

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 5 (1914)

Heft: 4

Artikel: Stationäre Zustände und Zustandsänderungen in elektrischen Stromkreisen [Fortsetzung]

Autor: Landry, J.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1059660>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich mit den Jahres-Beilagen „Statistik der Starkstromanlagen der Schweiz“ sowie „Jahresheft“ und wird unter Mitwirkung einer vom Vorstand des S. E. V. ernannten Redaktionskommission herausgegeben.

Alle den Inhalt des „Bulletin“ betreffenden Zuschriften sind zu richten an das

Generalsekretariat
des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins,
Neumühlequai 12, Zürich 1 - Telephon 9571
Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition und
Inserate sind zu richten an den
Verlag: Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei
A.-G., Zürich
Bahnhofstrasse 61, Zürich I (Telephon 6741)

Abonnementspreis
für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft und Statistik:
Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 25.—.
Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 1.50 plus Porto.

V. Jahrgang
V^e Année

Publié sous la direction d'une Commission de Rédaction
nommée par le Comité de l'A.S.E.

Ce bulletin paraît mensuellement et comporte comme annexes annuelles la „Statistique des installations électriques à fort courant de la Suisse“, ainsi que l'„Annuaire“.

Prière d'adresser toutes les communications concernant la matière du „Bulletin“ au

Secrétariat général
de l'Association Suisse des Electriciens
Neumühlequai 12, Zurich 1 - Téléphone 9571
Toutes les correspondances concernant les abonnements,
l'expédition et les annonces, doivent être adressées à l'éditeur:
Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A.
Zurich
Bahnhofstrasse 61, Zurich I (Téléphone 6741)

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de
l'A.S.E.), y compris l'Annuaire et la Statistique, Fr. 15.—
pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger.
L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 1.50, port en plus.

April
Avril 1914

Bulletin No. 4

Stationäre Zustände und Zustandsänderungen in elektrischen Stromkreisen.

Von Prof. J. Landry, Lausanne.

(Uebersetzung von Ing. E. Payot.)

Fortsetzung.*

Zustandsänderungen.

In den vorstehenden Kapiteln haben wir, uns jeweils auf das Wichtigste beschränkend, eine Anzahl Tatsachen angeführt welche die *Beharrungszustände* von Stromkreisen kennzeichnen, die konstanten (bei Gleichstrom) oder periodisch veränderlichen elektromotorischen Kräften (bei sinusförmigen Wechselströmen oder solchen beliebiger Form) unterworfen sind. Wenn es sich nun um Gleichströme (v und i von der Zeit unabhängig, aber mit dem Abstande veränderlich) und um Wechselströme in lokalisierten Stromkreisen oder in solchen, die, weil im Verhältnis zu ihrer Wellenlänge kurz, als lokalisiert betrachtet werden konnten (v und i periodisch wechselnd, i vom Abstand unabhängig) handelte, waren diese Beharrungszustände oder *aufgedrückten Zustände* durch *partikuläre Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* ausgedrückt. Für die Wechselströme in ausgedehnten Stromkreisen mit verteilten oder gleichmässig zugeteilten Konstanten (v und i als Funktionen der **Zeit** und des **Ortes** [Abstandes]) waren diese Zustände durch *partikuläre Lösungen von Gleichungen mit partiellen Ableitungen und konstanten Koeffizienten* gegeben. Im letzteren Fall konnten wir die Anwendung der Darstellungsweise durch komplexe Grössen (symbolische Methode) zeigen, wenn *einfache periodische oder sinoidal wechselnde Grössen vorlagen* und für diesen Fall auch die graphische Ermittelung der einen solchen wohlausgeschriebenen Beharrungszustand charakterisierenden Grössen vorführen. Ferner haben wir uns ganz besonders darauf verlegt, den Einfluss der

*) Siehe Februar-Heft, Seiten 33—52; März-Heft, Seiten 77—102.

Konstanten r , g , I und c hervorzuheben, wie auch denjenigen der Frequenz f , der in einer **einfachen Dämpfung** (nur des Wertes, bei Gleichstrom) oder in einer **komplexen Dämpfung** (des Wertes und der Phase, bei Wechselströmen) besteht, welche die Grössen v und i örtlich erfahren.

Ist nun die genaue Kenntnis der Erscheinungen, deren Sitz die elektrischen Stromkreise im Beharrungszustand sein können, von grösster Wichtigkeit, so ist es nicht minder wertvoll zu wissen, nach welcher Art und Weise sich diese Beharrungszustände vom Moment der Schliessung des oder der beteiligten Stromkreise einstellen, wie der elektrische Zustand beim Oeffnen des Stromkreises oder beim Verschwinden der ihn vorher schaffenden E.M.K. ausläuft, wie sich der Uebergang von einem Beharrungszustand in einen andern vollzieht (plötzliche Belastungsschwankungen), welchen Erscheinungen ein Stromkreis durch Aenderungen in einem benachbarten ausgesetzt ist und dergleichen mehr. Es ist, kurz gesagt, äusserst wichtig die Grösse der **Spannungen** und **Ströme**, die bei **Zustandsänderung zwischen** einzelnen Punkten oder *in* einzelnen Teilen eines Stromkreises beim Uebergang von einem Beharrungszustand in einen andern auftreten können, ungeachtet der Ursache dieser Aenderung, zu kennen.

Wir übertreiben nicht wenn wir behaupten, dass wir da eine Welt voll Schwierigkeiten vor uns haben, in welcher noch sehr viel zu erforschen und zu experimentieren ist. Sie ist geradezu gespickt mit den verschiedenartigsten Schwierigkeiten sowohl praktischer (wohl vorzugsweise) als auch theoretischer Art. So besitzen wir bis jetzt nur recht unvollkommene Kenntnisse über die Apparate, mit denen wir Stromkreise öffnen und schliessen, über die Apparate, aus denen die Stromkreise selbst bestehen, über den Grad der Wirksamkeit gewisser Schutzapparate, durch welche wir mehr oder weniger gesetzmässig erwartete Erscheinungen verhüten wollen. Wir wissen nur wenig über die Eigenart der äussern Einflüsse, denen die elektrischen Stromkreise ausgesetzt sind (Grössenordnung und Frequenz der direkten und indirekten atmosphärischen Entladungen). Man könnte noch weit mehr Fälle aufzählen. Zu diesen Schwierigkeiten praktischer oder experimenteller Art gesellen sich noch die theoretischen, besonders die mathematischen; denn, sobald man die vereinfachten Schemata und vereinfachenden Annahmen, deren Gebrauch bei der Untersuchung aufgedrückter oder stationärer Zustände ohne üble Folgen bleibt, aber bei der Untersuchung **freier Zustände** zum mindesten als gewagt erscheint, verlassen will, stösst man auf geradezu unentwirrbare Rechnungen. Auch ist darauf hinzuweisen, dass die Ansätze von denen man ausgeht, so gerechtfertigt sie für gewisse Teile der Stromkreise sein mögen und unter Voraussetzung, dass man seinen Geist von der gewohnten Vorstellungsart befreit, nicht mehr auf Stromkreise von Apparaten angewandt werden können, in denen die Energieübertragung nicht mehr ganz oder grösstenteils längs der Leiteraxe erfolgt. Immerhin muss festgestellt werden, dass in den letzten Jahren immense Fortschritte gemacht worden sind. Während noch vor verhältnismässig kurzer Zeit alle Störungen, denen Leitungen, Maschinen und Apparate unterworfen sein können, **Resonanzerscheinungen** zugeschrieben wurden, ist man sich heute, dank den so bemerkenswerten Arbeiten von *K. W. Wagner* und aller derjenigen, welche seither dem von ihm angegebenen Weg gefolgt sind, bewusst, dass viele der bis jetzt unerklärbaren Wirkungen auf **Fortpflanzungerscheinungen** (Wanderwellen) beruhen, insbesondere auf der an Uebergangspunkten, d. h. Stosspunkten von Stromkreisen oder Leitern mit verschiedenen Konstanten (Charakteristiken) auftretenden **Reflexion von Wellen** mit mehr oder weniger steiler Stirne. Es muss aber auch hier wieder der englische Mathematiker und Physiker *Heaviside* in Erinnerung gebracht werden, dessen Originalarbeiten leider nur wenig bekannt sind, zweifelsohne weil sie sich auf die Uebertragung in der Telephonie beziehen und vielleicht auch weil der ganze hier verwendete mathematische Apparat, um zweckmässig gehandhabt werden zu können, eine besondere Uebung erheischt (Vektor-Analysis). Man findet in seiner „Electromagnetic Theory“, speziell im zweiten Band (Papers 1895—1899) die vollständige Theorie ebener Wellen mit zahlreichen Anwendungen auf Stromkreise, die aus parallelen, an ihren Enden über Generatoren und Verbrauchern der mannigfachsten Art geschlossenen Leitern bestehen. Man findet dort ebenfalls eine vollständige Theorie der Reflexion, zu welcher im Grossen und Ganzen die neuesten Veröffentlichungen nur wenig neues hinzugefügt haben. Sie haben fast lediglich die Anwen-

dung dieser Theorien auf die industriellen Stromarten als neu hinzu gebracht; das Verdienst jener Männer aber, die diesen vergessenen oder zu wenig beachteten Arbeiten wieder aktuellen Wert verschafft haben, ist deshalb nicht minder gross. Insbesondere dasjenige *K. W. Wagners* ist direkt immens; er hat, ebenfalls Telegraphen- und Telephon-Ingenieur, nicht nur die Theorie der Ausgleichsvorgänge in Funktion der Zeit und des Ortes in einer auch für den Ingenieur verständlichen mathematischen Fassung dargelegt (siehe Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln, 1908), sondern auch seither (s. E. T. Z. 1911, No. 36, 37 und 38; E. T. Z. 1912, Nr. 50 und 51; Archiv für Elektrotechnik 1912, Nr. 2) oscillographische Aufnahmen veröffentlicht, die in überzeugendster Weise die Theorien der ausgezeichneten Abhandlung von 1908 illustrieren und bestätigen.

Da es sich hier nun nicht darum handeln kann, auf viele Einzelheiten einzugehen, werden wir der Reihe nach einige typische Fälle, uns auf das Wichtigste beschränkend, anführen. Vorerst wollen wir aber das Folgende wieder in Erinnerung bringen:

Wenn in einem Stromkreis ein durch den Momentanwert v_1 der Spannung zwischen zwei bestimmten Punkten und den im gleichen Moment durch einen entsprechenden Punkt des Kreises fliessenden Strom i_1 gekennzeichneter Beharrungszustand herrscht, so kann bei Änderung der Bedingungen dieses Zustandes der neue Beharrungszustand mit v_2 und i_2 sich nicht im selben Moment einstellen, sondern es tritt stets eine Uebergangs- oder Ausgleichsperiode ein, während welcher ein freier Zustand sich dem neuen Beharrungszustand superponiert. Dieser freie Zustand ist notwendigerweise gedämpft und sein Verlauf hängt hauptsächlich von den Konstanten des Stromkreises ab.

Bezeichnen wir also mit v_t und i_t Spannung und Strom des Ausgleichsvorganges in einem beliebigen Moment, wobei die verursachende Zustandsänderung im Moment $t = 0$ vor sich geht, und mit v und i Spannung und Strom, die im Zeitpunkt t wirklich auftreten, so haben wir

$$(108) \quad \begin{aligned} v &= v_2 + v_t \\ i &= i_2 + i_t \end{aligned}$$

Für den Fall der lokalisierten Stromkreise sind alle diese Grössen v und i Funktionen der einzigen unabhängigen Variablen, der **Zeit** t ; im allgemeinen Fall der ausgedehnten oder mit verteilten Konstanten behafteten Stromkreise sind sie Funktionen der unabhängigen Veränderlichen, der **Zeit** t , und des **Abstandes** x . In beiden Fällen erfahren die Grössen v_t und i_t des Ausgleichsvorganges eine **zeitliche Dämpfung**, d. h. sie laufen aus, und zwar meistens sehr rasch. Anders ausgedrückt, erfolgt der Uebergang vom Beharrungszustand 1 in denjenigen 2 im allgemeinen *in sehr kurzer Zeit*.

Es ist im übrigen selbstverständlich, dass alle die Grössen v , v_1 , v_2 , v_t und i , i_1 , i_2 , i_t den physikalischen Gesetzen, welche durch die Gleichungen (1), (3), (4), (5), (6) und (7), die wir in der Einleitung (siehe Bulletin Seiten 34 und 36) anführten, ausgedrückt sind, gehorchen müssen, sowie den besondern Bedingungen, mit denen der Stromkreis behaftet ist.

Nachdem dies nun festgelegt ist, gehen wir zur Behandlung einiger Beispiele über und beginnen mit solchen, die sich auf

Lokalisierte Stromkreise

beziehen.

I. Es sei gegeben (Fig. 22) ein Generator mit konstanter E. M. K. E und mit vernachlässigbarem inneren Widerstand und ein äusserer Stromkreis mit Widerstand R und konstanter Selbstinduktion L , vollständig isoliert und frei von Kapazität.

Nehmen wir an, dass zur Zeit $t = 0$ der Schalter J geschlossen werde. Der Strom i nimmt nun nicht sofort seinen dem Beharrungszustand entsprechenden Wert $i_2 = \frac{E}{R}$ an,

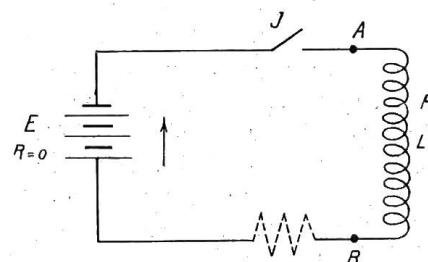


Fig. 22.

da während seines Anwachses von 0 an ($i_t = 0$, vorangehender Beharrungszustand) sich seiner Änderung eine E. M. K. der Selbstinduktion, $-L \frac{di}{dt}$, widersetzt. Das Ohm'sche Gesetz [siehe Formel (1)] ergibt: .

$$(109) \quad E = Ri + L \frac{di}{dt},$$

woraus

$$i = \frac{1}{L} \varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \int E \varepsilon^{\frac{R}{L}t} dt + A \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}.$$

Da nun E konstant ist, folgt sofort unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen, d. h. dass für $t = 0$ auch $i = 0$ ist:

$$A = -\frac{E}{R}$$

und folglich:

$$(110) \quad \left. \begin{aligned} i &= \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \varepsilon^{-\frac{R}{L}t} = I_2 - i_t \\ &\text{als Wert der Stromstärke, und} \\ &v = E = V_2 + 0 \end{aligned} \right\}$$

als Wert der Spannung zwischen den Endpunkten des äussern Stromkreises. In diesem Falle tritt also für v für den Ausgleich kein Glied auf, was dem Umstände zuzuschreiben ist, dass der Generator widerstandslos und eine von der Stromabgabe unabhängige Spannung liefernd vorausgesetzt wurde. Man sieht also, dass der Strom *allmählich* zunimmt und dass er seinen Beharrungszustand erst am Ende einer unendlich langen Zeit erreicht, da das Glied des Ausgleichzustandes erst für $t = \infty$ zu null wird. Anderseits sieht man, dass in einem beliebigen Moment t die Stromstärke i von ihrem Beharrungswerte i_2 um einen um so kleinern Betrag differiert, je grösser der Quotient $\frac{R}{L}$ oder je kleiner der Quotient $\frac{L}{R}$ ist. So wird die Zeit θ , nach Ablauf welcher i nur weniger als 1 % von i_2 verschieden ist, gegeben durch:

$$\varepsilon^{-\frac{R}{L}\theta} = \frac{1}{100}, \text{ woraus}$$

$$(111) \quad \theta = \frac{L}{R} 2,302 \log_{10}(100) = 4,604 \frac{L}{R}.$$

Diese Zeitdauer ist demnach um so kleiner, je kleiner $\frac{L}{R}$ ist. Die Grösse $\frac{L}{R}$ entspricht einer Zeit und trägt den Namen **Zeitkonstante**. Es ist die Zeit, nach Ablauf welcher

$$i = I_2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) = I_2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 0,63 \frac{E}{R} \text{ ist.}$$

In Fig. 23 haben wir i , i_2 und i_t für einen Stromkreis mit Widerstand $R = 50\Omega$ und mit der Selbstinduktion $L = 25$ Henry, an eine E. M. K. von $E = 100$ Volt geschlossen, dargestellt. Die Zeitkonstante dieses stark induktiven Stromkreises beträgt 0,5 Sekunden, und der Ausdruck für den Strom wird:

$$i = 2 [1 - \varepsilon^{-2t}].$$

Die Zeit, die verstreichen muss, bis der Strom nur mehr um 1 % von i_2 differiert, ist $\theta = 2,3$ Sekunden.

Es handelt sich hier, wohlverstanden, um einen stark induktiven Stromkreis, wie er etwa durch die Erregerwicklung eines kleinen Gleichstrom-Nebenschluss-Motors gegeben ist. In einem aus Glühlampen-Gruppen gebildeten Stromkreis stellt sich der endgültige Strom dank des geringen Wertes von L in einer viel kürzeren, fast unermesslich kurzen Zeit ein.

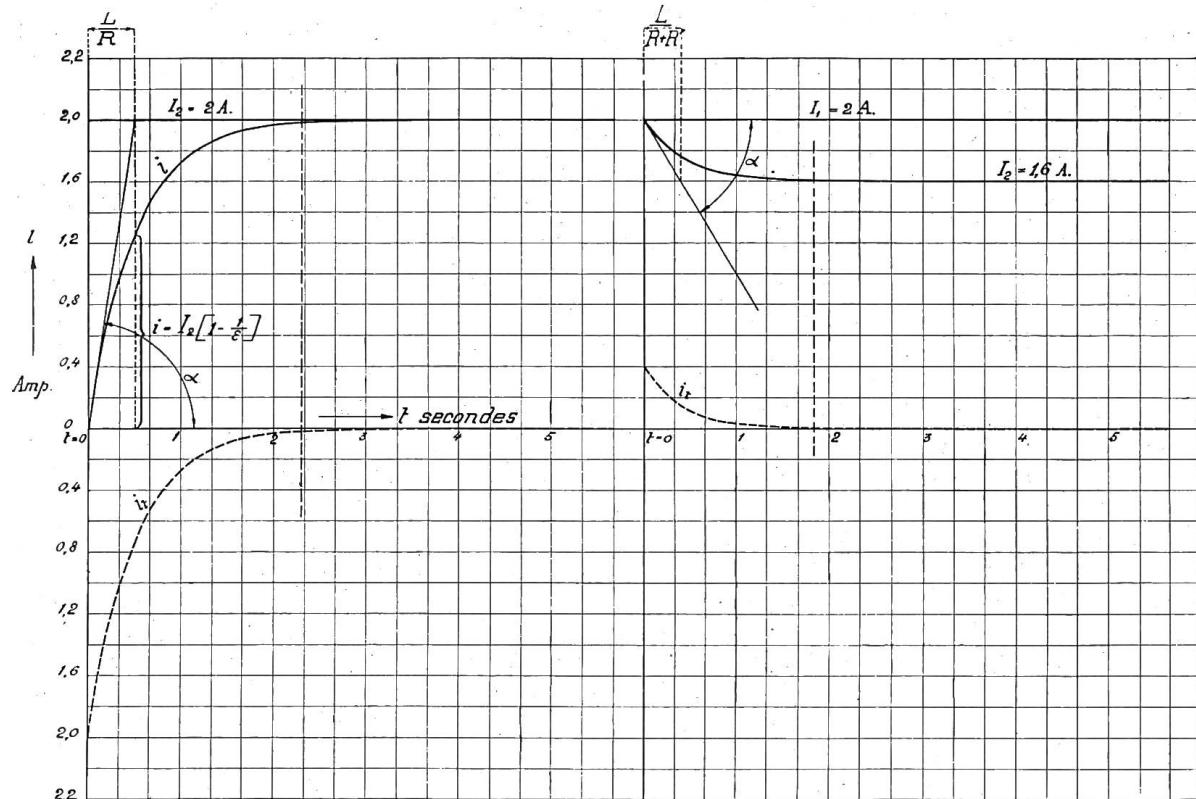


Fig. 23.

So wird z. B. in einem Verteilungszweig von 50 m Länge, an dessen Ende 4 Lampen in Parallelschaltung geschlossen sind, und dessen Selbstinduktion auf 0,00005 Henry geschätzt werden dürfte, der Strom i den Wert $0,99 i_2$ bereits nach Ablauf der Zeit $\theta = 4,6 \cdot 10^{-6}$ Sekunden erreichen.

Es muss hier noch besonders bemerkt werden, dass, solange der Zustand i_2 nicht eingetreten ist, die durch den Generator gelieferte Energie nicht vollständig in Wärme umgesetzt wird. Nach Ablauf der Zeit t hat der Generator die Energie (Arbeit)

$$W_g = \int_0^t E i dt = \frac{E^2}{R} \left[t + \frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{L}{R} \right]$$

geliefert, während die der entwickelten Wärmemenge entsprechende Energie

$$W_i = \int_0^t R i^2 dt = \frac{E^2}{R} \left[t + \frac{2L}{R} e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{L}{2R} e^{-\frac{2R}{L} t} - \frac{L}{R} (2 - 1/2) \right]$$

beträgt. Ist die Zeit t genügend gross, um eine Vernachlässigung der Exponentialglieder zu erlauben, d. h. zur Zeit, wo der Zustand i_2 als praktisch erreicht betrachtet werden darf, wird:

$$W_g = \frac{E^2}{R} \left[t - \frac{L}{R} \right]; \quad W_i = \frac{E^2}{R} \left[t - \frac{3}{2} \frac{L}{R} \right]$$

und die Differenz

$$(112) \quad W_m = W_g - W_i = \frac{1}{2} \frac{E^2}{R} \frac{L}{R} = \frac{1}{2} L I_2^2$$

stellt nun die im Felde des Stromkreises aufgespeicherte magnetische Energie dar.

II. Stellen wir uns vor, dass der Zustand i_2 eingetreten sei und dass wir nun, wiederum zur Zeit $t = 0$, einen rein Ohm'schen Widerstand R' in den Stromkreis plötzlich einfügen. Der Strom geht dann vom Werte i_2 , nunmehr dem vorangehenden Beharrungszustand entsprechend, in den neuen

$$i_2' = \frac{E}{R + R'}$$

über, und zwar allmählich, dem Gesetze

$$(113) \quad E = (R + R') i + L \frac{di}{dt}$$

folgend, mit der Bedingung, dass für $t = 0$

$$i = \frac{E}{R} = I_2$$

ist. Wir erhalten demnach als Momentanwert für den Strom

$$(114) \quad i = \frac{E}{R + R'} + \left[\frac{E}{R} - \frac{E}{R + R'} \right] e^{-\frac{R + R'}{L} t} = I_2' + (I_2 - I_2') e^{-\frac{R + R'}{L} t} = I_2' + i_t'.$$

Der neue Beharrungszustand wird also erst nach unendlich langer Zeit erreicht. Es nähert sich i aber um so rascher dem Werte i_2' , je kleiner die neue Zeitkonstante $\frac{L}{R + R'}$ ist und jedenfalls rascher, als dies beim Stromkreis mit dem Widerstand R der Fall war. Ferner ist bezüglich der Potentialdifferenz v zwischen den Enden des ersten Stromkreises (AB , Fig. 22) zu erwähnen, dass sich infolge der Abnahme von i und der dieser Aenderung entgegenwirkenden E. M. K. der Selbstinduktion der Stromkreis AB wie ein Generator mit der Eigen-E. M. K. $-L \frac{di}{dt}$ verhält, und dass im ersten Moment die Potentialdifferenz plötzlich vom Werte $E = RI_2$ auf den Wert

$$v = E + \left(-L \frac{di}{dt} \right)_{t=0} = E + (R + R') (I_2 - I_2')$$

steigen wird.

Die plötzliche Einführung eines rein Ohm'schen Widerstandes R' verursacht demnach eine **Ueberspannung** von der Grösse

$$(R + R') (I_2 - I_2') = (R + R') \frac{E}{R + R'} \frac{R'}{R} = E \frac{R'}{R}$$

und von sehr kurzer Dauer. Diese Ueberspannung wird um so grösser, je grösser R' ist; sie würde also unendlich gross bei plötzlichem Oeffnen des Stromkreises. In Wirklichkeit würde aber der in diesem Moment entstehende Lichtbogen den Stromkreis noch für eine, obschon kurze, aber doch messbare Zeit geschlossen halten, und die Ueberspannung könnte, obwohl endlicher Grösse, doch recht beträchtlich werden und den Durchbruch der Isolation zur Folge haben. Es sollte also als Regel gelten, niemals einen elektro-magnetischen Stromkreis zu öffnen, ohne demselben vorher einen Widerstand oder einen Kondensator von genügender Kapazität parallel geschaltet zu haben. Wenn es sich z. B. um einen Nebenschlussmotor handelt, so ist es ratsam, den Stromkreis in der dem Anker und Felde gemeinsamen Zuführung zu öffnen.

Endlich erwähnen wir noch, dass vom Zeitpunkte $t = 0$, wo der zusätzliche Widerstand R' eingefügt wird, bis zum Moment, wo der neue Beharrungszustand i_2 als erreicht betrachtet werden kann, die vom Generator gelieferte Energie ausgedrückt wird durch:

$$W_g = \int_0^t E i \, dt = E \int_0^t \left[I_2' + (I_2 - I_2') e^{-\frac{R+R'}{L} t} \right] dt,$$

während die im Stromkreis erzeugte Wärmemenge (Joule'scher Effekt) durch:

$$W_i = (R + R') \int_0^t i^2 \, dt = (R + R') \int_0^t \left[I_2' + (I_2 - I_2') e^{-\frac{R+R'}{L} t} \right]^2 dt$$

gegeben ist.

Man sieht nun nach einigen ohne Schwierigkeiten durchzuführenden Rechnungen leicht, dass $W_i > W_g$ und dass die Differenz $W_i - W_g = \frac{1}{2} L [I_2^2 - I_2'^2] = W_m$ die beim Uebergang des Stromes vom Werte i_2 auf den Wert i_2' durch das Feld wieder zurückgegebene Energie darstellt.

Würde zur Zeit $t = 0$ der Generator aus dem Stromkreis entfernt und, jedoch ohne Unterbrechung, durch den Widerstand R' ersetzt, so wäre der Strom vom Werte i_2 auf den Wert 0 gesunken, und zwar gemäss dem Gesetze

$$i = I_2 e^{-\frac{R+R'}{L} t} = 0 + i_t'$$

und die im Felde aufgespeicherte Energie W_m wäre durch den Joule-Effekt des Ausgleichstromes i_t' vollständig im Widerstand $R + R'$ in Wärme umgesetzt worden. Wir haben in Figur 23 die Stromstärken i , i_2 und i_t' in Funktion der Zeit für $R = 50 \Omega$ und $R' = 12,5 \Omega$ aufgeschlagen. Der Ausdruck für den Strom ist somit

$$i = 1,6 + 0,4 e^{-2,5t}$$

und die anfängliche **Ueberspannung** ihrerseits beträgt $E \frac{R'}{R} = 25 V$.

Die von uns soeben skizzierten Erscheinungen spielen in vielen Problemen eine grosse Rolle, besonders in solchen, die sich auf die Geschwindigkeits- und Spannungs-Regulierung der elektrischen Maschinen beziehen. Erinnern wir insbesondere an den Tirrill-Regler, der, indem er stets überreguliert, in den Erregerkreisen einen veränderlichen Zustand unterhält, so dass seine Wirkung eine viel raschere ist als diejenige von Stufen-Reglern.

III. Wir betrachten nun den gleichen Stromkreis mit Widerstand R und *konstanter* Selbstinduktion L , lassen aber an Stelle der konstanten E. M. K. E eine Wechsel-E. M. K. $e = f(t)$ wirken, von der wir voraussetzen, dass sie eine von der Stromabgabe i unabhängige Spannung abzugeben vermag. Sie sei $v = V\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha)$, wobei α als Phasenwinkel beliebig, beispielsweise so gewählt werden kann, dass der Moment des Stromschlusses mit dem Ursprung, von dem aus die Phase von v gezählt wird, zusammenfällt.

Schliessen wir den Stromkreis zur Zeit $t = 0$, d. h. im Zeitpunkt, wo die Spannung an den Klemmen des Generators den Wert

$$v_{t=0} = V\sqrt{2} \sin \alpha$$

besitzt. Der vom Schliessungsmoment an entstehende Strom ist durch die allgemeine Lösung der Gleichung (1) gegeben, die in diesem Falle übergeht in

$$(115) \quad L \frac{di}{dt} + R i = V\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha).$$

Wir erhalten also:

$$i = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L} t} \int V\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha) e^{\frac{R}{L} t} dt + A e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Durch teilweise Integration und unter Berücksichtigung, dass für $t = 0$ auch $i = 0$ ist, findet man nach einigen Rechnungen:

$$A = -\frac{V\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\alpha - \varphi), \text{ woraus}$$

$$(116) \quad i = \frac{V\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) + \frac{V\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-\frac{R}{L}t} \sin(\varphi - \alpha) = i_2 + i_t.$$

Der erste Ausdruck des zweiten Gliedes stellt die Stromstärke des neuen Beharrungszustandes mit

$$I_2 = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$$

dar, während der zweite Ausdruck einem *Ausgleichstrom* entspricht, der als *gedämpfter Gleichstrom* erscheint, und dessen Wert zur Zeit $t = 0$, d. h. zur Zeit des Stromschlusses, höchstens gleich der Amplitude des Stromes $I_2\sqrt{2}$ des Beharrungszustandes ist. Damit der Ausgleichstrom diesen Anfangswert erreichen kann, muss der Stromschluss im Momente,

wo die Spannung den Wert $\pm V\sqrt{2} \sin \alpha$ mit $\alpha = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$ besitzt (siehe Fig. 24), d. h. im

Momente, wo der Strom des Beharrungszustandes durch seinen Maximalwert $I_2\sqrt{2}$ gehen würde.

Man sieht also, dass die Entstehung eines Wechselstromes in einem induktiven, aber mit konstanter Selbstinduktion behafteten Stromkreise (in einem Medium konstanter Permeabilität gelegen) wie folgt gekennzeichnet ist:

1. Der Strom i kann als das Resultat der Superposition des Stromes i_2 des *Beharrungszustandes* (der ein *sinoidaler Wechselstrom* ist) und eines *Ausgleichstromes* (der ein *gedämpfter Gleichstrom* ist) betrachtet werden.

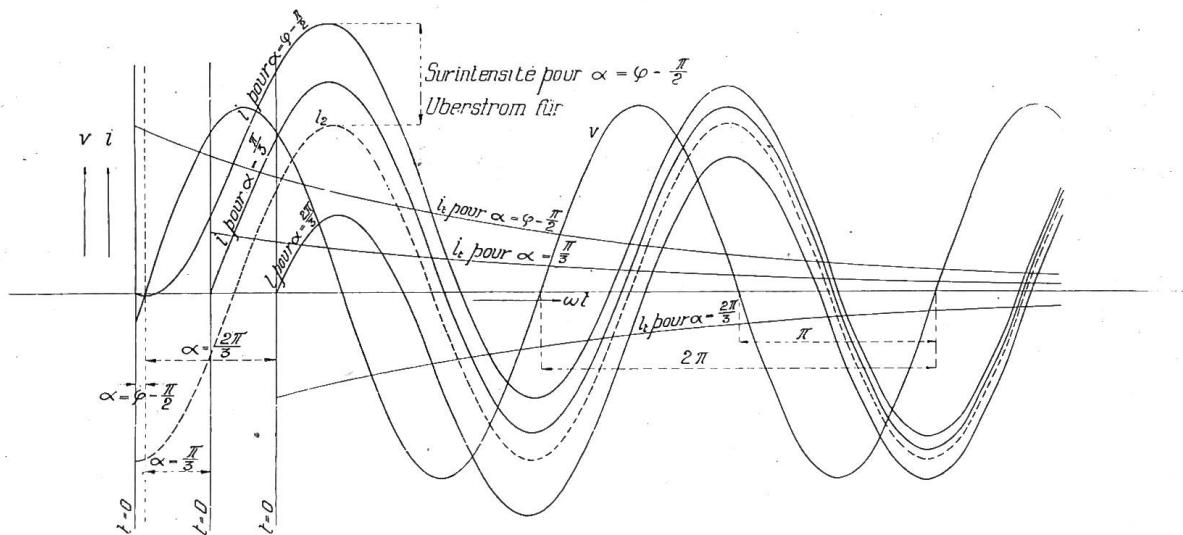


Fig. 24.

2. Die Anfangsrichtung und der Anfangswert des *Ausgleichstromes* variieren mit dem Zeitpunkt der Schliessung des Stromkreises, d. h. mit der Phase, welche die Spannung in diesem Momente besitzt. Aus der Figur 24, in welcher wir für verschiedene Werte von α mehrere i -Kurven eingetragen haben, ersieht man, dass dieser Strom für zwischen $\varphi - \pi$ und φ liegende Werte von α positiv und für solche zwischen φ und $\varphi + \pi$ negativ ist.

3. Wenn der Stromschluss so erfolgt, dass $\alpha = \varphi$ oder allgemeiner $\alpha = \varphi + k\pi$, d. h. im Momente, wo i_2 null wäre, so verschwindet der Ausgleichstrom und der Strom i geht unmittelbar auf den Wert i_2 des Beharrungszustandes über.

4. Der Ausgleichstrom läuft um so rascher aus, je kleiner die Zeitkonstante $\frac{L}{R}$ des Stromkreises ist, und die Dämpfung ist von der Frequenz unabhängig. Die Wirkung des Ausgleichstromes erstreckt sich über um so mehr Perioden, je grösser die Frequenz und die Zeitkonstante selbst sind.

5. Der während des Ausgleichsvorganges auftretende Strom ist am Anfang desselben immer grösser als der Strom des Zustandes i_2 . Wenn der Stromkreis keinen Widerstand besitzt, d. h. wenn er rein induktiv ist, und wenn der Stromschluss im Momente, wo die Spannung null ist, erfolgt, also im Momente, wo der Strom des Zustandes den Wert $\frac{V\sqrt{2}}{\omega L}$ hätte, so entsteht ein pulsierender Strom mit der Amplitude $\frac{2V\sqrt{2}}{\omega L}$.

Wir sehen also aus dem Umstehenden, dass unter ungünstigen Verhältnissen, d. h. bei Stromschluss im Momente, wo die Spannung durch den Wert $V\sqrt{2} \sin\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right)$ geht, und bei schwacher Dämpfung die Stromstärke beim Ausgleichsvorgang bis auf den **doppelten** Wert der Stromstärke des Beharrungszustandes steigen kann.

Der Ausgleichsvorgang für Wechselstrom in einem Stromkreis mit konstanter Selbstinduktion ist also durch einen Ueberstrom, der höchstens gleich dem Strom des entsprechenden Beharrungszustandes wird, gekennzeichnet.

Die Figur 24 veranschaulicht das soeben Gesagte. Sie bezieht sich auf einen Stromkreis mit $R = 1,732 \Omega$, $L = 0,035$ Henry, $f = 50$ Perioden pro Sekunde und $V = 100$ Volt.

IV. Wenn sich nun der Zustand i_2 eingestellt hat, so verursacht die plötzliche Öffnung des Stromkreises oder jede andere Zustandsänderung das Auftreten von gedämpften Spannungen und Strömen, deren Grösse hauptsächlich vom Momente der Öffnung, d. h. von der Phase von v und i in diesem Zeitpunkte, abhängen. Die magnetische Feld-Energie $\frac{1}{2} Li^2$ des Stromkreises lässt eine Selbstinduktionsspannung frei werden, die beträchtlich, sogar gefährlich werden kann. Obschon die Schalter den Stromkreis im Momente wo i gleich null wird unterbrechen, darf nicht übersehen werden, dass ihre Wirkungsweise vom Beginne des Ausschaltens an eine Beschleunigung der Stromänderung zur Folge hat (Verkürzung der unterbrochenen Welle) und somit die Erzeugung einer Ueberspannung oder *Spannungsspitze* stattfindet.

V. Die unter III besprochenen Ueberströme charakterisieren Stromkreise mit konstanter Selbstinduktion, d. h. Stromkreise, die in Medien konstanter magnetischer Permeabilität liegen (konstantes Verhältnis zwischen induziertem Feld oder umfasstem Flux und magnetisierender Kraft oder Strom). Die Mehrzahl der lokalisierten induktiven Stromkreise umschließen Eisenkerne, deren Permeabilität vorzugsweise veränderlich ist, und welche die Eigenschaft besitzen, nach Verschwinden des Magnetisierungs-Stromes magnetisch zu bleiben (remanenter Magnetismus). Es ist daher leicht einzusehen, dass unter solchen Umständen die Ueberströme viel grösser sein können, als wie oben angegeben. Betrachten wir beispielsweise einen Transformator mit n_1 primären Windungen, dessen Sekundärseite offen ist. Vernachlässigen wir die stets geringe Streuung sowie den Widerstand des primären Stromkreises, so wird die Gleichung für diesen Fall

$$(117) \quad L \frac{di}{dt} = V\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha)$$

Wir müssen aber hier genau vor Augen halten, dass i nicht direkt berechnet werden kann, sondern dass wir dazu vorerst die Magnetisierungskurve für das Material, aus dem der Transformerkern gebaut ist, benötigen. Wir schreiben deshalb die Gleichung in der Form

$$(118) \quad n_1 \frac{d\Phi}{dt} 10^{-8} = V\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha),$$

in welcher der magnetische Flux im Eisenkern erscheint, für welchen wir erhalten:

$$\Phi = \frac{10^8}{n_1} \int V \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha) dt + A = \frac{10^8 V \sqrt{2}}{n_1 \omega} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + A$$

Wenn wir berücksichtigen, dass zur Zeit $t = 0$ der Flux $\Phi = 0$ ist (und wenn vom remanenten Magnetismus abgesehen wird), erhalten wir

$$A = \frac{10^8 V \sqrt{2}}{n_1 \omega} \sin\left(-\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

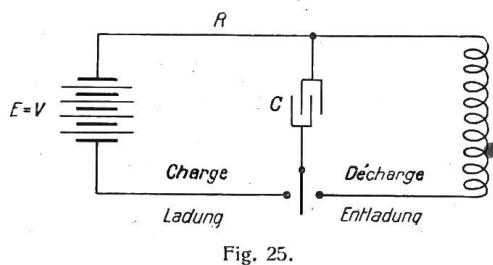
woraus

$$(119) \quad \Phi = \frac{10^8 V \sqrt{2}}{n_1 \omega} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{10^8 V \sqrt{2}}{n_1 \omega} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \Phi_2 + \Phi_t.$$

Der Flux Φ wird also nach Ablauf einer Zeit $\frac{T}{2}$ nach Schliessung des Stromkreises den doppelten Maximalwert des Fluxes Φ_2 , der bei Beharrungszustand im Kern sitzt, erreichen, wobei gleichzeitig der Magnetisierungsstrom durch ein Maximum geht, das, je nach der Sättigung des Eisenkerns, ein Vielfaches der Stromstärke sein kann, die dem Maximum des Fluxes Φ_2 im Beharrungszustand entspricht. Dieser Sättigungszustand kann noch durch den remanenten Magnetismus verstärkt werden, wenn dieser im gleichen Sinne vorhanden war und es wird also der Transformator beim Einschalten einen Strom aufnehmen, der ein Vielfaches des maximalen Betriebsstromes bei Vollast ist.

Im vorstehenden haben wir den Einfluss des Widerstandes der Primärwicklung vernachlässigt, der auf die Ueberströme beschränkend wirkt und sich als mehr oder weniger rasche Dämpfung des Fluxes äussert. Wir haben auch die Hysteresis- und Wirbelstromverluste im Eisen vernachlässigt, welche zur Vergrösserung der Dämpfung beitragen. Trotzdem kann aber das Einschalten eines Transformators oder irgend eines andern Apparates mit Eisenkern, z. B. eines ein- oder mehrphasigen Induktionsmotors, je nach der Phase, welche die Spannung in diesem Momente besitzt, einen Ueberstrom verursachen, dessen Folgen sowohl elektrischer als mechanischer Natur leicht abzusehen sind. Diese Ueberströme können durch Anbringen von zweckmässig gewählten, an Vorkontakten angeschlossenen Widerständen in den Schaltern auf ein ganz ungefährliches Mass herabgemindert werden.

Den soeben besprochenen ähnlichen Wirkungen treten auch, durch Kurzschluss verursacht, in Alternatoren auf.



VI. Betrachten wir nun einen Kondensator von der Kapazität C , den wir über induktionsfreie Leiter mit Widerstand R an eine konstante Spannung schliessen (Fig. 25). Nehmen wir an, der Kondensator sei vollständig ungeladen und werde im Moment $t = 0$ angeschlossen. In einem beliebigen Zeitpunkt t wird der Ladestrom den Wert i besitzen und es wird einerseits

$$v_B - v_A = -V \text{ und anderseits}$$

$$v_A - v_B = Ri + \frac{q}{C}$$

sein, wenn wir mit q die Ladung zur Zeit t bezeichnen.

Unter Berücksichtigung dass $i = \frac{dq}{dt}$ ist, erhalten wir nach Einsetzen dieses Wertes und durch Addition der zwei Gleichungen die gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(120) \quad R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V,$$

deren allgemeine Lösung

$$(121) \quad q = \frac{1}{R} \varepsilon^{-\frac{1}{CR} t} \int V \varepsilon^{\frac{1}{CR} t} dt + A \varepsilon^{-\frac{1}{CR} t} \quad \text{ist.}$$

Da R , C und V konstant sind, folgt sofort unter Zuhilfenahme der Grenzbedingungen, d. h. dass für $t = 0$ auch $q = 0$ ist:

$$A = -CV$$

und daher ergeben sich

$$(122) \quad \left\{ \begin{array}{l} q = CV - CV \varepsilon^{-\frac{1}{CR} t} = Q_2 + q_t \text{ als Ladung des Kondensators} \\ i = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} \varepsilon^{-\frac{1}{CR} t} = 0 + i_t \text{ als Ladestrom, und} \\ v = \frac{q}{C} = V - V \varepsilon^{-\frac{1}{CR} t} = V_2 + v_t \end{array} \right.$$

als Spannung an den Klemmen des Kondensators.

Diese Resultate zeigen dass sich die Ladung des Kondensators nicht plötzlich vollzieht, sondern dass es, da die Werte der Ausgleichsperiode, q_t , v_t und i_t nur für $t = \infty$ zu null werden, einer endlichen Zeit bedarf um den Beharrungszustand

$$Q_2 = CV; \quad I_2 = 0; \quad V_2 = V \text{ herzustellen.}$$

Man sieht anderseits, dass in einem beliebigen Moment die Grössen q , v und i umso weniger von ihren Grenzwerten CV , V und 0 differieren, je grösser $\frac{1}{CR}$ oder je kleiner CR ist. So beträgt die Zeit θ nach Ablauf, welcher die Ladung q nur noch um 1% von ihrem Zustandswert CV differiert, in diesem Fall

$$(123) \quad \theta = 4,604 CR$$

für $R = 100 \Omega$, $C = 0,01 \cdot 10^{-6}$ Farad, $\theta = 4,6 \cdot 10^{-6}$ Sekunden.

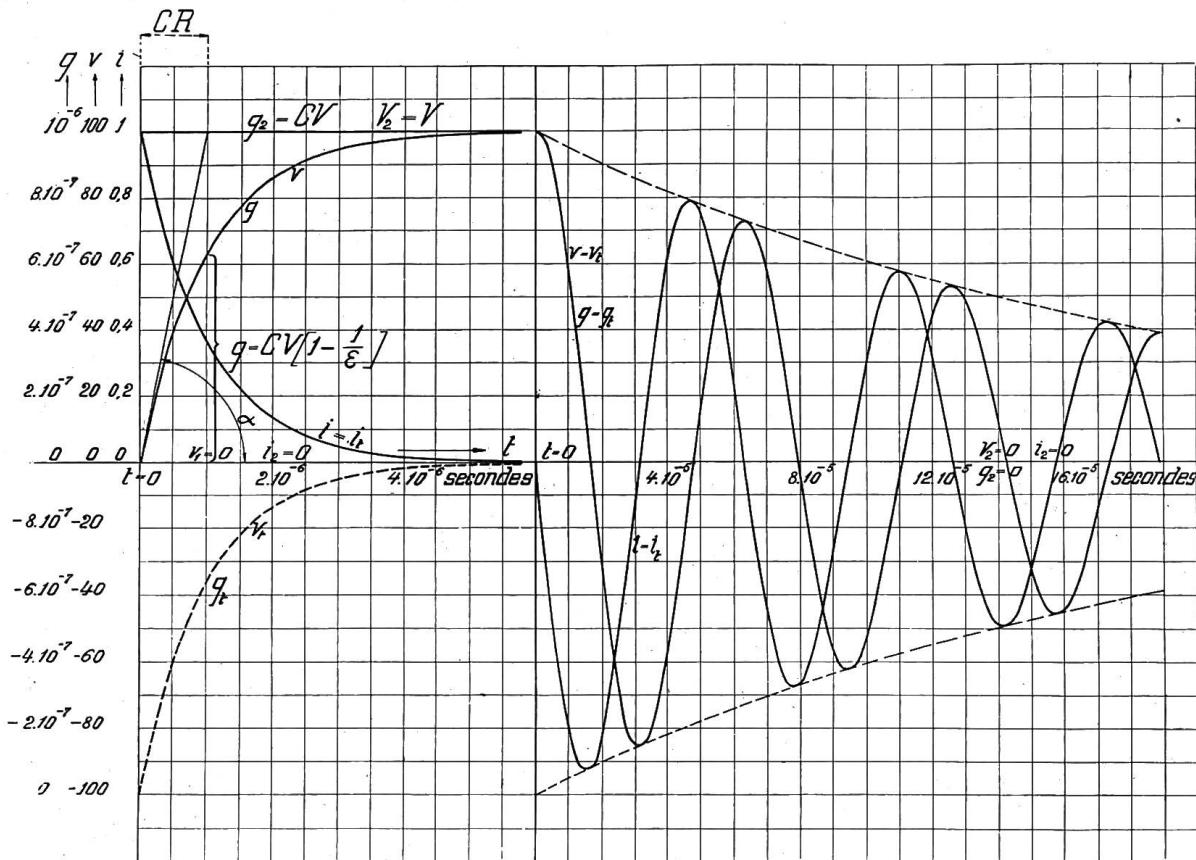


Fig. 26.

Es muss darauf hingewiesen werden, dass der Widerstand R auf den Ladevorgang verzögernd wirkt, während wir unter (I) fanden, dass diese Grösse den entgegengesetzten Einfluss auf die Geschwindigkeit ausübt, mit der sich der Beharrungsstrom in einem induktiven Stromkreis einstellt.

Das Produkt CR entspricht einer Zeit und heisst die **Zeitkonstante** des Ladestromes.

Wir haben in Figur 26 die Grössen v , V_2 und v_t , sowie auch i , I_2 und i_t für $V = 100$ Volt, $R = 100 \Omega$ und $C = 0,01$ Mikrofarad dargestellt.

Vergleichen wir diese Resultate mit dem was die Bedingungsgleichungen (108), die den veränderlichen Vorgang in jedem Zeitpunkt kennzeichnen, besagen, so entdecken wir einen Widerspruch, da nach (108) i_t zur Zeit $t = 0$ auch null sein sollte, während aus (122) hervorgeht, dass $i_t = \frac{V}{R}$ ist. Dieser Widerspruch ist aber nur scheinbar, da tatsächlich $i = i_t$, der, wenn auch sehr kleinen Selbstinduktion der Verbindungsleitung wegen, welche der Änderung entgegenwirkt, nicht plötzlich den Wert $\frac{V}{R}$ annehmen kann. Es zeigt denn auch in der Tat die genaue Untersuchung dieses Falles, dass der Strom äusserst rasch dem Werte $\frac{V}{R}$ zustrebt, aber immerhin in einer von null verschiedenen, endlichen Zeit, und dass er nachher wieder, entsprechend obigem Gesetze (da L als sehr klein vorausgesetzt) abnimmt.

Der Beharrungszustand des geladenen Kondensators ist ein Gleichgewichtszustand, den weder die Wegnahme des Generators noch die Einführung auch noch so grosser Widerstände zu zerstören vermögen. Es können also beim Oeffnen eines solchen Stromkreises unmöglich Ueberspannungen entstehen, so wenig als beim Schliessen solche auftraten.

Die Entladung des Kondensators kann nur durch die Unterdrückung der E. M. K. des Generators, in welchen hinein sie dann erfolgt, oder durch Wegnahme des Generators und nach Ersetzen desselben durch einen indifferenten Stromkreis, eingeleitet werden.

Bevor wir aber diesen Fall näher untersuchen, wollen wir noch erwähnen, dass während der Ladung, vom Moment 0 bis zur Zeit t , der Generator in den Ladestromkreis die Arbeit

$$W_g = Vq = CV^2 [1 - e^{-\frac{1}{CR}t}]$$

liefert, wovon ein Teil, nämlich

$$W_j = R \int_0^t i^2 dt = \frac{CV^2}{2} [1 - e^{-\frac{2}{CR}t}]$$

in den Verbindungsleitungen in Wärme umgesetzt wird (Joule-Effekt), während der übrige Teil

$$W_c = \int_0^t \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{CV^2}{2} [1 - e^{-\frac{1}{CR}t}]^2$$

im Kondensator in Form potentieller Energie aufgestapelt wird. Ist die Ladezeit genügend gross, so dass die exponentiellen Glieder vernachlässigt werden dürfen, was schon nach sehr kurzer Zeit der Fall sein wird, so ergibt sich

$$(124) \quad W_g = CV^2; \quad W_j = \frac{1}{2} CV^2; \quad W_c = \frac{1}{2} CV^2,$$

woraus hervorgeht, dass der Wirkungsgrad der Ladung 50 % beträgt, welches auch der Widerstand der Verbindungsleitung ist.

VII. Wir bringen nun den soeben betrachteten, mit der Elektrizitätsmenge CV geladenen Kondensator in einen Stromkreis mit Widerstand R und Selbstinduktion L und schalten ein. Der Kondensator wird sich gemäss dem durch Gleichung

$$(125) \quad Ri + L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \quad [\text{siehe Formel (1)}]$$

gegebenen Gesetz entladen. Da $i = -\frac{dq}{dt}$ ist, lässt sich (125) auch schreiben:

$$(126) \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung zweiten Grades mit konstanten Koeffizienten ist:

$$(127) \quad q = A_1 e^{m_1 t} + A_2 e^{m_2 t}$$

worin m_1 und m_2 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0$$

und A_1 und A_2 zwei von den Grenzbedingungen abhängige Integrationskonstanten sind.

Die charakteristische Gleichung ergibt

$$(128) \quad m_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}} \quad \text{und} \quad m_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}$$

und man erkennt sofort, dass die Entladung sich auf zwei verschiedene Arten abspielen kann.

Wenn $R^2 \geq \frac{4L}{C}$, so sind m_1 und m_2 reell und negativ; die Entladung geht *aperiodisch* vor sich und die Grössen q , v und i gehen ohne Richtungsänderung von den Werten CV , V und 0 auf Null über. Insbesondere beginnt der Strom mit einer Zunahme, geht durch ein Maximum und nimmt dann gleichzeitig mit q und v bis auf 0 ab. Damit der Vorgang in einem Stromkreis mit $L = 0,01$ Henry und $C = 0,01$ Mikrofarad sich derart abspielt, muss R grösser oder gleich

$$\sqrt{\frac{4.0,01}{0,01 \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{4 \cdot 10^6} = 2000 \Omega$$

sein. Ist hingegen $R^2 < \frac{4L}{C}$, so sind m_1 und m_2 conjugiert komplexe Grössen. Es kann alsdann gesetzt werden:

$$\frac{R}{2L} = \beta, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad \text{woraus (129)} \quad \begin{cases} m_1 = -\beta + j\omega_0 \\ m_2 = -\beta - j\omega_0 \end{cases}$$

hervorgehen. Da q notwendigerweise eine reelle Grösse sein muss, so müssen auch A_1 und A_2 conjugiert komplex sein, somit

$$(130) \quad A_1 = A e^{j\alpha} \quad \text{und} \quad A_2 = A e^{-j\alpha}$$

sodass q nach Einsetzen dieser Ausdrücke für m_1 , m_2 , A_1 und A_2 in Gleichung (27) und nach einigen augenscheinlichen Umformungen wird

$$\text{dann (131)} \quad \begin{cases} q = 2A e^{-\beta t} \cos[\omega_0 t + \alpha] \quad \text{sodann erhalten wir} \\ i = -\frac{dq}{dt} = 2A e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega_0 t + \alpha) + \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)] \quad \text{und endlich} \\ v = \frac{q}{C} = \frac{2A}{C} e^{-\beta t} \cos[\omega_0 t + \alpha]. \end{cases}$$

A und α sind mit Hilfe der Anfangsbedingungen zu bestimmen. In unserem Fall haben wir $q = Q = CV$ und $i = 0$ für $t = 0$. Durch Einführen dieser Werte in die Gleichung (131) erhalten wir leicht

$$(132) \quad 2A = CV \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \beta^2}}{\omega_0} \quad \text{und} \quad \alpha = \arctg\left(-\frac{\beta}{\omega_0}\right)$$

woraus endlich

$$(133) \quad \left\{ \begin{array}{l} q = CV \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \beta^2}}{\omega_0} \varepsilon^{-\beta t} \cos \left[\omega_0 t - \arctg \frac{\beta}{\omega_0} \right] = 0 + q_t \\ v = V \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \beta^2}}{\omega_0} \varepsilon^{-\beta t} \cos \left[\omega_0 t - \arctg \frac{\beta}{\omega_0} \right] = 0 + v_t \\ \text{und } i = -CV \frac{\omega_0^2 + \beta^2}{\omega_0} \varepsilon^{-\beta t} \sin \omega_0 t = 0 + i_t \end{array} \right.$$

gewonnen werden.

Diese Ausdrücke zeigen, dass die Entladung **periodisch** und zeitlich **gedämpft** verläuft. Ladung, Potentialdifferenz und Stromstärke pulsieren mit logarithmisch oder exponentiell abnehmenden Amplituden um 0. Die so erzeugten Oscillationen besitzen die Pulsation ω_0 oder die Frequenz

$$(134) \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

und die Dauer jeder Oscillation oder Periode der oscillatorischen Entladung ist

$$(135) \quad T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Die Größen f_0 und T_0 sind die *Frequenz* und die *Periode der Eigen-Schwingung* des betrachteten Stromkreises.

Wenn der Widerstand relativ klein ist, was eine schwache Dämpfung bedingt, kann man ohne grossen Fehler zu begehen

$$(136) \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}} \quad \text{und} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{CL}$$

setzen.

Endlich werden im theoretischen Fall, wo R vernachlässigbar und die Dämpfung demnach null ist

$$(137) \quad \left\{ \begin{array}{l} q = CV \cos \frac{t}{\sqrt{CL}} = 0 + q_t \\ v = V \cos \frac{t}{\sqrt{CL}} = 0 + v_t \\ i = -V \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \frac{t}{\sqrt{CL}} = 0 + i_t \end{array} \right.$$

Es tritt dann nur Energieaustausch zwischen dem Kondensator und seinem Entladestromkreis auf, während im Falle, wo R nicht vernachlässigbar ist, in jeder Periode ein gewisser Teil der Energie in Wärme umgewandelt wird, bis die ganze anfänglich im Kondensator aufgestapelte Energie $\frac{1}{2} CV^2$ aufgebraucht ist.

Der Fall der oscillatorischen Entladung eines Kondensators ist für $V = 100$ Volt, $C = 0,01$ Mikro-Farad, $L = 0,01$ Henry und $R = 100 \Omega$ in Fig. 26 dargestellt.

Wir erhalten somit als Frequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{10^{-8} \cdot 10^{-2}} - \frac{10^4}{4 \cdot 10^{-4}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{10^{10} - \frac{1}{4} \cdot 10^8} = \frac{10^5}{2\pi} \sqrt{0,9975} = 15910$$

welcher Wert praktisch dem unter Vernachlässigung des Widerstandes gewonnenen gleich ist. Die Dämpfung dieses Stromkreises hingegen darf unter keinen Umständen vernachlässigt werden, da schon am Ende der ersten Periode die Potentialdifferenz an den Klemmen des Kondensators auf

$$100 \varepsilon^{-\frac{5000}{15910}} = 100 \varepsilon^{-0,314} = 73 \text{ Volt}$$

gesunken ist.

Es ist nach vorstehendem vollkommen klar, dass die Entladung eines Kondensators nach soeben untersuchter Weise ohne *irgendwelche Ueberspannung* vor sich geht.

VIII. Dies ist nun nicht mehr der Fall, wenn in einem einfachen Stromkreis die Ladung eines Kondensators mittelst Leiter, die Widerstand und Selbstinduktion besitzen, erfolgt, sodass $R^2 < \frac{4L}{C}$ ist.

Man gelangt dann nach ähnlichen Rechnungen wie oben zu den Ausdrücken

$$(138) \quad \left\{ \begin{array}{l} q = CV - CV \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \beta^2}}{\omega_0} e^{-\beta t} \cos \left(\omega_0 t - \arctg \frac{\beta}{\omega_0} \right) = Q_2 + q_t \\ v = V - V \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \beta^2}}{\omega_0} e^{-\beta t} \cos \left(\omega_0 t - \arctg \frac{\beta}{\omega_0} \right) = V_2 + v_t \\ \text{und} \quad i = CV \frac{\omega_0^2 + \beta^2}{\omega_0} e^{-\beta t} \sin (\omega_0 t) = 0 + i_t \end{array} \right.$$

Die Ladung weist also mit dem Unterschied, dass q und v statt um 0 nunmehr um CV und V oscillieren, den gleichen Charakter auf, wie die Entladung. Insbesondere sehen wir, dass die oscillatorische Ladung durch eine **Ueberspannung** an den Kondensatklemmen gekennzeichnet ist, die den Wert V erreichen könnte, wenn die Dämpfung vernachlässigbar wäre. Anders ausgedrückt, könnte der Kondensator unmittelbar im Beginn der Ladung einer Spannung unterworfen sein, die höchstens den doppelten Betrag derjenigen der Stromquelle erreichen würde.

IX. Das Anwachsen eines sinoidalen Wechselstromes bei Schliessung in einem Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion ist von gleichen Erscheinungen begleitet wie bei den bereits untersuchten Fällen. Es muss jedoch hier noch hinzugefügt werden dass, wenn im Stromkreis **Kapazität** in Serie geschaltet ist, welches auch die Phase der angewandten Spannung im Moment des Einschaltens sei, sich stets dem Ausdruck für den Beharrungszustand ein solcher für den Ausgleichsvorgang superponiert. Dieses Glied für den Ausgleichsvorgang tritt sowohl im Ausdruck für die Klemmenspannung der Kapazität als in jenem für die Stromstärke auf.

Im Falle, wo die Konstanten des Stromkreises der Bedingung $R^2 < \frac{4L}{C}$ genügen, superponieren sich die Glieder des periodischen Ausgleichsvorganges von Frequenz f_0 (Eigenschwingung des Stromkreises, siehe Formel 134) den periodischen des Beharrungszustandes dessen Frequenz diejenige der Stromquelle ist und die **Ueberspannungen speziell an den Klemmen der Kapazität**, können den **doppelten** Wert der Spannung der Stromquelle erreichen, immerhin unter der Bedingung dass die Frequenz f wesentlich von f_0 verschieden ist.

Die **Ueberspannung** an den Klemmen der Kapazität hingegen kann ausserordentlich grosse Werte annehmen, wenn die Frequenz f der Stromquelle mit derjenigen der Eigenschwingung des Stromkreises übereinstimmt oder bereits wenn f nur wenig von f_0 verschieden ist, das heisst, wenn **Resonanz** oder **Quasi-Resonanz** zwischen Generator und Stromkreis vorliegt. Man erkennt in der Tat sehr leicht, dass, wenn wir mit $v = V\sqrt{2} \sin(\omega t)$ die Spannung des Generators, mit R , L und C die Konstanten des Stromkreises bezeichnen, der Ausdruck für die Klemmenspannung des Kondensators

$$v_c = \frac{V\sqrt{2}}{\sqrt{R_2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \cdot \omega C}} \sin \left[\omega t - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} - \frac{\pi}{2} \right]$$

wird und dass das Verhältnis $\frac{V_c}{V}$, das wir **Ueberspannungsfaktor** nennen können und dessen Wert durch

$$\frac{V_c}{V} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + (\omega^2 CL - 1)^2}}$$

gegeben ist, für einen gewissen Wert von ω (Pulsation) das Maximum erreicht. Um ihn zu bestimmen, bilden wir die Ableitung und setzen diese gleich 0, also

$$\frac{d \left(\frac{V_c}{V} \right)}{d \omega} = 0$$

Wenn wir diesen gesuchten Wert mit ω' oder mit f' die entsprechende Frequenz bezeichnen, so erhalten wir leicht

$$(139) \quad \omega' = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{2L^2}} \text{ woraus } f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{CL}} = \frac{R^2}{2L^2}$$

während Pulsation und Frequenz der Eigenschwingung des Stromkreises durch

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}} \text{ und } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}} \text{ gegeben sind.}$$

Wenn aber R relativ klein ist, differieren diese beiden Werte sehr wenig voneinander und vom Werte f_0 für $R = 0$ welcher

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}}$$

ist, sodass der Ueberspannungsfaktor für Resonanz bei relativ kleinem R sich folgendermassen anschreiben lässt:

$$(140) \quad \frac{V_c}{V} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{\sqrt{CL}}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Darf aber der Widerstand nicht vernachlässigt werden, was für Oberwellen der Spannungskurve der Fall sein kann (Einfluss von Wirbelströmen, Stromkreise mit Eisen) so ist der Ueberspannungsfaktor durch

$$(141) \quad \left(\frac{V_c}{V} \right)_m = \frac{1}{\sqrt{\omega'^2 C^2 R^2 + (\omega'^2 CL - 1)^2}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{R^2 C}{4L}}}$$

gegeben, und er kann wesentlich grösser sein als der aus der Formel, in welcher R ausgelassen wurde, sich ergebende. Der von uns soeben eingeführte Ueberspannungsfaktor ist das Verhältnis der Kondensatorspannung V_c zur Spannung V der Stromquelle im Beharrungszustand der Resonanz oder Quasi-Resonanz. Untersucht man den betrachteten Fall etwas genauer, so erkennt man, dass während der Ausgleichsperiode die Spannung V fortwährend wächst um schliesslich den durch (141) gegebenen Wert zu erreichen sodass das oben eingeführte Verhältnis wirklich den Faktor für maximale Ueberspannung während der Uebergangsperiode in den Beharrungszustand darstellt. Es ist zu erwähnen, dass die Periode der Eigenschwingung einfacher, *lokalisierter* Stromkreise, oder von solchen, die vermöge ihrer mit Bezug auf die Wellenlänge geringen Ausdehnung als lokalisiert gelten dürfen im allgemeinen von viel kürzerer Dauer ist als diejenige der Grundwelle der E. M. K. gewöhnlicher Generatoren und dass praktisch die Resonanz nur für die Oberwellen dieser Spannungen oder E. M. K. in Frage kommen kann.

Es scheint denn in der Tat, dass durch Oberwellen des aufgedrückten Zustandes hervorgerufene Resonanzerscheinungen nicht sehr zu befürchten sind. Ganz anders verhält es sich aber mit den Wirkungen zufällig verursachter oscillatorischer Spannungen wie sie in Stromkreisen oder Teilen solcher in einem beliebigen Punkte durch **Lichtbögen** entstehen können (Schaltvorgänge, Unterbrechung von Kurzschlüssen, Erdungen infolge Durchschlag, Ansprechen von sogenannten „Schutzapparaten“). Es können sich in solchen Fällen eher Fortpflanzungerscheinungen (Erzeugung *stehender Wellen*) als eigentliche Resonanz ausbilden, deren Folgen leicht abzusehen sind.

X. Wir haben bis jetzt immer nur einfache Stromkreise mit Serieschaltung von Widerstand, Kapazität und Selbstinduktion betrachtet. Diese einfachen Schemata entsprechen Fällen, mindestens jene die Kondensatoren enthalten, wo wenig ausgedehnte Stromkreise ohne eigentlichen Verbraucher unter Spannung gesetzt oder ausgeschaltet werden. Die Kapazität dieser Stromkreise wird durch den Kondensator, der Widerstand und die Selbstinduktion werden durch einen induktiven Widerstand dargestellt und die Generatoren (für Gleichstrom oder Wechselstrom) waren als für die Zustandsänderung (Änderung der Betriebsbedingungen) unempfindlich vorausgesetzt, da wir zwischen Spannung und E. M. K. keinen Unterschied machen, von welcher Bedingung man sich allerdings leicht befreien kann, sobald man sich darüber klar ist, welche Werte für Widerstand und Selbstinduktion der Generatoren in die Gleichungen der Ausgleichsvorgänge einzusetzen sind.

Der Uebergang von diesen einfachen Fällen auf allgemeinere, in denen die Stromkreise einzelne Verbraucher oder Verbraucher-Gruppen in Parallelschaltung mit dem die Kapazität der Leitungen darstellenden Kondensator speisen, bietet ebenfalls keine grösseren Schwierigkeiten. Jede Zustandsänderung bedingt Ausdrücke für den *Ausgleichsvorgang*, welche als Schwingungen (im weitesten Sinne dieses Wortes) erscheinen, deren charakteristische Werte von den Konstanten des Stromkreises, wie er sich im freien Zustand darstellt und von den Differenzen zwischen den Momentanwerten der Spannungen und Ströme des vorangehenden Beharrungszustandes im Moment der Zustandsänderung und den Momentanwerten, welche Spannungen und Ströme des neuen Beharrungszustandes im gleichen Zeitpunkt *besitzen würden*, abhängen. Was die Periode der Eigenschwingung für die Ausdrücke des Ausgleichsvorganges betrifft, sehen wir beispielsweise in Fig. 27, dass, wo die Zustandsänderung ohne Öffnung des Stromes eintritt (plötzliche Belastungsschwankung) diese Grösse die Periode der Eigenschwingung des geschlossenen, aus Kondensator mit parallelgeschaltetem Generator und Verbraucher in Serie-Schaltung bestehenden Stromkreises ist. Im Fall aber wo der Generator abgeschaltet wird, ist der Schwingungskreis durch den Kondensator und den Verbraucher gebildet, und endlich im Fall, wo der Verbraucher abgetrennt wird, setzt sich der Schwingungskreis aus Generator und Kondensator zusammen. Das meiste Interesse bieten die Fälle wo die Ueberspannungen an den Klemmen der Kapazität zu bestimmen sind wenn eine dazu im Nebenschluss liegende „Belastung“ plötzlich weggenommen wird oder wenn ein Kurzschluss unterbrochen wird. Man erkennt dann leicht die Möglichkeit für das Auftreten beträchtlicher Ueberspannungen, besonders bei Gleichstromkreisen, während diese in Wechselstromkreisen weniger zu befürchten sind, da das Abreissen des Lichtbogens im allgemeinen im Moment wo die Stromwelle, deren Variation immerhin beschleunigt ist, durch den Wert 0 geht, erfolgt.

(Schluss folgt in nächster Nummer.)

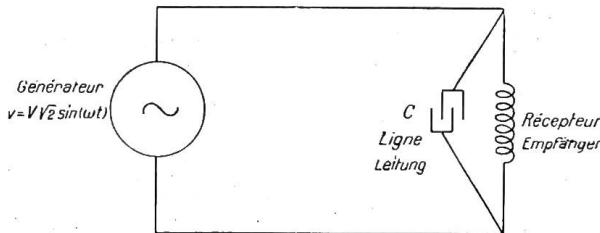


Fig. 27.