omega \sqrt{Ic} \cdot L_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{I}{c}} \omega C'} = \frac{1}{\omega \sqrt{Ic} L_0} \cdot \frac{L_0 c}{C'}$$

genügen, unendlich wird.

Diese Gleichung bildet den Ausdruck für die Resonanz-Bedingung zwischen dem impedanzlosen Generator und der Leitung mit dem Kondensator von Kapazität  $C'$  am Ende als Verbraucher.

Es besteht also wie im vorigen Falle *Resonanzmöglichkeit für unendlich viele Frequenzen; die Werte der letzteren sind aber nicht die gleichen wie im zuerst behandelten Fall und sie bilden auch keine harmonische Reihe mehr, wohl aber eine unbestimmte, unharmonische Reihe*, deren Glieder durch Auflösung der Gleichung (150) gewonnen werden können, was wiederum graphisch durch Aufzeichnen der Kurven für

$$\operatorname{tg} \omega \sqrt{Ic} \cdot L_0 \text{ und } \frac{1}{\omega \sqrt{Ic} L_0} \frac{L_0 c}{C'} \text{ in Funktion von } \omega \sqrt{Ic} \cdot L_0$$

und durch Bestimmung deren Schnittpunkte, erfolgen kann. Diese Glieder nähern sich um so rascher denjenigen einer harmonischen Reihe je kleiner das Verhältnis der totalen Kapazität der Linie  $L_0 C$  zum derjenigen des Kondensators  $C'$  ist.

Wenn  $\omega \sqrt{Ic} L_0$  sehr klein ist, d. h. wenn  $L_0$  sehr klein ist, kann man  $\operatorname{tg} \omega \sqrt{Ic} L_0$  durch  $\omega \sqrt{Ic} L_0$  ersetzen und die Resonanzbedingung lässt sich wie folgt anschreiben:

$$\omega^2 Ic L_0^2 = \frac{L_0 C}{C'} \quad \text{oder} \quad \omega^2 L_0 I C' = \omega^2 L C' = 1$$

welche diejenige eines lokalisierten Stromkreises von Induktivität  $L_0 I$  und Kapazität  $C'$  ist.

c. — Wenn wir an Stelle des Kondensators mit Kapazität  $C'$  eine Induktionsspule  $L'$  an das Ende der Leitung schliessen so erkennen wir, nach Durchführung von Rechnungen, die wir hier nicht zu wiederholen brauchen, dass die Kombination von Generator, Leitung und Induktionsspule ebenfalls für eine unendliche Zahl von Frequenzen, deren Werte eine unbestimmte, **unharmonische Reihe** bilden und durch die Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$(151) \quad \operatorname{tg} \omega \sqrt{Ic} L_0 = \frac{1}{\omega \sqrt{Ic} L_0} \frac{L_0 I}{L'}$$

gegeben sind, in Resonanz treten kann.

Es wäre nun leicht, mehr solcher Fälle durch die Aufstellung der Bedingungsgleichungen für Resonanz zwischen einem Generator von beliebiger Induktivität  $L''$ , einer Leitung und verschiedenen Kapazitäten oder Induktivitäten in beliebiger Kombination mit diesen Elementen zu untersuchen. Wir würden so zeigen können, was übrigens bereits aus den behandelten Fällen ersichtlich ist, dass die Perioden der Eigenschwingungen eines belasteten Netzes in gewissem Grade vom Wert und von der Art dieser „Belastung“ abhängen und dass die Eigenschwingung eines Netzes eine komplexe Schwingung ist, die aus unendlich vielen einfachen Schwingungen besteht, wobei jede mit einer Oberwelle in Konsonanz treten kann, wenn sich solche gleicher Frequenz in den im Netze wirkenden E. M. Ken. oder Spannungen befinden. (E. M. Ke. von Generatoren, oscillierenden Lichtbögen etc.)

Setzen wir demgemäß voraus, dass ein Generator in seiner E. M. K. eine Oberwelle  $n$ -ter Ordnung und vom Effektivwert  $E_n$  enthalte, und nehmen wir an, dass die Leitung die spezielle Länge  $L_0$  besitze, gleich der Viertelswellenlänge  $\lambda_n$  der Leitung für diese Oberwelle. Ist die Leitung an ihrem Ende offen, so wird für diese Oberwelle Resonanz eintreten und die Spannung der Oberwelle wird sich am offenen Leitungs-Ende ins Unbestimmte erhöhen. Wenn hingegen die Leitung am Ende beispielsweise über eine Induktionsspule geschlossen ist, so entsteht im allgemeinen für die erwähnte Oberwelle, deren Spannung am Ende der Leitung im Verhältnis

$$\frac{1}{\cos n \omega \sqrt{Ic} L_0 - \frac{n \omega \sqrt{Ic} L'}{I} \sin n \omega \sqrt{Ic} \cdot L_0}$$

(wobei  $\omega$  hier die Pulsation der Grundwelle der E. M. K. des Generators bedeutet) verstärkt auftreten wird, keine Resonanz, und es ist leicht zu erkennen, rechnet man den absoluten Wert dieses Verhältnisses aus, dass, je nach den relativen Werten der Induktivität der Leitung und derjenigen der Spule, für die betrachtete Oberwelle am Leitungsende *Ueberspannung* oder *Unterspannung* vorhanden sein kann.

Im Vorstehenden haben wir stets vorausgesetzt, dass  $r = g = 0$ , d. h. dass die Leitung frei von Energieverlusten sei und haben verschiedene Verbraucher, wie Kondensatoren, Induktionsspulen, grosse unendliche Widerstände (offene Leitung) angeschlossen, also alles Fälle ohne eigentliche Energieübertragung. Wir gelangten so zur Kenntnis der *stehenden Wellen* oder von Leitungen die ähnlich einer Stimmablage vibrieren. Wir wären auf gleiche

Erscheinungen gestossen, hätten wir eine Leitung mit kurzgeschlossenem Leitungs-Ende untersucht, an welchem dann ein Spannungsknoten und Strombauch auftritt. Anderseits zeigt eine eingehende Untersuchung, wie wir dies schon früher erkannten, dass bei Mitberücksichtigung des Widerstandes der Leitung oder bei Verbrauchern mit wirklicher Energieaufnahme  $v$  und  $i$  die Form beweglicher Wellen annehmen, d. h. solcher, deren Knoten und Bäuche sich mit der Geschwindigkeit  $v$  fortbewegen. Man würde dabei aber auch ersehen, dass der Widerstand der Leitung, diesen nicht allzugross vorausgesetzt, keinen wesentlichen Einfluss auf die Werte der Perioden der Eigenschwingungen der Netze ausübt, wie dies schon bei der Einzel-Periode der Eigenschwingung lokalisierter Stromkreise der Fall war. All das in dieser Beziehung erkannte gilt also allgemein. Der Einfluss des Widerstandes  $r$ , sowie derjenige der Ableitung  $g$  äussert sich hauptsächlich durch eine Abschwächung der Resonanz-Uberspannungen, die, obgleich sie in gewissen Fällen beträchtlich sein können, doch stets endliche Werte einhalten.

II. Die stationären Zustände, von denen im vorangehenden Kapitel die Rede war und die Resonanz-Erscheinungen die wir soeben anführten, stellen sich nicht plötzlich ein. Wie im Falle der lokalisierter Stromkreise, sind die Zustandsänderungen (im weitesten Sinne dieses Wortes) durch Ausgleichsspannungen und Ausgleichströme gekennzeichnet. In dem uns gegenwärtig beschäftigenden Falle erscheinen diese Spannungen und Ströme (welche Funktionen des Ortes und der Zeit sind) in der Form komplexer Wellen, die nach einem Exponential-Gesetz allmählich auslaufen, nach vielfacher Reflexion in allen Uebergangspunkten, d. h. überall wo eine Änderung der Charakteristik  $Z$  eintritt, den neuen Beharrungspunkt hinter sich lassend.

Wenn es verhältnismässig leicht fällt, die Gesetze für die Variation von  $v$  und  $i$  bei Zustandsänderung in einem lokalisierter Stromkreis aufzustellen, so ist es ungleich schwieriger, eine exakte Lösung für das Problem der Zustandsänderung in ausgedehnten Stromkreisen zu finden, solange man nach einer genauen Bestimmung der Werte von  $v$  und  $i$  in jedem Moment und in jedem Punkt des Stromkreises trachtet.

Die Gleichungen (4), (5), (6) und (7), die wir als allgemeine Gleichungen der elektrischen Stromkreise bezeichneten, kennzeichnen die Grössen  $v$  und  $i$  in aus parallelen Leitern bestehenden Stromkreisen und in denen die Energie ausschliesslich in der Richtung der Axe dieser Leiter übertragen wird, eine Bedingung, die nur bei den Uebertragungsleitungen angenähert eingehalten wird, nicht aber bei gewickelten Leitern. Anders ausgedrückt, kennzeichnen die genannten Gleichungen die Uebertragung durch ebene Wellen, deren Ströme sich in einer zur Leiteraxe senkrechten Ebene befindet und die sich parallel zu den Leitern verschiebt. Zudem kann bei dieser Art der Vorstellung die Grösse  $r$  kaum die Bedeutung haben, die ihr in den gewöhnlichen Vorstellungsweisen zukommt. Es berücksichtigen denn in der Tat die Gleichungen von Heaviside [(4) und (5)] und die aus ihnen abgeleiteten [(6) und (7)] den Widerstand als Ursache von Energie-Verlust, aber sie verfahren, als ob dieser Energie-Verlust einen Sitz im magnetischen, die Leiter umgebenden Medium hätte, und nicht in den Leitern, und beachten demgemäss die Deformation der Wellen-Ebene in deren unmittelbarer Nähe nicht. Wenn es nun aus den soeben angeführten Gründen nicht möglich ist eine strenge Theorie, welche den Widerstand der Leiter in entsprechender Weise berücksichtigen würde, aufzustellen, so ist es doch möglich, wie dies allgemein geschieht, eine Lösung zu finden, welche den Wert der Energie-Verluste (Dämpfung) beachtet und die, solange diese Verluste verhältnismässig gering sind, genügend genau, und wenn die Verluste null sind, streng richtig ist.

Diese Lösung besitzt die Form

$$v = v' e^{-\beta t}$$

die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = cI \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}$$

ist, also wie schon angegeben

$$v' = f_1 \left( x - \frac{1}{\sqrt{cI}} t \right) + f_2 \left( x + \frac{1}{\sqrt{cI}} t \right)$$

und

$$\beta = \frac{r}{2I} + \frac{g}{2c}$$

Wir werden also für  $v_t$  und  $i_t$ , welche Grössen den freien Zustand kennzeichnen, anschreiben:

$$(152) \quad \begin{aligned} v_t &= e^{-\beta t} \left[ f_1 \left( x - \frac{1}{\sqrt{cI}} t \right) + f_2 \left( x + \frac{1}{\sqrt{cI}} t \right) \right] \\ \text{und} \quad i_t &= e^{-\beta t} \sqrt{\frac{c}{I}} \left[ f_1 \left( x - \frac{1}{\sqrt{cI}} t \right) - f_2 \left( x + \frac{1}{\sqrt{cI}} t \right) \right] \end{aligned}$$

wodurch das Problem, in jedem einzelnen Fall auf die Bestimmung der Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  zurückgeführt wird, welche durch die Berücksichtigung der Anfangsbestimmungen und der Schaltung des Stromkreises ermöglicht ist. Die vollständigen Lösungen des Problems werden dann durch die Gleichungen (108) in denen  $v_2$  und  $i_2$  den neuen Beharrungszustand kennzeichnen, d. h. den Beharrungszustand nach der Zustandsänderung, gegeben sein. Man sieht daher, dass  $v$  und  $i$  (wirkliche Spannung und wirklicher Strom) als Resultat der Superposition des Beharrungszustandes  $v_2$  und  $i_2$  (örtlich gedämpft) und des freien Zustandes  $v_t$  und  $i_t$  sich ergeben, der selbst bezüglich  $v_t$  durch die Summe zweier gedämpften, undeformierbaren komplexen Wellen, die sich in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{Ic}}$$

fortbewegen, und bezüglich den Strom  $i_t$  durch die Differenz der zwei gleichen, im Verhältnis

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{I}{c}}} = \sqrt{\frac{c}{I}}$$

reduzierten Wellen, gekennzeichnet ist.

Diese komplexen Wellen sind von Fall zu Fall verschieden und ihre entsprechenden Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  werden im allgemeinen als unbestimmte Reihen oder als Summen von elementaren Wellen in unharmonischen Reihen, ähnlich derjenigen, die wir weiter oben unter I für verschiedene Spezialfälle hervorgehoben haben, wenigstens was ihre Wellenlängen, Frequenzen etc. betrifft, erscheinen.

Stellen wir uns auf den ausschliesslich technischen Standpunkt, so können wir sagen, dass es ziemlich gleichgültig ist, die entwickelten Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  explicite zu kennen, weil die den Ingenieur interessierenden Tatsachen, welche vor allem die Sicherheit der elektrischen Einrichtungen betreffen, ohne grossen mathematischen Apparat und ohne allzu komplizierte Vorstellungen zu erfordern, deutlich hervorgehoben werden können.

So wie die Wellenbewegungen gewisser physikalischer Erscheinungen, optischer oder akustischer Art, an der Trennungsfläche zweier verschiedener Medien Reflexionen erfahren, sind auch die *elektrischen Wellen*, welche den Leitern, um die es sich hier handelt, entlang laufen in allen **Uebergangspunkten**, d. h. in allen Punkten in denen die Charakteristik  $Z_0$  eine *Wertänderung* erfährt, **partiellen oder totalen Reflexionen** unterworfen. Die Spannungswelle wird *ohne Veränderung der Phase* zurückgeworfen (die zurückgeworfene Welle hat gleiches Vorzeichen wie die eintreffende), wenn sie von einem Leiter mit der Charakteristik  $Z_{01}$  (Kabel) übergeht in einen solchen mit der Charakteristik  $Z_{02} > Z_{01}$  (Freileitung, Apparat mit induktiver Wicklung); es tritt dabei *plötzliche Spannungserhöhung im Uebergangspunkt* auf. Sie wird hingegen *mit einem Phasenwechsel von 180°* oder einer halben Periode, zurückgeworfen, wenn sie von einem Leiter mit der Charakte-

ristik  $Z_{01}$  (Freileitung) auf einen solchen mit der Charakteristik  $Z_{02} < Z_{01}$  (Kabel) übergeht; es tritt dann *im Uebergangspunkt eine plötzliche Spannungs-Verminderung oder ein Spannungssturz ein*. Das entgegengesetzte geschieht bei der Stromwelle, die mit einem Phasenwechsel von  $180^\circ$  (Stromabnahme) zurückgeworfen wird, wenn  $Z_{02} > Z_{01}$  ist, d. h. beim Uebergang in ein „**härteres**“ Mittel und ohne Phasenwechsel (Stromzuwachs) reflektiert wird für  $Z_{02} < Z_{01}$ , d. h. beim Uebergang in ein „**weicheres**“ Mittel. Beim Ueberschreiten des Stosspunktes von zwei Leitern mit gleicher Charakteristik  $Z_{02} = Z_{01}$  hingegen tritt für keine der beiden Wellen Reflexion auf. Was nun die Bedeutung dieser Reflexionen anbetrifft, so hängt diese lediglich von der „Härte“ der Leiter, denen sich die Wellen zuwenden, ab.

a. — Um auf einfache Weise zu zeigen, wie sich ein Beharrungszustand in einem einfachen Stromkreis mit verteilten Konstanten einstellen kann, wollen wir den Fall betrachten, wo eine an ihrem Ende offene Freileitung von Länge  $L$  an ihrem Ausgangspunkt,  $x = 0$ , von einem Generator mit vernachlässigbarer Impedanz gespeist wird, der eine sinusförmige Spannung  $v_0 = V_0 \sqrt{2} \sin(\omega t)$  erzeugt. Um jeden Vorwurf, der gegen die Art unseres weitern Vorgehens erhoben werden könnte, zu vermeiden, wollen wir noch annehmen, dass die Pulsation verhältnismässig hoch sei oder dass die Leitung keine Distorsion besitze ( $r : I = g : c$ ). Wenn wir uns auf das weiter oben hierüber angeführte beziehen (siehe Bulletin Nr. 3, Seiten 84 und 85; siehe auch Figur 21, Seite 99), sehen

wir, dass in beiden Fällen  $Z_0 = \sqrt{\frac{I}{c}}$  und  $\delta = 0$  ist.

Schliessen wir also den Stromkreis des Generators im Moment  $t = 0$  wo auch  $v_0 = 0$ , dem wohl theoretisch nichts entgegensteht, so wird die Leitung durch eine gedämpfte sinoidale Welle unter Spannung kommen, die sich mit der Geschwindigkeit  $v = \frac{1}{\sqrt{Ic}} = 300\,000$  km/sek. fortbewegt. Diese Welle wird am Leitungsende erst nach

Ablauf einer Zeit  $t_1 = \frac{L}{v} = \frac{L}{300\,000}$  Sekunden bemerkbar sein, und es wird also die am Ende  $x = L$  befindliche Verbraucher-Gruppe erst von diesem Zeitpunkt  $t_1$  an einen Einfluss auf den Beharrungszustand, dem das System Generator-Leitung-Verbraucher zustrebt, ausüben können. Im Moment, wo die „Wellenspitze“ in  $x = L$  anlangt, also im Zeitpunkt  $t_1$ , mit den Werten  $v = i = 0$ , besitzt die Generatorenspannung den Wert

$$v_0 = V_0 \sqrt{2} \sin(\omega t_1) = V_0 \sqrt{2} \sin \omega \frac{L}{v} = V_0 \sqrt{2} \sin \gamma L;$$

und die Stromabgabe ist

$$i_0 = V_0 \sqrt{\frac{c}{I}} \sqrt{2} \sin \gamma L$$

und in einem Punkt mit Abscisse  $x$  der Leitung herrscht in diesem Moment  $t_1$  eine Spannung

$$v_x = V_0 \sqrt{2} e^{-\beta x} \sin \gamma (L - x)$$

und eine Stromstärke

$$i_x = V_0 \sqrt{\frac{c}{I}} \sqrt{2} e^{-\beta x} \sin \gamma (L - x)$$

Wenn nun die Leitung, statt am Ende offen zu sein, über einen Verbraucher von Impedanz  $Z_0$  geschlossen wäre, oder wenn, was auf dasselbe herauskommt, sich die als homogen vorausgesetzte Leitung bis ins Unendliche erstrecken würde, so könnte die Welle weiter fortschreiten, ohne in  $x = L$  zurückgeworfen zu werden, wo für alle Zeiten  $> t_1$  gelten würde

$$v_L = V_0 \sqrt{2} e^{-\beta L} \sin \omega (t - t_1)$$

und

$$i_L = V_0 \sqrt{\frac{c}{I}} \sqrt{2} e^{-\beta L} \sin \omega (t - t_1).$$

Sie würde vom Verbraucher vollständig aufgenommen (absorbiert). Da aber die Leitung in  $x = L$  offen ist und demgemäß  $i_L$  stets null bleibt, wird die Welle vom Momente ihrer Ankunft in  $x = L$ , also vom Zeitpunkt  $t_1$  an, vollständig zurückgeworfen. Anders ausgedrückt wird die Spannungswelle vom Moment ihrer Ankunft in  $x = L$  an ohne Phasenwechsel *total reflektiert* und die Spannung, die zweimal grösser ist als jene, die im gleichen Punkt auf der homogenen unendlich langen Leitung oder auf der über einen Verbraucher mit Impedanz  $Z_0$  geschlossenen Leitung von Länge  $L$  auftreten würde, beginnt sinusoidal, entsprechend der Funktion

$$v_L = 2 V_0 \sqrt{2} e^{-\beta L} \sin \omega (t - t_1) = 2 V_0 \sqrt{2} e^{-\beta L} \sin (\omega t - \gamma L)$$

zu variieren, welche Funktion, wie bereits gesagt, für den Punkt  $x = L$  erst vom Moment  $t_1 = \frac{L}{v}$  ab wirkliche Geltung besitzt.

$v_L$  erscheint so als Summe der eintreffenden Welle

$$V_0 \sqrt{2} e^{-\beta L} \sin \omega (t - t_1)$$

die vom Generator aufrecht erhalten wird, und der zurückgeworfenen Welle, dem Werte nach der in  $x = L$  eintreffenden Welle gleich, die sich nach dem Generator hinbegibt, wo sie zur Zeit  $t = 2t_1$  anlangt, um dort eine totale Reflexion mit Phasenwechsel von  $180^\circ$  zu erleiden. Sie kehrt sodann nach dem Leitungsende zurück, wo sie zur Zeit  $t = 3t_1$  eintrifft und wo sie von diesem Moment an, infolge erneuter totaler Reflexion ohne Phasenwechsel, den Wert

$$2 V_0 \sqrt{2} e^{-3\beta L} \sin \omega (t - 3t_1) = 2 V_0 \sqrt{2} e^{-3\beta L} \sin (\omega t - 3\gamma L)$$

annimmt.

Die Spannung  $v_L$ , die vom Momente ihres Erscheinens in  $x = L$ , also vom Moment  $t = t_1$  an gemäß der Funktion

$$v_L = 2 V_0 \sqrt{2} e^{-\beta L} \sin (\omega t - \gamma L)$$

verlief, springt nun plötzlich zur Zeit

$$t = 3t_1 = 3 \frac{L}{v} \text{ über auf den Wert}$$

$$v_L = 2 V_0 \sqrt{2} e^{-\beta L} \sin (\omega t - \gamma L) - 2 V_0 \sqrt{2} e^{-3\beta L} \sin (\omega t - 3\gamma L)$$

sodann zur Zeit  $t = 5t_1$  auf den Wert

$$v_L = 2 V_0 \sqrt{2} e^{-\beta L} \sin (\omega t - \gamma L) - 2 V_0 \sqrt{2} e^{-3\beta L} \sin (\omega t - 3\gamma L) + 2 V_0 \sqrt{2} e^{-5\beta L} \sin (\omega t - 5\gamma L)$$

u. s. w.

Die Spannung  $v_L$  in  $x = L$  strebt demnach dem Beharrungswert

$$(153) \quad v_L = 2 V_0 \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \pm e^{-(2k+1)\beta L} \sin [\omega t - (2k+1)\gamma L]$$

zu, ein Ausdruck in welchem jeder Term erst vom Moment

$$(2k+1)t_1 = (2k+1) \frac{L}{v}, \text{ mit } k = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

wirkliche Geltung besitzt.

Die Gleichung (153) kann auch symbolisch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} V_L &= 2 V_0 [e^{-(\beta + j\gamma)L} - e^{-3(\beta + j\gamma)L} + e^{-5(\beta + j\gamma)L} - e^{-7(\beta + j\gamma)L} + \dots] \\ &= 2 V_0 e^{-(\beta + j\gamma)L} [1 - e^{-2(\beta + j\gamma)L} + e^{-4(\beta + j\gamma)L} - e^{-6(\beta + j\gamma)L} + \dots] \end{aligned}$$

Da der eingeklammerte Teil eine geometrische Progression, deren Quotient  $-e^{-2(\beta+j\gamma)L}$  ist, kann man auch schreiben

$$V_L = V_0 \frac{2 e^{-(\beta + j\gamma)L}}{1 + e^{-2(\beta + j\gamma)L}} = V_0 \frac{1}{e^{-(\beta + j\gamma)L} + e^{(\beta + j\gamma)L}}$$

also

$$V_L = V_0 \frac{1}{\cos h \cdot (\beta + j\gamma)L} = V_0 \sec h \cdot (\beta + j\gamma)L$$

welcher Ausdruck der Formel (94) entspricht, die wir früher im Kapitel über die Beharrungszustände (siehe Bulletin Nr. 3, Seite 92) aufstellten.

Wir haben in Figur 28 den betrachteten Verlauf des sich einstellenden Beharrungszustandes für eine in  $x = 0$  durch einen Generator mit Spannung  $v_0 = 100 \sqrt{2} \sin(2\pi 60t)$ , d. h. mit Effektivwert der Spannung  $V_0 = 0 A_0 = 100$  Volt und 60 Perioden pro Sekunde

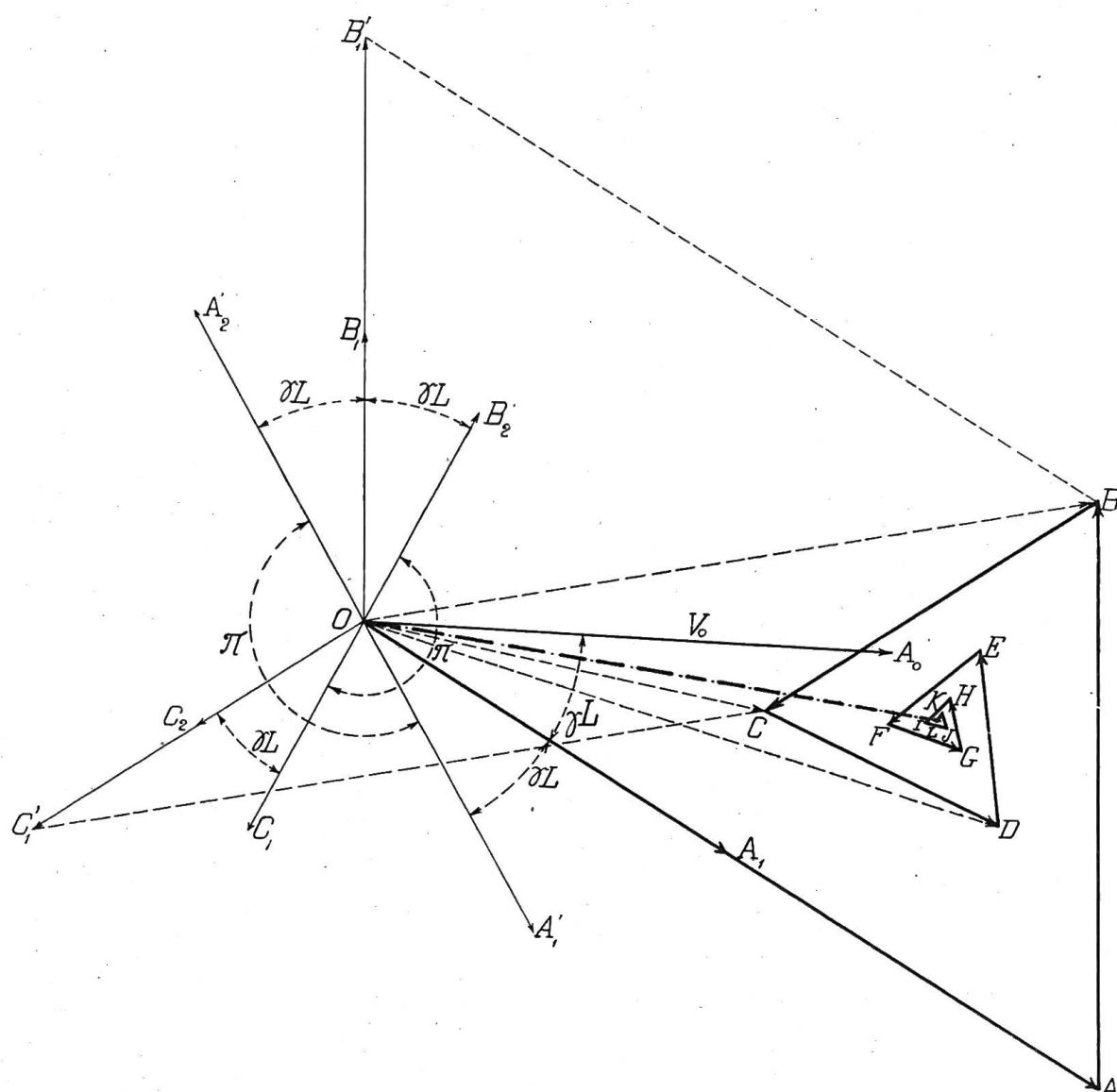


Fig. 28.

Graphische Darstellung des Verlaufes der Spannung am Ende einer offenen Leitung ( $L = 400 \text{ km}$ ;  $\beta = 5 \cdot 10^{-3}$ ;  $\gamma L = 290$ ) von der Schliessung bis zum erreichten Beharrungszustand.

aufgezeichnet. Wir haben  $\beta = 0,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\gamma = \omega \sqrt{Lc} = \frac{2\pi 60}{300000}$ ,  $L = 400$  km und folglich  $\gamma L = 28^\circ 56'$  (die Figur ist für  $\gamma L = 29^\circ$  gezeichnet) angenommen.

Der Vektor  $0A_1 = V_0 e^{-\beta L}$ , um den Winkel  $\gamma L$  hinter  $0A_0$  zurück, stellt den Effektivwert der Spannung bei Ankunft in  $x = L$  zur Zeit  $t_1$  dar;  $0A = 20A_1$  stellt den Effektivwert der Spannung im gleichen Punkt, vom Moment  $t_1$  an (erste Reflexion), bis zur Zeit  $3t_1$  dar;  $0A'_1 = V_0 e^{-3\beta L}$  ist der Effektivwert der Spannung der zurückgeworfenen Welle bei ihrer Ankunft in  $x = 0$  wo sie dann übergeht in  $0A'_2$  (zweite Reflexion).  $0B_1 = V_0 e^{-3\beta L}$  ist der Effektivwert der zurückgeworfenen Welle bei ihrer Rückkehr in  $x = Z$  zur Zeit  $3t_1$ ;  $0B'_1 = 20B_1$  ist der Effektivwert der zurückgeworfenen Welle vom Moment  $3t_1$  an (dritte Reflexion),  $0B$  endlich, der resultierende Vektor von  $0A$  und  $AB = 0B'_1$ , ist der Effektivwert der Spannung die in  $x = L$  im Intervall  $3t_1$  bis  $5t_1$  herrscht, und so weiter. Der Effektivwert der Spannung des Beharrungszustandes in  $x = L$  ist durch den strichpunktuierten Vektor gegeben, als Schlusslinie des Polygons  $0ABCDE\dots$ , das die Wirkung der im Endpunkt aufeinanderfolgenden Reflexionen darstellt. Sein Wert, entweder graphisch oder aus Formel 94 ermittelt, ergibt sich zu 111 Volt. Die Momentanwerte der Spannung in  $x = L$  könnten leicht aus der Figur 28, durch zweckmässige Kombination der Bogen der Sinuslinien, welche durch die Vektoren  $0A_1$   $0B_1$   $0C$  u. s. w. gegeben sind, entwickelt werden. Man würde so, von einer Sinuslinie, sukzessive zur andern übergehend, dabei auf jeder die Zeit  $2t_1$  hindurch verbleibend, auf die schliessende Sinuslinie  $0A$  gelangen, die durch den strichpunktuierten Vektor gegeben ist.

Das gleiche Verfahren können wir zur Bestimmung des in die Leitung in  $x = 0$  gelieferten Stromes  $i_0$  (Ladestrom) anwenden. Man sieht in der Tat, wenn wir uns des am Anfang dieses Abschnittes gesagten erinnern, dass die Strom-Welle mit Anfangswert  $\frac{V_0}{Z_0}$  am Ende  $x = L$  bei gleichzeitigem Phasenwechsel in den Zeitpunkten  $t_1$ ,  $3t_1$ ,  $5t_1$  u. s. w., und dass sie in  $x = 0$  total, aber ohne Phasenwechsel, in den Zeitpunkten  $2t_1$ ,  $4t_1$ ,  $6t_1$  u. s. w. reflektiert wird. Man kann demnach, wie wir das schon für die Spannung ausführten, schreiben:

$$(154) \quad i_0 = -\frac{V_0}{Z_0} \sqrt{2} \sin(\omega t) + 2 \frac{V_0}{Z_0} \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \pm e^{-2k\beta L} \sin(\omega t - 2k\gamma L)$$

in welchem Ausdruck jeder hinter dem Summen-Zeichen stehende Term in  $x = 0$  nur vom Moment  $2kt_1 = 2k\frac{L}{v}$  an wirkliche Geltung besitzt.

Die Formel 154 kann auch symbolisch geschrieben werden;

$$I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \left[ 1 - 2 e^{-2(\beta + j\gamma)L} [1 - e^{-2(\beta + j\gamma)L} + e^{-4(\beta + j\gamma)L} - \dots] \right]$$

d. h. nach einigen Operationen und Umformungen:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \frac{e^{-(\beta + j\gamma)L} - e^{(\beta + j\gamma)L}}{e^{-(\beta + j\gamma)L} + e^{(\beta + j\gamma)L}} = \frac{V_0}{Z_0} \operatorname{tg} h \cdot (\beta + j\gamma)L$$

welches Resultat wir schon auf Seite 92 von Bulletin No. 3 (siehe Formel 93) fanden.

Man könnte natürlich dieses Verfahren auf alle möglichen Fälle ausdehnen, wie: Auftreten des Beharrungszustandes bei kurzgeschlossenem Leitungs-Ende, Auftreten des Beharrungszustandes für die in  $x = L$  über beliebige Verbraucher geschlossene Leitung. Auf diese Art würden wir, wohlverstanden unter Berücksichtigung geeigneter Reflexions-Koeffizienten, alle Formeln erhalten, die wir im Kapitel über stationäre Zustände aufgestellt haben.

Das soeben behandelte Beispiel, das in Bezug auf die Grösse  $\beta$  (Dämpfung), den Fällen der industriellen Praxis entspricht, gibt zu verschiedenen Bemerkungen Anlass.

1. Vor allem sehen wir, dass die Spannung am Ende sich schon bis auf 1% ihrem Beharrungswerte genähert hat, nachdem die Welle ungefähr 12-mal die Distanz von 400 km *hin- und hergewandert* ist, also nach einer Zeit

$$\theta = 12 \cdot 2 \cdot \frac{400}{300000} = 0,032 \text{ Sekunden.}$$

In diesem Zeitraum hat die Spannung des Generators, deren Periode  $\frac{1}{60}$  Sekunde beträgt, *zwei vollständige Schwingungen* vollzogen. Für einen gegebenen Wert von  $\beta$  ist diese Zeit absolut unabhängig von der Länge der Leitung.

2. Da der Generator im Moment wo  $v_0 = 0$  ist, zugeschaltet wird, kann die Spannung am Ende nur dann einen der doppelten Amplitude  $V_0 \sqrt{2}$  benachbarten Wert erreichen, wenn die Dämpfung schwach ist und wenn die Leitung eine Länge besitzt, bei welcher  $\frac{2L}{v} = 2t$ , also nahe bei  $\frac{T}{4}$  liegt, wenn  $T$  die Periode der Spannung des Generators bedeutet.

Die Schliessung des Stromkreises gerade in diesem Zeitpunkt ist aber äusserst unwahrscheinlich; die Wahrscheinlichkeit, dass sie in der Nähe des Maximums der Spannungswelle esde Generators erfolgt, ist viel grösser und es ist leicht einzusehen, dass der am Ende einer offenen Leitung bei unter Spannung setzen zu erwartende Momentanwert der Spannung bei  $2V_0 \sqrt{2}$  herum liegen wird, also beim doppelten Amplituden-Wert der Generatorenspannung; dies wird besonders bei kurzer und wenig gedämpfter Leitung der Fall sein.

3. Im Moment des Schliessens kann der im ersten Zeitraum vom Generator gelieferte Strom, also in der Zeitspanne  $2t_1$ , wenn die Spannung  $V_0$  hoch ist, sehr bedeutend sein und dies auf Grund des relativ geringen Wertes der Charakteristik  $Z_0$  der Leitungen im allgemeinen, insbesondere der Kabel. Da nun der Anfangszustand einer Leitung nur von  $Z_0$  und in keiner Weise von der Zusammenstellung und Art der Verbraucher abhängt, lässt sich der Schluss ziehen, dass die Inbetriebnahme eines Stromkreises mit verteilten Konstanten stets von *Ueberströmen* begleitet ist, die umso grösser sind, je höher die Generator-Spannung, je kleiner die Charakteristik ist, und je näher dem Maximum der Spannungswelle des Generators die Schliessung erfolgt.

4. Es ist leicht zu verstehen, dass wenn  $\gamma L$  den Wert  $\frac{\pi}{2}$  oder ein ungerades, ganzes

Vielfaches dieser Zahl besässe, d. h. wenn für eine bestimmte Frequenz  $L$  gleich

$$\frac{\pi}{2\gamma} = \frac{\pi}{2\pi f \sqrt{Ic} \cdot 2} = \frac{1}{4f \sqrt{Ic}}$$

oder wenn für eine gegebene Länge  $f$  gleich  $\frac{1}{4L \sqrt{Ic}}$  wäre, (oder wenn  $L$  oder  $f$  ungerade, ganze Vielfache dieser Werte wären) alle zurückgeworfenen Wellen bei Rückkehr in  $x = L$  gleiche Phase hätten, wo auch die Spannung sich durch sukzessive Sprünge auf den Wert  $\frac{V_0}{\beta L}$  erheben könnte (siehe Seite 94 des Bulletins No. 3) eine genügend kleine, oder, im Falle vernachlässigbarer Dämpfung, eines sogar jenseits jeder Grenze liegendes  $\beta L$  vorausgesetzt.

5. Man kann sich endlich leicht vorstellen, dass wenn die in  $x = L$  offene Leitung am Ende induktive Apparate enthält (Induktionsspulen) und auf Kapazität darstellenden Teilen endigt (Sammelschienen, Kondensatoren), also auf vorzugsweise schwingenden Systemen, sich ebenfalls an diesem Orte gefährliche Spannungserhöhungen ausbilden können. Es genügt hiezu, dass Uebereinstimmung zwischen der Frequenz der Reflexionen in  $x = L$  und der, von der ersten in  $x = L$  eintreffenden Welle ausgelösten, Eigenschwingung des Systems besteht.

b. Betrachten wir nun den Fall einer homogenen Leitung, deren Speisung unter gleichen Bedingungen wie unter a) erfolgt, die aber über einen Verbraucher mit Impedanz  $Z_1$  ge-

schlossen sei. An ihrem Ende in  $x = L$  wird die Spannungswelle nur zurückgeworfen, wenn  $Z_1$  von  $Z_0$  verschieden ist. Dies wird mit oder ohne Phasenwechsel geschehen, je nachdem  $Z_1 \gtrless Z_0$  und in einer Stärke, die vom Verhältnis  $\frac{Z_1}{Z_0}$  abhängen wird. Wie schon HEAVISIDE gezeigt hat, wird die Spannungswelle bei ihrer Ankunft in  $x = L$ , deren Wert wir mit  $v_1$  bezeichnen wollen, *partiell* zurückgeworfen. Wenn wir mit  $\rho^v$  das Verhältnis der Spannung der zurückgeworfenen Welle zu derjenigen der in  $x = L$  eintreffenden bezeichnen, erhalten wir:

$$(155) \quad \rho^v = \frac{v_1'}{v_1} = \frac{\frac{Z_1}{Z_0} - 1}{\frac{Z_1}{Z_0} + 1} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}$$

also  $\rho^v = +1$  für  $Z_1 = \infty$  (offene Leitung) und  
 $\rho^v = -1$  für  $Z_1 = 0$  (kurzgeschlossene Leitung)

Was nun den Wert der Spannung an den Klemmen des Verbrauchers vom Moment  $t_1$  an betrifft, also den Wert der Spannung der *übertragenen Welle*, so wird dieser offenbar sein:

$$(156) \quad v_2 = v_1 + v_1' = v_1 \left[ 1 + \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \right] = v_1 \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_0}$$

Diese Spannung wird also  $\gtrless$  als  $v_1$  sein je nachdem  $Z_1 \gtrless Z_0$  sein wird.

Der Ueberspannungsfaktor kann also den Wert *zwei* nicht überschreiten. Diese Frage ist aber damit noch nicht erledigt. Würde man, wie wir dies schon früher getan, annehmen, dass der Generator im Moment  $v_0 = 0$  eingeschaltet werde und dass der Verbraucher eine Charakteristik  $Z_1$  die viel grösser als  $Z_0$  ist besitze, d. h. dass der Reflexions-Koeffizient  $\rho^v$  einen Wert nahe 1 habe, würde man zum Schlusse gelangen, dass die übertragene Welle, wenn sie mit ihrer Spitze in den Verbraucher eintritt, in benachbarten Punkten der Wicklung, d. h. zwischen den Windungen, keine wesentlich höhere Spannungen verursachen könnte als diejenigen des eingetretenen Beharrungszustandes. Der Standpunkt wird ein ganz und gar anderer, wenn man bedenkt, dass die Schliessung im Moment wo die Generatorenspannung durch ihr Maximum geht, erfolgen kann und dass infolgedessen die Spannungswelle in  $x = L$  mit einem diesem Maximum nahen Werte eintreffen kann, d. h. mit einer steilen Wellenstirne, deren Wert nahe bei  $V_0 \sqrt{2}$  liegt (kurze Leitungen, schwache Dämpfung). In diesem Falle sind die Eingangsspulen gefährlichen Potentialdifferenzen ausgesetzt, weil sie, erreichte Symmetrie vorausgesetzt, unter Umständen die ganze Spannung des Generators aushalten müssen und sogar noch grössere, wenn die Kontakte der Schalter nicht gleichzeitig schliessen. Wir können das soeben unter a) und b) gesagte nicht besser als durch die Reproduktion von zwei Figuren veranschaulichen, die wir der Abhandlung von K. W. Wagner in der E. T. Z. 1911 No. 36 entnehmen.

Die Figur 29 ist ein Oscillogramm, welches zeigt, wie sich der Zustand einstellt: Konstante Spannung—Stromstärke null, in einer an einem Ende offenen Leitung, die am andern Ende durch eine Gleichstromquelle gespeist wird. Die untere der abgebildeten Kurven stellt die Stromwelle in  $x = 0$  dar mit sehr scharfen Reflexionen in den Zeitpunkten  $2t_1 = 2 \frac{L}{v}$ ,  $4t_1$  u. s. w. Die obere Kurve ist diejenige der Spannung in  $x = L$ , also am

offenen Ende, welches die Welle erst nach Ablauf der Zeit  $t_1 = \frac{L}{v}$  (erste Reflexion) erreicht, mit weiteren nachfolgenden Reflexionen in den Zeitpunkten  $3t_1$ ,  $5t_1$ ,  $7t_1$ , u. s. w.

Die Figur 30 zeigt die momentane Spitze der Spannung zwischen äussersten Punkten eines Teils (1/25) der künstlichen Leitung (Kombination von Widerständen, Induktivitäten und Kondensatoren, die ziemlich getreu eine Leitung mit verteilten Konstanten ersetzt) auf die sich Figur 29 bezieht.

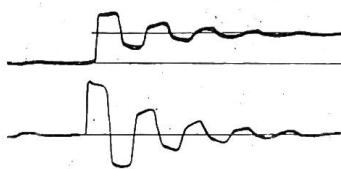


Fig. 29.



Fig. 30.

c) Die bis jetzt untersuchten Fälle betreffen einfache Beispiele, da wir einen impedanzlosen Generator und eine homogene Leitung mit oder ohne Verbraucher am Ende angenommen haben.

Wir können nicht daran denken, alle bemerkenswerten Fälle im Einzelnen zu untersuchen, um so mehr als diese Abhandlung schon allzu umfangreich ausgefallen ist. Die Probleme der Fortpflanzung und Reflexion, von denen wir soeben sprachen, können äusserst vielseitig und kompliziert werden, je nach der Art, nach welcher die Bestandteile eines Stromkreises oder eines Netzes sich zusammensetzen oder disponieren sind. Ganz besonders müssen die Wirkungen der Reflexionen in den Generatoren beim Schliessen eines Schalters erwähnt werden; ebenso die gestaffelten Reflexionen, die in jedem Uebergangspunkt eine Erhöhung der Spannung der ersten *übertragenen Welle* bewirken, welche beim Schliessen eines heterogenen Stromkreises (Kabel-Freileitungen) auftritt und zwar in so hohem Masse, dass diese Spannung Werte annehmen kann, die weit über dem doppelten Werte der Spannung der Quelle liegen können; ferner die Wirkungen der bei plötzlichen Zustandsänderungen (Belastungsschwankungen, Auftreten oder Abreissen eines Kurzschlusses, Erdschlüsse u. s. w.) frei werdenden Wellen; endlich, die Einflüsse äusseren Ursprungs, über deren eigentliche Art man nur wenig weiß.

Wir werden lediglich mit Hinsicht auf das allgemeine Interesse, welches sie bieten, einige ebenfalls den bereits aufgeführten Veröffentlichungen von K. W. Wagner (E. T. Z. 1912, Nr. 51) entnommene Oscillogramme reproduzieren.

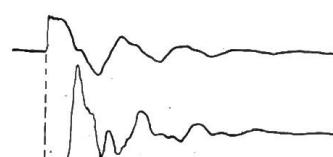
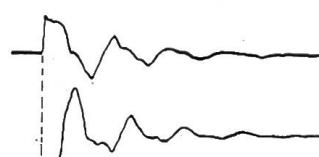
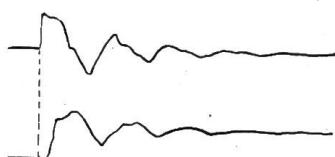


Fig. 31.

Die Figur 31 zeigt Kurven für Spannung und Strom bei Schliessung<sup>7</sup> einer künstlichen, heterogenen, am Ende offenen Leitung an einen Gleichstrom-Generator. Diese Leitung setzt sich aus drei homogenen Teilen zusammen; der erste (Generatorseite), stellt ein Kabel mit der Charakteristik  $Z_{01} = 197,5 \Omega$  dar, der zweite eine Freileitung mit Charakteristik  $Z_{02} = 623 \Omega$  und der dritte einen induktiven Apparate-Stromkreis mit Charakteristik  $Z_{03} = 1975 \Omega$ .

Die drei oberen Kurven stellen die in  $x = 0$  abgegebene Stromstärke dar, die erste (von links) der unteren Kurven gibt die Spannung am Uebergangspunkt von Leitung I auf Leitung II wieder; die zweite, die Spannungskurve am Uebergangspunkt II—III, und die dritte die Spannungskurve am offenen Ende des III. Teilstückes, wo die Spannung, dank der empfindlichen Dämpfung, 3,33 — mal grösser, auftritt, statt 4,62, welches der Wert des Ueberspannungsfaktors bei nicht vorhandener Dämpfung gewesen wäre.

Wir können nicht auch noch — es ist übrigens gar nicht der Zweck dieser Arbeit — die für die Verhütung oder Bekämpfung der Wirkungen von Fortpflanzungs- oder Resonanzerscheinungen, von denen das vorangehende handelte, angelobten Mittel diskutieren.

Die Schalter mit an Hilfskondakten in Serie angeschlossenen Widerständen können zur Verhütung von Ueberspannungen und Ueberströmen bei Stromschluss angewandt werden. Drosselspulen (Reaktanzen), Kondensatoren oder Kombinationen, solcher mit Drosselspulen werden warm empfohlen zur Umwandlung der steilen Wellenstirnen in sanft geneigte und

um auf diese Weise über grosse Potentialdifferenzen zwischen benachbarten Punkten in axialer Richtung, ganz besonders zwischen den Windungen von Generatoren, Transformatoren und sonstigen Verbrauchern, zu verhüten. Dies alles scheint im Prinzip ja ganz richtig, aber es muss doch eingestanden werden, dass uns experimentelle sichere und zuverlässige Anhaltspunkte in quantitativer Hinsicht sowohl, wie auch über die eigentliche Wirkung der so mannigfaltigen und so verschiedenen beurteilten Schutzeinrichtungen, denen man gegenwärtig allenthalben in den elektrischen Anlagen begegnet, fast vollständig fehlen.

Nach unserer Ansicht müssen die immer tiefergehende Erkenntnis und genauere Deutung der Erscheinungen, welche in den elektrischen Stromkreisen ihren Sitz haben, vor allem dazu führen, den Konstrukteuren und Betriebsleuten zu zeigen, welchen Sicherheitsgrad die Bestandteile der Netze aufweisen müssen, welche Sorgfalt beim Entwurf der Anlagen und welche gewissenhafte und ins Einzelne gehende Ueberlegung bei allgemeinen Dispositionen, ja sogar bei scheinbar geringen Einzelheiten anzuwenden ist; denn in der Beobachtung der banalen Wahrheit: *Einfachheit und Stärke*, muss, wenigstens was die Mehrzahl der gefürchteten Wirkungen betrifft, so glauben wir, das beste und vielleicht auch bequemste Schutzmittel für elektrische Anlagen bestehen.

---

### Errata.

#### Bulletin No. 2.

Seite 38, Formel (16) muss heißen:  $v = v_0 \left[ 1 - \frac{x}{L} \right]$

„ 40, in Formel (22):  $i = g(x)$  und nicht:  $i = g(x)$

„ 46, Formel (42) muss heißen:  $\frac{i_L}{i_0} = \frac{1}{\sin h \cdot \beta L \cdot \cotg h \cdot \delta_2 + \cos h \cdot \beta L}$

„ 47, unter Figur 8:  $i = g(x)$  statt:  $i = g(x)$

#### Bulletin No. 3.

Seite 90, 3. Zeile von unten:  $e^{-V_{rg}x}$  statt  $e^{V_{rg}x}$ .

„ 91, Formel (89) muss heißen:  $i = V_0 \sqrt{\frac{c}{I}} \sqrt{2} \sin \omega \left[ t - \frac{x}{v} \right]$

#### Bulletin No. 4.

Seite 131, Zeile 16 von oben, soll heißen: aufgetragen statt aufgeschlagen.