Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 5 (1914)

Heft: 2

Artikel: Stationäre Zustände und Zustandsänderungen in elektrischen Stromkreisen

Autor: Landry, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1059656

SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich mit den Jahres-Beilagen **„Statistik der Starkstromanlagen der Schweiz“** sowie **„Jahresheft“** und wird unter Mitwirkung einer vom Vorstand des S. E. V. ernannten Redaktionskommission herausgegeben.

Alle den Inhalt des „Bulletin“ betreffenden Zuschriften sind zu richten an das

Generalsekretariat
des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins,
Neumühlequai 12, Zürich 1 - Telephon 9571

Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition und Inserate sind zu richten an den

Verlag: Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei A.-G., Zürich
Bahnhofstrasse 61, Zürich I (Telephon 6741)

Publié sous la direction d'une Commission de Rédaction nommée par le Comité de l'A. S. E.

Ce bulletin paraît mensuellement et comporte comme annexes annuelles la **„Statistique des installations électriques à fort courant de la Suisse“**, ainsi que l'**„Annuaire“**.

Prière d'adresser toutes les communications concernant la matière du „Bulletin“ au

Secrétariat général
de l'Association Suisse des Electriciens
Neumühlequai 12, Zurich 1 - Téléphone 9571

Toutes les correspondances concernant les abonnements, l'expédition et les annonces, doivent être adressées à l'éditeur:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A.
Zurich
Bahnhofstrasse 61, Zurich I (Téléphone 6741)

Abonnementspreis
für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft und Statistik:
Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 25.—.
Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 1.50 plus Porto.

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de l'A. S. E.), y compris l'Annuaire et la Statistique, Fr. 15.— pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger.
L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 1.50, port en plus.

V. Jahrgang
V^e Année

Bulletin No. 2

Februar
Février
1914

Stationäre Zustände und Zustandsänderungen in elektrischen Stromkreisen.

Von Prof. *J. Landry,* Lausanne.

(Uebersetzung von Ing. *E. Payot.*)*)

Im Laufe des letzten Jahrzehntes ist die elektrotechnische Literatur durch eine grosse Anzahl Arbeiten über stationäre und nicht-stationäre Zustände (letztere treten beim Uebergang eines stationären Zustandes in einen andern auf und sind meistens nur von kurzer Dauer) bereichert worden. Die grosse Anzahl dieser Studien, sowie die Verschiedenheit der behandelten Probleme lassen sich leicht aus der Mannigfaltigkeit derselben und den verschiedenen Gesichtspunkten, von denen aus sie betrachtet werden können, erklären.

Während langer Zeit konnten diejenigen Techniker, die speziell mit den in der Industrie verwendeten Strömen sich befassten (gewöhnlich Starkströme genannt), sich mit den Lösungen begnügen, die unter Vernachlässigung gewisser Grössen, deren Einflüsse wie es schien nur in andern der vielen Anwendungsgebiete der Elektrizität zu berücksichtigen waren, hergeleitet wurden. Es konnten, solange die zu überwindenden Entfernungen und die Spannungen zwischen den einzelnen Leitern der Leitungen geringer waren, die Wirkungen der Verschiebungsströme, hervorgerufen durch die Kapazität der Leiter, vernachlässigt und daher, ohne für die vorgesehenen Zwecke grosse Fehler zu begehen, die Annahme gemacht werden, dass bei stationärem Zustande die *Effektiv-Werte der Stromstärken* und deren *Phasen* auf der *ganzen Ausdehnung* des Stromkreises oder des betrachteten Stückes desselben unverändert bleiben, während der Begriff des *Ortes (Abstand, Entfernung)* nur für die *Grösse* und in gewissem Masse auch für die *Phase* der Spannungen in Frage kam.

*) Das französische Original findet sich in der französischen Ausgabe derselben Nummer abgedruckt. Mitglieder, welche dieses zu besitzen wünschen, belieben sich an das Generalsekretariat zu wenden.

Wie wir schon eingangs erwähnten, bedingt diese Art des Vorgehens, d. h. Stromkreise irgend welcher Art in *lokalisierte*, sogenannte „Ersatz-Stromkreise" umzuwandeln mit konzentrierten Ohm'schen und induktiven Widerständen, mit sogar mehr oder weniger willkürlich zusammengefassten und angeschlossenen Kapazitäten, welche den „totalen" (verteilten) Ohm'schen und induktiven Widerständen und den Kapazitäten der betrachteten Stromkreise oder einzelner Teile solcher entsprechen sollen (wobei unter „total" der gewöhnliche Begriff des Wortes gemeint ist), keine wesentlichen Nachteile, solange man sie auf die Bestimmung der charakteristischen Grössen genau umschriebener *Beharrungszustände* beschränkt. Dies trifft immerhin nur für die Frequenzen der industriell verwerteten Stromarten zu. Man würde aber recht grosse Fehler begehen, wollte man diese Methoden zum Beispiel für die Untersuchung von *stationären Zuständen* von Stromkreisen mit veränderlichen elektromotorischen Kräften von *hoher Frequenz* verwenden, und dies würde in noch weit höherem Masse der Fall sein, wenn es sich bei beliebigen Stromkreisen um die Ermittlung der bei rasch sich vollziehenden Zustandsänderungen oder lokalen Gleichgewichtsstörungen auftretenden freien Spannungen und Ströme handelt. Es ist daher unerlässlich, in diesen Fällen die Konstanten als „verteilte" in die Rechnung einzuführen, d. h. auf die allgemeinen Grundgleichungen zurückzugreifen, in denen die Spannungen und Ströme als Funktionen *des Ortes* und *der Zeit* erscheinen, oder, wenn man bei der gebräuchlichen und geläufigeren Art der Vorstellung bleiben will, in jedem einzelnen Falle die Konstanten der Einzelteile der Stromkreise derart genau zu bestimmen, dass sie diejenigen der wirklichen Stromkreise mit verteilten Konstanten nicht nur „ersetzen", sondern dass sie tatsächlich *„äquivalente"* Stromkreise ergeben.

Gerade jetzt, wo die schweizerischen Elektriker sich bestreben, in die so sehr umstrittenen Fragen der *Ueberspannungen* und *Ueberströme* und über die Mittel zu deren Bekämpfung einen Meinungsaustausch herbeizuführen, ist es vielleicht zweckmässig, hier im Bulletin diejenigen Grundbegriffe und Anschauungen darzulegen, welche allen denjenigen unerlässlich sind, die sich für diese Fragen interessieren. Es geschieht auch um diese Begriffe weitern Kreisen zugänglich zu machen, und daher handelt es sich hier um systematisch und so elementar als möglich dargestellte allgemeine Grundlagen.

Bevor wir uns dem weiten Gebiete der Zustandsänderungen zuwenden, ist es wohl zweckmässig uns etwas bei den *Beharrungszuständen der Gleichstrom- und Wechselstromsysteme* aufzuhalten und vorerst den Ursprung und Sinn der später verwendeten Gleichungen in Erinnerung zu bringen.

Die Grundgleichungen des elektrischen Stromkreises.

1. Betrachten wir (Fig. 1) einen beliebigen geschlossenen Stromkreis, in welchem die elektromotorische Kraft (E. M. K.) $e = f(t)$ eines Generators wirke, wobei alle Teile des Kreises, wie dies oft angenommen wird, vollständig *frei von Kapazität* und *vollkommen isoliert* seien. Unter dem Einfluss von $e = f(t)$ wird in diesem Stromkreis ein Strom i entstehen, sodass in jedem Moment

$$e = f(t) = Ri - \Sigma\,(e') \tag{1}$$

gilt, worin R den totalen Widerstand des Stromkreises, denjenigen des Generators und der im Kreise eingeschlossenen Verbraucher inbegriffen, und $\Sigma(e')$ die Summe aller elektromotorischen Kräfte (E. M. Ke) der Verbraucher, der Selbst- und gegenseitigen Induktion, Eigenspannungen von Kondensatoren inbegriffen, wenn solche im Stromkreis *in Serie* geschaltet sind.

Da einzelne dieser E. M. Ke oder Spannungen entweder proportional der Aenderungsgeschwindigkeit des Stromes i $\left(\text{E. M. Ke der Selbstinduktion} = -L\dfrac{di}{dt}\right)$ oder der Aenderungsgeschwindigkeit von Strömen in, dem betrachteten Stromkreise benachbarten Stromkreisen $\left(\text{E. M. Ke der gegenseitigen Induktion} = -M\dfrac{di'}{dt}\right)$, oder vom Augenblickswert der

Ladung $q = \int i\,dt \left(\text{Kondensatorspannungen} = -\frac{1}{C}\int i\,dt \right)$ führt die Bestimmung des Momentanwertes des Stromes i im allgemeinen auf die Integration einer *gewöhnlichen Differentialgleichung* oder einer Gruppe von *simultanen Differentialgleichungen* (letzteres im Falle von benachbarten Stromkreisen in mehr oder weniger starrer Koppelung mit dem betrachteten Stromkreise).

So führt die Anwendung des soeben dargelegten auf den Fall der Fig. 2, welche das Schema eines Stromkreises mit einem Kondensator von der Kapazität C, an eine Stromquelle mit konstanter E. M. K. E durch Leiter mit dem Widerstande R und der Selbstinduktion L angelegt, darstellt, auf die Differentialgleichung:

(2) $$E = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{\int i\,dt}{C},$$

aus welcher sich leicht $i = \varphi\,(t)$ bestimmen lässt, sobald die Grenzbedingungen festgelegt sind.

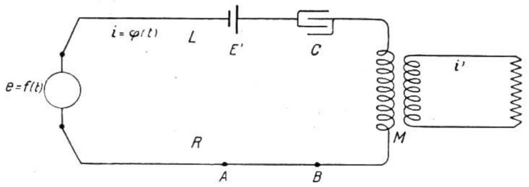

Fig. 1.

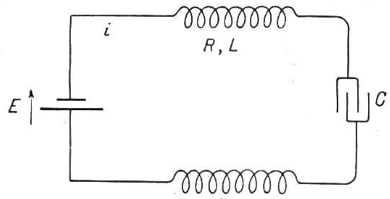

Fig. 2.

Ist die Stromstärke einmal bekannt, so ist es möglich die Grösse der Potential differenz zwischen zwei beliebigen Punkten des Stromkreises zu bestimmen, wie zwischen den Punkten A und B der Fig. 1, für welche Spannung gilt:

(3) $$\boldsymbol{v_{AB} = R_{AB}i - \Sigma_{AB}(e')}$$

Die durch Gleichung 1 für den ganzen in Fig. 1 schematisch dargestellten Stromkreis und die durch Gleichung 3 für einen beliebigen Teil AB des gleichen Stromkreises dargestellte Relation sind nichts anderes als Ausdrücke für das wohlbekannte *Ohm'sche Gesetz.*

2. Da die elektr. Stromkreise *weder vollständig isoliert* noch *vollkommen frei von Kapazitäten* sind, so ist der Momentanwert der Stromstärke, *entgegen* der obigen Annahme, nicht in allen Teilen des Stromkreises gleich, so dass die oben angeführten Gesetze, welche i und die davon abhängigen Grössen nur als Funktionen der einzigen *unabhängigen Veränderlichen, der Zeit t,* erscheinen lassen, *umso ungenauere* Resultate ergeben, *je grösser* für einen gegebenen Isolationswiderstand und eine gegebene Kapazität die Potentialdifferenz v zwischen zwei Punkten des Stromkreises (z. B. zwischen zwei entsprechenden Punkten einer Uebertragungsleitung in gleicher Entfernung von der Stromquelle, oder irgend zwei andern) und $\frac{dv}{dt}$, die Aenderungsgeschwindigkeit von v, sind.

Es ergibt sich demnach, dass im allgemeinen Fall die Grössen i und v *Funktionen des Ortes* d. h. des ***Abstandes*** x von einem bestimmten Punkte des Stromkreises, z. B. aus leicht ersichtlichem Grunde, von den Klemmen des Generators oder des entferntesten Verbrauchers, und der ***Zeit*** t sind.

Die Gleichungen, aus denen i und v dann bestimmt werden können, sind Differentialgleichungen mit partiellen Ableitungen nach x und t.

Wir wollen auch diese kurz anführen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir Fig. 3, welche einen Stromkreis mit einem Generator G, einer zweidrähtigen Leitung L und einem Verbraucher R darstellt. Im Abstande x, z. B. vom Generator aus gerechnet, betrachten wir ein Leiterelement AB von der Länge dx und bezeichnen mit v die *Spannung oder Potentialdifferenz* im Punkte A (in Wirklichkeit zwischen A und dem ihm zugeordneten Punkt A') und mit i die *Stromstärke* im Querschnitt A des Elements AB. Bezeichnen wir weiter mit r, g, l und c die Werte, *bezogen auf die Längeneinheit*, des *Leitungswiderstandes* (Hin- und Rückleitung in Fig. 3), der *Ableitung* (Leitfähigkeit der Strombahnen zwischen den Leitern und zwischen Leitern und Erde, unvollkommene Isolation), der *Selbstinduktion* und der *Kapazität*. Die Konstanten des Elementes AB von der Länge dx sind also:

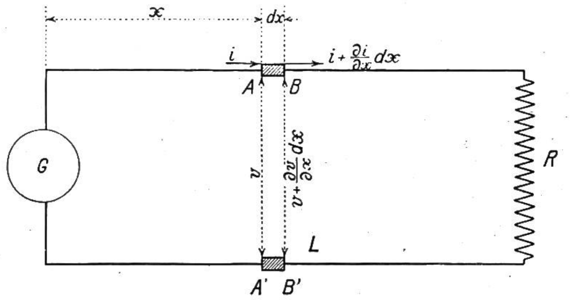

Fig. 3.

Widerstand	rdx
Ableitung	gdx
Selbstinduktion	ldx
Kapazität (im Nebenschluss)	cdx

Wenn im Leiterelement AB selbst keine E.M.K. erzeugt wird als diejenige der Selbstinduktion, so ergibt die sinngemässe Anwendung der Gleichung (3) sofort:

$$v_{AB'} = v_{A'} - v_{BB'} = v - \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) = rdx \cdot i + ldx \frac{\partial i}{\partial t}$$

woraus

(4)
$$-\frac{\partial v}{\partial x} = ri + l\frac{\partial i}{\partial t}$$

Anderseits verlangt der Grundsatz von der Kontinuität dass

$$i_A - i_B = i - \left(i \frac{\partial i}{\partial x} dx\right) = gdx \cdot v + cdx \frac{\partial v}{\partial t}$$

ist. Woraus

(5)
$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gv + c\frac{\partial v}{\partial t}$$

Die Gleichungen (4) und (5) sind mit Bezug auf v und i symmetrisch. Man kann aus diesen durch Elimination zwei andere Gleichungen herleiten, deren eine nur mehr v und die andere nur noch i enthält:

(6)
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = rgv + (rc + lg)\frac{\partial v}{\partial t} + ci\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

(7)
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = rgi + (rc + lg)\frac{\partial i}{\partial t} + cl\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

Diese beiden Gleichungen zeigen gleichen Aufbau; man wird infolgedessen, bis auf die Integrationskonstanten, gleiche Lösungen erhalten. Im allgemeinen wird man z. B. aus der Gleichung (6) v ermitteln und dann durch Einsetzen des gefundenen Wertes in Gleichung (5) i durch Integration nach x bestimmen.

Die Gleichungen (4) und (5), oder die aus ihnen abgeleiteten (6) und (7) sind *die allgemeinen Grundgleichungen für einen beliebigen elektrischen Stromkreis.* Sie erscheinen hier als Differentialgleichungen mit *konstanten Koëffizienten*, da r, l, g und c die sogenannten *Konstanten* des ganzen, oder von Teilen des Stromkreises darstellen. In Wirklichkeit sind aber diese vier Grössen nur in verhältnismässig engen Grenzen konstant. So ist zum Beispiel der Widerstand pro Längeneinheit r eine Funktion der Periodenzahl, und in gewissen Fällen eine solche von i. Ebenso kann die Grösse l zwischen verhältnismässig weiten Grenzen variieren, und zwar nach einem analytisch schwer darstellbaren Gesetz; dies wird z. B. der Fall sein für jeden Stromkreis oder Stromkreisteil, der sich in einem ferro-magnetischen Feld befindet; oder es wird in gewissen Fällen für einen bestimmten Apparat, der sich in einem Stromkreis oder in Systemen solcher befindet, l unter Berücksichtigung der vorhandenen Schaltung einerseits nach der Grundschwingung des Systems, anderseits nach gewissen auftretenden Harmonischen des betrachteten periodischen Vorganges bestimmt werden müssen.

Das gleiche wird, wenn auch in geringerem Masse als bei jenen, für die Grössen g und c gelten.

Diese Umstände würden die Lösung des Problems ungemein erschweren, vielleicht sogar verunmöglichen, wenn nicht auf Grund physikalisch richtiger Anschauung und genauer Prüfung einzelne zweckmässig getroffene Vereinfachungen gemacht werden könnten.

Da den Gleichungen (6) und (7) eine unendliche Anzahl partikulärer Lösungen genügen, wird die Hauptschwierigkeit in der Bestimmung der Integrationskonstanten liegen.

Man wird also nur im Falle eines wohl umschriebenen, bestimmten Problems die Funktionen $v = f(x, t)$ und $i = f(x, t)$, welche *Spannung* und *Strom* in jedem Punkt des betrachteten Stromkreises darstellen, bestimmen können.

Die Gleichungen (4) und (5) führen im Falle $l = g = o$ auf die Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = rc \frac{\partial v}{\partial t} \tag{8}$$

deren Lösung für das Telegraphen-Kabel *Lord Kelvin*, damals *Professor William Thomson*, in der denkwürdigen Abhandlung „On the Theory of the Electric Telegraph" gab, die er im Mai 1855 der „Royal Society" in London vorlegte.

Oliver Heaviside hat in seiner klassischen Abhandlung „Electromagnetic Theory, The Electrician Series" 1893 dazu sehr zahlreiche und anregende Anwendungen angegeben. Vom Jahre 1900 an wurden diese Gleichungen in der einen oder andern Fassung (4, 5, 6 und 7) oder unter anderer Form, durch weitere zweckmässige Vereinfachungen gewonnen, sehr oft wieder aufgegriffen und besprochen oder auf die zahlreichen Fälle angewandt, denen durch die eingangs erwähnten Näherungs-Methoden nicht beizukommen ist. Wir nennen hier, jedoch ohne auf Vollständigkeit Anspruch erheben zu wollen, von den Werken, von denen Kenntnis zu nehmen uns vergönnt war, zunächst eine Abhandlung des verstorbenen *H. Poincaré*, die von ganz hervorragendem Wert ist und sich durch ausserordentliche Klarheit auszeichnet, worin der berühmte Mathematiker die exakte Lösung der Gleichung (6) gibt. Sie ist im 3. Band 1914 des *Eclairage Electrique* enthalten. In der Folge erschienen im Bulletin der *Société Internationale des Electriciens* aus Anlass einer von dieser Gesellschaft in den Jahren 1904 und 1905 angeregten Diskussion über die Frage der „Ueberspannungen" Arbeiten von *Potier, Brylinski, Blondel, de Marchena.* Weiter sind solche zu nennen von *Kennelly, Steinmetz, Pupin, Campbell* in Amerika, von *Herzog* und *Feldmann, Breisig, K. W. Wagner, Petersen, Rogowski, Linke, Rudenberg* in Deutschland, von *O'Meara, Fleming, Russell* in England u. a. m.

Stationäre Zustände.

Gleichströme.

Obwohl dieser Fall *(Gleichströme im Beharrungszustand)* sehr einfach zu behandeln und wohlbekannt ist, so verlohnt es sich dennoch, etwas dabei zu verweilen, wäre es auch nur um gewisse Analogien mit später zu behandelnden Fällen besser hervorzuheben.

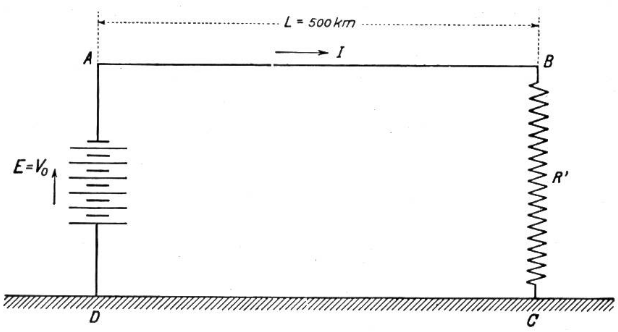

Fig. 4.

1. Zu diesem Zwecke betrachten wir den Fall der Fig. 4, in welcher ein Generator mit konstanter E. M. K. E an einen Verbraucher mit Widerstand R' (konzen-

trierter Widerstand ohne Ableitungsverluste) durch eine Leitung von der Länge L und mit Widerstand r pro Längeneinheit angeschlossen, dargestellt ist.

Nehmen wir an, dass die Rückleitung durch die Erde erfolge und dass deren Widerstand, selbst derjenige der Erdkontakte C und D, vollständig vernachlässigt werden kann. Wir treffen ferner die Annahme, dass die Leitung *vollständig isoliert* und dass der Widerstand des Generators vernachlässigbar sei. Es gilt dann, welches auch der Betriebszustand ist:

$$V_A - V_D = E = V_0 .$$

Nach obigen Annahmen können die Spannung v und der Strom i *nur Funktionen des Abstandes x sein*, und da $g = 0$ ist, werden die Gleichungen (4) und (5)

$$-\frac{dv}{dx} = ri \tag{9}$$

$$\text{und} \quad -\frac{di}{dx} = 0 \tag{10}$$

aus welchen ohne weiteres folgt:

$$i = -a = \text{konstant} \tag{11}$$

$$v = rax + b \tag{12}$$

Die Spannung nimmt also gleichmässig und *linear* gegen den Verbraucher zu ab und zwar um den Wert

$$\frac{dv}{dx} = ra$$

pro Längeneinheit. Unter Berücksichtigung der Bedingungen

$$v = V_0, \text{ für } x = 0, \text{ und}$$

$$v = v_L = -R'a, \text{ für } x = L$$

findet man durch Einsetzen dieser Bedingungen in Gleichung (12) und unter Zuhilfenahme der Gleichung (11):

$$a = -\frac{V_0}{R' + rL} = -\frac{V_0}{R' + R}$$

$$b = V_0$$

woraus endlich

$$v = V_0\left[1 - \frac{r}{R' + R}x\right] = f(x) \tag{13}$$

$$i = -a = \frac{V_0}{R' + R} = I . \tag{14}$$

hervorgehen, Ausdrücke in denen $R = rL$ den *totalen* Widerstand der Leitung darstellt.

Für $R' = \infty$, also bei am Ende offener Leitung wird

$$\begin{cases} v = V_0 = \text{konstant} \\ i = I = 0 \end{cases} \tag{15}$$

und für $R' = 0$, also bei an Erde gelegtem Ende der Leitung, (Erdschluss) wird:

$$\begin{cases} v = V_0\left[1 - r\frac{x}{L}\right] \\ v_L = 0 \\ i = I = \frac{V_0}{R} = \frac{V_0}{rL} \end{cases} \tag{16}$$

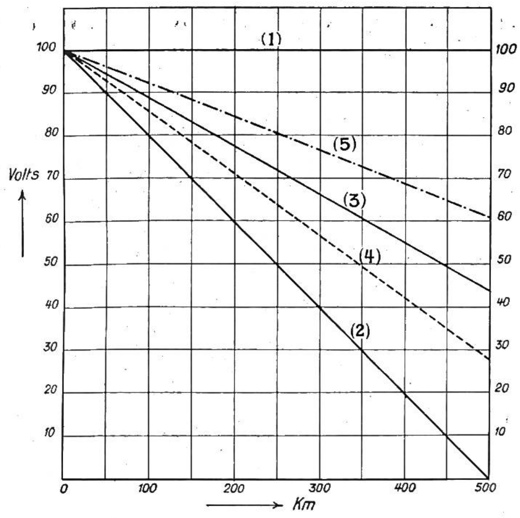

Fig. 5.

Wir haben in den Fig. 5 und 6 folgende Fälle für eine Leitung von 500 km Länge aus Phosphorbronce von 3,5 mm Drahtdurchmesser mit einem Widerstand pro Längeneinheit $r = 6{,}77$ Ohm prokm und mit $g = 0$ dargestellt:

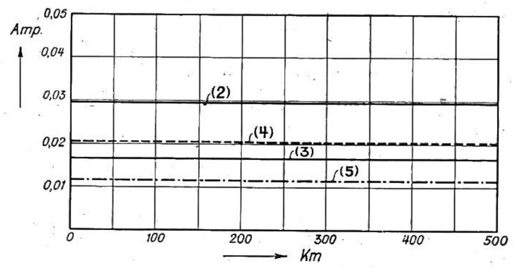

Fig. 6.

Kurve (1), $v = V_0 = 100\,V$; $i = 0$; für $R' = \infty$

„ (2), $V_0 = 100\,V$; $v_L = 0$; $i = I = 0{,}02955$ A; für $R' = 0$

„ (3), $V_0 = 100\,V$; $v_L = 43{,}4\,V$; $i = I = 0{,}01671\,A$; für $R' = 2600\,\Omega$

„ (4), $V_0 = 100\,V$; $v_L = 27{,}75\,V$; $i = I = 0{,}02135\,A$; für $R' = 1300\,\Omega$

„ (5), $V_0 = 100\,V$; $v_L = 60{,}6\,V$; $i = I = 0{,}01165\,A$; für $R' = 5200\,\Omega$.

2. Mit Hinsicht auf die Anwendung in der Messtechnik dürfte es interessant sein, auch den Fall wo g nicht $= 0$ ist, d. h. den Fall der mangelhaft isolierten Leitung, zu untersuchen. Unter der Voraussetzung, dass der *stationäre Zustand* erreicht ist, reduzieren sich die Gleichungen (4) und (5) auf:

$$(17) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial x} = ri \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = gv \end{cases}$$

woraus, da v und i nur mit x variieren

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 v}{dx^2} = rgv \\ i = -\dfrac{1}{r}\dfrac{dv}{dx} \end{cases}$$

Eine einfache Betrachtung dieses Problems ergibt, da von jedem Element der Leitung sich Stromfäden ablösen, dass einerseits die Stromstärke für $x = 0$ ein Maximum und für $x = \mathrm{L}$ ein Minimum ist, und anderseits, dass an Stelle der konstanten Abnahme des Spannungsgefälles der Linie im ersten Falle, eine stetige Verkleinerung der Spannungsabnahme vom Anfang der Leitung $x = 0$, bis an das Ende $x = L$ tritt. Die Gleichung

$$(18) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = rgv$$

hat als Integral

$$v = A\varepsilon^{m_1 x} + B\varepsilon^{m_2 x}$$

in welchem m_1 und m_2 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$m^2 = rg$$

sind, welche wir aus Gleichung (18) durch Einsetzen von ε^{mx} an Stelle von v erhalten. Wir haben also

$$m = \pm\sqrt{rg}\,, \text{ woraus}$$
$$m_1 = \sqrt{rg}\,,\ m_2 = -\sqrt{rg}\cdot$$

und infolgedessen:

$$v = A\varepsilon^{\sqrt{rg}\cdot x} + B\varepsilon^{-\sqrt{rg}\cdot x}.$$

$$\text{und} \quad i = -\frac{1}{r}\frac{dv}{dx} = \sqrt{\frac{g}{r}}\left[B\varepsilon^{-\sqrt{rg}\cdot x} - A\varepsilon^{\sqrt{rg}\cdot x}\right]$$

was wir einfacher schreiben:

(19)
$$\begin{cases} v = A\varepsilon^{\beta x} + B\varepsilon^{-\beta x} \\ i = \dfrac{1}{R_0}\left[B\varepsilon^{-\beta x} - A\varepsilon^{\beta x}\right] \end{cases}$$

indem wir unter β den *reellen* Wert

(20)
$$\beta = \sqrt{rg}$$

und unter R_0 den *reellen* Wert

(21)
$$R_0 = \sqrt{\frac{r}{g}}\cdot \qquad \text{verstehen.}$$

A und B sind Integrationskonstanten und hängen von den Grenzbedingungen ab.

Wir wollen nun verschiedene Fälle untersuchen.

I. Betrachten wir zuerst den Fall der *unendlich langen Leitung*, d. h. einer Leitung von *unendlich grossem totalen Widerstand* und nehmen wir an, dass an ihrem Anfang A, also für $x = 0$, die Spannung v_0 aufrecht erhalten werde (Fig. 4). Wir werden offenbar

$$\text{für } x = \infty \text{ haben } v = 0 = i,$$

welches auch die Bedingungen für das unendlich entfernte Ende B sein mögen. Es geht dann ohne weiteres daraus hervor:

$$A = 0$$

und da für $x = 0$ $\quad v = V_0$ und $\varepsilon^{-\beta x} = 1$ ist, so hat man:

(22)
$$\begin{cases} v = V_0\varepsilon^{-\beta x} = f(x) \\ i = \dfrac{V_0}{R_0}\varepsilon^{-\beta x} = g(x) \end{cases}$$

welche Ausdrücke zeigen, dass *Spannung* und *Strom* fortwährend um den Betrag

$$\frac{dv}{dx} = -\beta V_0\varepsilon^{-\beta x} = -\sqrt{rg}\,V_0\varepsilon^{-\beta x} \text{ für } v \qquad \text{und}$$

$$\frac{di}{dx} = -\frac{\beta}{R_0}V_0\varepsilon^{-\beta x} = -g\,V_0\varepsilon^{-\beta x} \text{ für } i$$

abnehmen, mit den Maximalwerten

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = -\sqrt{rg}\,V_0\,.$$

$$\left(\frac{di}{dx}\right)_{x=0} = -gV_0\,.$$

Anderseits sieht man, dass für $x = 0$ $\quad i = i_0 = \dfrac{V_0}{R_0}$ wird, *d. h. dass die unendlich lange Leitung, welche auch die Bedingungen für das Ende B sein mögen, an ihrem Anfang einen Strom führt, der gleich ist demjenigen, welchen die Stromquelle ab-*

geben würde, wenn sie direkt über einen konzentrierten Widerstand vom Werte $R_0 = \sqrt{\frac{r}{g}}$ *geschlossen wäre.* Dieser Widerstand R_0 wird *charakteristischer Leitungswiderstand* genannt. Zudem zeigt der Ausdruck $v = V_0 \varepsilon^{-\beta x}$ an, dass auf der *unendlich langen Leitung* die Spannung vom Werte V_0 in A auf den Wert $V_0 \varepsilon^{-\beta}$ im Punkt wo $x = 1$ und auf den Wert $V_0 \varepsilon^{-\beta L}$ im Punkt *wo* $x = L$ ist, übergeht. Der Wert $\varepsilon^{-\beta L}$ welcher für die *unendlich lange Leitung* das Verhältnis der Spannung am Punkte $x = L$ zu derjenigen am Leitungsanfang $x = 0$ ausdrückt, wird *normaler Dämpfungsfaktor* und βL *Dämpfungs-Exponent* für die Länge L genannt.

Es ist übrigens leicht einzusehen, dass:

$$\beta L = L\sqrt{rg} = \sqrt{Lr \cdot Lg} = \sqrt{R \cdot G} \text{ ist,}$$

wenn mit R der *totale Widerstand* und mit G die *totale Ableitung* der Linie von der Länge L bezeichnet werden; endlich, dass die reellen Grössen βx und βL *hyperbolische Winkel* darstellen auf Grund der wohlbekannten Beziehungen:

$$\sin h \cdot x = \frac{\varepsilon^{x} - \varepsilon^{-x}}{2}$$

und

$$\cos h \cdot x = \frac{\varepsilon^{x} + \varepsilon^{-x}}{2}$$

Die Grössen βx oder βL werden dementsprechend auch als *hyperbolische Winkel der Leitung in den Abständen s oder L* bezeichnet.

Von diesem Begriff, welcher für die Rechnung äusserst bequem ist, Gebrauch machend, werden wir die Beziehungen (22) in die Form umschreiben:

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} v &= V_0 \left[\cos h \cdot \beta x - \sin h \cdot \beta x\right] = f(x) \\ i &= \frac{V_0}{R_0} \left[\cos h \cdot \beta x - \sin h \cdot \beta x\right] = \varphi(x) \end{aligned} \right\}$$

II. Nachdem wir nun an Hand des Falles der unendlich langen Leitung die Definition der *charakteristischen Grösse Ro* gegeben haben, gehen wir über zur Behandlung der *Leitung von endlicher Länge L*, mit dem Widerstand r und der *Ableitung g* pro Längeneinheit, welche an ihrem Ende B über den konzentrierten Widerstand R', der keine Ableitungsverluste habe, geschlossen ist. Es werde wiederum mit v_0 die Spannung am Leitungsanfange, für $x = 0$, bezeichnet. Wir haben weiter oben gesehen, dass die Ausdrücke für v und i in einem Punkte im Abstande x

$$v = A \varepsilon^{\beta x} + B \varepsilon^{-\beta x}$$

und

$$i = \frac{1}{R_0} \left[B \varepsilon^{-\beta x} - A \varepsilon^{\beta x}\right]$$

sind, in welchen A und B Integrationskonstanten bedeuten, welche wir mit Hilfe der Grenzbedingungen zu bestimmen haben. Diese letzteren sind

$$v = V_0, \text{ für } x = 0 \text{ und}$$
$$v = v_L = R' i_L, \text{ für } x = L$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Ausdrücke für v und i erhalten wir zwei Gleichungen für die Bestimmung von A und B:

$$V_0 = A + B$$

und $$v_L = A \varepsilon^{\beta L} + B \varepsilon^{-\beta L} = \frac{R'}{R_0} \left[B \varepsilon^{-\beta L} - A \varepsilon^{\beta L}\right]$$

woraus man leicht erhält

$$A = V_0 \frac{\frac{R'}{R_0} - 1}{\frac{R'}{R_0} - 1 + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L}}$$

und

$$B = V_0 \frac{\left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L}}{\frac{R'}{R_0} - 1 + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L}}$$

was ergibt:

$$v = \frac{V_0}{\frac{R'}{R_0} - 1 + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L}} \left[\left(\frac{R'}{R_0} - 1\right) \varepsilon^{\beta x} + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L} \varepsilon^{-\beta x}\right] = f(x)$$

und

$$i = \frac{V_0}{R_0 \left\{\frac{R'}{R_0} - 1 + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L}\right\}} \left[\left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L} \varepsilon^{-\beta x} - \left(\frac{R'}{R_0} - 1\right) \varepsilon^{\beta x}\right] = \varphi (x)$$

Diese beiden Ausdrücke können wesentlich einfacher geschrieben werden, weil

$$\frac{R'}{R_0} - 1 + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L} = \varepsilon^{\beta L} \left[\left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{\beta L} + \left(\frac{R'}{R_0} - 1\right) \varepsilon^{-\beta L}\right]$$

$$= 2\,\varepsilon^{\beta L} \left[\frac{R'}{R_0} \left(\frac{\varepsilon^{\beta L} + \varepsilon^{-\beta L}}{2}\right) + \frac{\varepsilon^{\beta L} - \varepsilon^{-\beta L}}{2}\right]$$

$$= 2\,\varepsilon^{\beta L} \left[\frac{R'}{R_0} \cos h \cdot \beta L + \sin h \cdot \beta L\right]$$

und analog

$$\left(\frac{R'}{R_0} - 1\right) \varepsilon^{\beta x} + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L} \varepsilon^{-\beta x} = 2\,\varepsilon^{\beta L} \left[\frac{R'}{R_0} \cos h \cdot \beta (L - x) + \sin h \cdot \beta (L - x)\right]$$

und

$$\left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L} \varepsilon^{-\beta x} - \left(\frac{R'}{R_0} - 1\right) \varepsilon^{\beta x} = 2\,\varepsilon^{\beta L} \left[\frac{R'}{R_0} \sin h \cdot \beta (L - x) + \cos h \cdot \beta (L - x)\right]$$

woraus durch Einsetzen dieser Werte in die vorher für v und i gefundenen Ausdrücke:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & v = V_0 \frac{R' \cos h \cdot \beta (L - x) + R_0 \sin h \cdot \beta (L - x)}{R' \cos h \cdot \beta L + R_0 \sin h \cdot \beta L} = f(x) \\ \text{und} \quad & i = \frac{V_0}{R_0} \frac{R' \sin h \cdot \beta (L - x) + R_0 \cos h \cdot \beta (L - x)}{R' \cos h \cdot \beta L + R_0 \sin h \cdot \beta L} = \varphi(x) \end{aligned} \right.$$

gewonnen wird. Diese Ausdrücke gestatten nun leicht die Ermittlung der Spannung v und der Stromstärke i für jeden Punkt einer gegebenen und durch die Konstanten β und R_0 charakterisierten, an ihrem Ende über einen Widerstand R geschlossenen Leitung.

Betrachten wir einige Spezialfälle:

II. a. *Am Ende offene Leitung, d. h.* $R' = \infty$.

Durch Division von Zähler und Nenner der beiden Ausdrücke (24) durch R' und durch den Uebergang auf $R' = \infty$, erhält man:

$$(25)\quad \begin{cases} v = V_0 \dfrac{\cos h \cdot \beta(L-x)}{\cos h \cdot \beta L} = V_0[\cos h \cdot \beta x - tg\, h \cdot \beta L \sin h \cdot \beta x] \\ \text{und} \quad i = \dfrac{V_0}{R_0} \dfrac{\sin h \cdot \beta(L-x)}{\cos h \cdot \beta L} = \dfrac{V_0}{R_0}[tg\, h \cdot \beta L \cos h \cdot \beta x - \sin h \cdot \beta x] \end{cases}$$

und, speziell

$$(26)\quad \begin{cases} v = v_0 = V_0 \\ \text{und} \quad i = i_0 = \dfrac{V_0}{R_0} \dfrac{1}{cotg\, h \cdot \beta L} = \dfrac{V_0}{R_0} tg\, h \cdot \beta L, \ \textbf{für } x = 0 \end{cases}$$

sodann:

$$(27)\quad \begin{cases} v = v_L = \dfrac{V_0}{\cos h \cdot \beta L} = V_0 \sec h \cdot \beta L \\ \text{und} \quad i = i_L = 0, \qquad \textbf{für } x = L \end{cases}$$

Man ersieht hieraus, dass eine, am Ende B ($R' = \infty$) offene Leitung von der Länge L mit am Anfang A konstant gehaltener Spannung V_0 und mit den charakteristischen Grössen R_0 und *β oder mit dem hyperbolischen Winkel βL, in B eine Spannung*

$$(28)\qquad v_L = \frac{V_0}{\cos h \cdot \beta L} = V_0 \sec h \cdot \beta L = V_0 \sec h \cdot \sqrt{R \cdot G}.$$

aufweist und am Anfang A einen Strom führt, der gleich ist demjenigen, welchen die Stromquelle liefern würde, wenn sie über einen in A konzentrierten Widerstand von der Grösse

$$(29)\qquad R_A = R_0\, cotg\, h \cdot \beta L = \sqrt{\frac{r}{g}}\, cotg\, h \cdot \sqrt{R \cdot G}.$$

geschlossen wäre.

Da sec $h \cdot \beta L$ von 1 bis 0 und $cotg\, h \cdot \beta L$ von ∞ bis 1 geht, wenn βL von 0 an zunimmt, so sieht man, dass

$$\begin{aligned} v_L &= V_0 \text{ wird für } L = 0 \\ \text{und } v_L &= 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad L = \infty, \text{ während} \\ R_A &= \infty \quad \text{„} \quad \text{„} \quad L = 0 \\ \text{und } R_A &= R_0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad L = \infty, \end{aligned}$$

was mit den vorher erhaltenen Resultaten übereinstimmt.

Der Betrag, um welchen die Spannung mit zunehmendem x abnimmt, besitzt sein Maximum am Anfang A, er ist

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = -\beta V_0\, tg\, h \cdot \beta L$$

während für einen beliebigen Punkt x gilt:

$$\frac{dv}{dx} = \beta V_0 [\sin h \cdot \beta x - tg\, h \cdot \beta L \cos h \cdot \beta x].$$

II b. *Am Ende B kurzgeschlossene Leitung, d. h.* $R' = 0$.

Wenn wir in den Ausdrücken (24) $R' = 0$ setzen, so erhalten wir:

$$(30)\quad \begin{cases} v = V_0 \dfrac{\sin h \cdot \beta[L-x]}{\sin h \cdot \beta L} = V_0[\cos h \cdot \beta x - cotg\, h \cdot \beta L \sin h \cdot \beta x] \\ \text{und} \quad i = \dfrac{V_0 \cos h \cdot \beta[L-x]}{R_0 \ \sin h \cdot \beta L} = \dfrac{V_0}{R_0} [cotg\, h \cdot \beta L \cos h \cdot \beta x - \sin h \cdot \beta x] \end{cases}$$

welche Ausdrücke uns anzeigen, wie die Spannung v und der Strom i mit x sich ändern, und insbesondere dass:

(31)
$$\begin{cases} v = v_0 = V_0 \\ \text{und } i = i_0 = \dfrac{V_0}{R_0} cotg\,h \cdot \beta\, L = \dfrac{V_0}{R_0 tg\,h \cdot \beta\, L}, \text{ für } x = 0 \end{cases}$$

dann:

(32)
$$\begin{cases} v = v_L = 0 \\ \text{und } i = i_L = \dfrac{V_0}{R_0} \dfrac{1}{sin\,h \cdot \beta\, L} = \dfrac{V_0}{R_0} cosec\,h \cdot \beta\, L, \text{ für } x = L. \end{cases}$$

und *man ersieht hieraus, dass eine am Ende B kurzgeschlossene Leitung von der Länge L mit am Anfang A konstant gehaltener Spannung V_0 und den charakteristischen Grössen R_0 und β oder dem hyperbolischen Winkel βL am Anfang A einen Strom*

$$i_0 = \frac{V_0}{R_0 tg\,h \cdot \beta L}$$

führt, der gleich demjenigen ist, welchen die Stromquelle von konstanter Spannung V_0 in einem in A konzentrierten Widerstand

(33)
$$R_A = R_0\, tg\,h \cdot \beta\, L = \sqrt{\frac{r}{g}}\, tg\,h \cdot \sqrt{R \cdot G}.$$

liefern würde, während sich in B, dem Orte des Kurzschlusses, ein Strom von der Stärke

$$i_L = \frac{V_0}{R_0\, sin\,h \cdot \beta\, L}$$

ergibt, gleich demjenigen, welchen die gleiche Stromquelle von konstanter Spannung V_0 in einem ebenfalls in A konzentrierten Widerstand

$$R_{BA} = R_0\, sin\,h \cdot \beta\, L = \sqrt{\frac{r}{g}}\, sin\,h \cdot \sqrt{R \cdot G.}$$

erzeugen würde.

Das Verhältnis $\frac{i_0}{i_L} = cos\,h \cdot \beta\, L$ ist gleich demjenigen der Spannungen $\frac{v_0}{v_L}$ im Falle der am Ende B offenen Leitung. Man sieht leicht ein, dass

$$R_A = R_0 \text{ wird, für } L = \infty$$

und

$$R_{BA} = \infty \quad \text{„} \quad \text{„} \quad L = \infty$$

so dass, wenn L über alle Massen gross wird, i_0 dem Werte

$$i_{0_{L=\infty}} = \frac{V_0}{R_0}$$

und

$$i_{L_{L=\infty}} = 0$$

zustrebt, wie vorhin bereits gefunden.

Der Betrag der Spannungsabnahme erreicht seinen Höchstwert für $x = 0$, d. h. am Anfang A der Leitung. Er ist

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = -\beta\, V_0\, cotg\,h \cdot \beta\, L$$

während für einen beliebigen Punkt x gilt:

$$\frac{dv}{dx} = \beta\, V_0 [sin\,h \cdot \beta\, x - cotg\,h \cdot \beta\, L\, cos\,h \cdot \beta\, x].$$

Man sieht leicht dass, da $cotg\,h \cdot \beta\, L$ grösser als $tg\,h \cdot \beta\, L$ ist, der Betrag der Spannungsabnahme, obwohl er dem absoluten Werte nach in beiden Fällen mit wachsendem x stetig abnimmt, doch immer grösser ist für die in B kurzgeschlossene, als für die in B offene Leitung.

II c. *Am Ende B über einen Widerstand endlicher, von 0 verschiedener Grösse geschlossene Leitung; d. h.* $R' > 0$.

Durch Einsetzen eines bestimmten Wertes R' in die Ausdrücke (24) und Variation von x zwischen den Werten 0 und L, kann man leicht die zugehörigen Werte von v und i für alle Punkte der Leitung berechnen.

Durch aufmerksame Betrachtung der Ausdrücke (24) erkennt man, dass für $R' = R_0$ wir folgende Werte für v und i erhalten:

$$v = V_0 \frac{\cos h \cdot \beta[L-x] + \sin h \cdot \beta[L-x]}{\cos h \cdot \beta L + \sin h \cdot \beta L}$$

$$i = \frac{V_0}{R_0} \frac{\sin h \cdot \beta[L-x] + \cos h \cdot \beta[L-x]}{\cos h \cdot \beta L + \sin h \cdot \beta L} = \frac{v}{R_0}$$

Da aber:

$$\sin h \cdot \beta[L-x] = \sin h \cdot \beta L \cos h \cdot \beta x - \cos h \cdot \beta L \sin h \cdot \beta x$$

und $$\cos h \cdot \beta[L-x] = \cos h \cdot \beta L \cos h \cdot \beta x - \sin h \cdot \beta L \sin h \cdot \beta x$$

haben wir:

$$\sin h \cdot \beta[L-x] + \cos h \cdot \beta[L-x] = [\cos h \cdot \beta L + \sin h \cdot \beta L][\cos h \cdot \beta x - \sin h \cdot \beta x]$$

und es werden daher:

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} v &= V_0[\cos h \cdot \beta x - \sin h \cdot \beta x] = V_0 \varepsilon^{-\beta x} . \\ \text{und} \quad i &= \frac{V_0}{R_0}[\cos h \cdot \beta x - \sin h \cdot \beta x] = \frac{V_0}{R_0}\varepsilon^{-\beta x} = I_0 \varepsilon^{-\beta x} \end{aligned} \right.$$

Wir finden so die gleichen Ausdrücke wieder wie wir sie für den Fall der unendlich langen Leitung mit den charakteristischen Grössen R_0 und β hatten.

Man erkennt hieraus also die interessante Tatsache, dass eine Leitung mit den charakteristischen Grössen R_0 und β, von beliebiger Länge L und an ihrem Ende über einen von Ableitung freien Widerstand, gleich dem charakteristischen R_0 der Leitung, geschlossen, sich genau gleich verhält wie eine unendlich lange Leitung mit den charakteristischen Grössen R_0 und β. In einem Punkte im Abstand x vom Anfang besitzen Spannung und Stromstärke die gleichen Werte, die sie im gleichen Punkte einer von A aus sich ins unendliche erstreckenden Leitung hätten.

Wenn aber R' vom charakteristischen Widerstande R_0 verschieden ist, müssen, damit man für die Rechnung die Tafeln der Hyperbel-Funktionen bequem benützen kann, die zwei Fälle $R' < R_0$ und $R' > R_0$ unterschieden werden.

1. Im Falle $R' < R_0$ wird man setzen:

$$\left. \begin{aligned} tg h \cdot \delta_1 &= \frac{R'}{R_0} \\ \text{oder} \quad \delta_1 &= arctg h \cdot \frac{R'}{R_0} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Die Ausdrücke für v und i können dann geschrieben werden:

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} v &= V_0 \frac{\sin h[\beta(L-x) + \delta_1]}{\sin h \cdot [\beta L + \delta_1]} \\ \text{und} \quad i &= \frac{V_0}{R_0} \frac{\cos h[\beta(L-x) + \delta_1]}{\sin h[\beta L + \delta_1]} \end{aligned} \right.$$

woraus

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} v &= v_0 = V_0 \\ \text{und} \quad i &= i_0 = \frac{V_0}{R_0} \cot g h[\beta L + \delta_1], \text{ für } x = 0 \end{aligned} \right.$$

sodann:

$$v = v_L = V_0 \frac{\sin h \cdot \delta_1}{\sin h \cdot [\beta L + \delta_1]}$$

$$\text{und} \quad i = i_L = \frac{V_0}{R_0} \frac{\cos h \cdot \delta_1}{\sin h \cdot [\beta L + \delta_1]}, \quad \text{für } x = L.$$

woraus unmittelbar hervorgeht:

$$(39) \quad \begin{cases} \dfrac{v_L}{v_0} = \dfrac{\sin h \cdot \delta_1}{\sin h \cdot \beta L \cos h \cdot \delta_1 + \cos h \cdot \beta L \sin h \cdot \delta_1} = \dfrac{1}{\sin h \cdot \beta L \operatorname{cotg} h \cdot \delta_1 + \cos h \cdot \beta L} \\ \text{und} \quad \dfrac{i_L}{i_0} = \dfrac{I_L}{I_0} \dfrac{\cos h \cdot \delta_1}{\cos h \cdot \beta L \cos h \cdot \delta_1 + \sin h \cdot \beta L \sin h \cdot \delta_1} = \dfrac{1}{\cos h \cdot \beta L + tg h \cdot \delta_1 \sin h \cdot \beta L} \end{cases}$$

Da anderseits:

$$\frac{v_L}{v_0} = \frac{i_L}{i_0} = \varepsilon^{-\beta L} = \frac{1}{\cos h \cdot \beta L + \sin h \cdot \beta L}, \quad \text{für } R' = R_0 \text{ ist,}$$

sieht man, dass (da $\operatorname{cotg} h \cdot \delta$ stets grösser und $tg h \cdot \delta$ stets kleiner als 1 ist) für den Fall $R' < R_0$

$$\left(\frac{v_L}{v_0}\right)_{R' < R_0} < \left(\frac{v_L}{v_0}\right)_{R' = R_0}$$

$$\text{und} \quad \left(\frac{i_L}{i_0}\right)_{R' < R_0} > \left(\frac{i_L}{i_0}\right)_{R' = R_0} \quad \text{ist.}$$

Wenn wir nun mit Θ_1 einen Dämpfungs-Exponenten bezeichnen der demjenigen der Leitung von der Länge L und den charakteristischen Grössen R_0 und β, über einen Widerstand $R' < R_0$ geschlossen, *äquivalent* ist, so wird

$$\left(\frac{v_L}{v_0}\right)_{R' < R_0} = \varepsilon^{-\Theta_{1v}}$$

$$\text{und} \quad \left(\frac{i_L}{i_0}\right)_{R' < R_0} = \varepsilon^{-\Theta_{1i}} \quad \text{und wir erhalten:}$$

$$(40) \quad \begin{cases} \Theta_{1v} > \beta L \\ \text{und} \quad \Theta_{1i} < \beta L \end{cases}$$

Es geht daraus hervor, dass eine Leitung mit den charakteristischen Grössen R_0 und β, oder dem hyperbolischen Winkel βL, wenn sie über einen Widerstand R', der kleiner ist als der charakteristische Leitungswiderstand R_0 geschlossen wird, für die Spannungen einen äquivalenten Dämpfungsfaktor $\varepsilon^{-\Theta_{1v}}$ besitzt der kleiner ist (stärker ausgeprägte Dämpfung) *als der normale $\varepsilon^{-\beta L}$ der Leitung, während der äquivalente Dämpfungsfaktor $\varepsilon^{-\Theta_{1i}}$ für die Ströme grösser ist* (*schwächer* ausgeprägte Dämpfung) *als der normale $\varepsilon^{-\beta L}$ der Leitung.*

2. Im Falle $R' > R_0$ kann gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} h \cdot \delta_2 &= \frac{R'}{R_0} \\ \text{oder} \quad \delta_2 &= \operatorname{arc} tg h \cdot \frac{R_0}{R'} \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

und durch ähnliche Umrechnungen wie für Fall 1 durchgeführt, gewinnt man die Verhältnisse:

$$(42) \quad \begin{cases} \dfrac{v_L}{v_0} = \dfrac{\cos h \cdot \delta_2}{\cos h [\beta L + \delta_2]} = \dfrac{1}{\cos h \cdot \beta L + tg h \cdot \delta_2 \sin h \cdot \beta L} \\ \text{und} \quad \dfrac{i_L}{i_0} = \dfrac{\sin h \cdot \delta_2}{\sin h [\beta L + \delta_2]} = \dfrac{1}{\sin h \cdot \beta L \operatorname{cotg} h \cdot \delta_2 \cos h \cdot \beta L} \end{cases}$$

und da $tg\,h \cdot \delta_2$ stets kleiner, und $cotg\,h \cdot \delta_2$ stets grösser als 1 ist, sieht man, dass

$$\left(\frac{v_L}{v_0}\right)_{R' > R_0} > \left(\frac{v_L}{v_0}\right)_{R' = R_0}$$

und
$$\left(\frac{i_L}{i_0}\right)_{R' > R_0} < \left(\frac{i_L}{i_0}\right)_{R' = R_0} \quad \text{ist.}$$

Durch Anwendung des gleichen Verfahrens wie vorhin, d. h. durch setzen von:

$$\left(\frac{v_L}{v_0}\right)_{R' > R_0} = \varepsilon^{-\theta_{2v}}$$

und
$$\left(\frac{i_L}{i_0}\right)_{R' > R_0} = \varepsilon^{-\theta_{2i}}$$

sieht man dass

(43)
$$\begin{cases} \theta_{2v} < \beta L \\ \theta_{2i} > \beta L \end{cases}$$

d. h. dass eine Leitung mit den charakteristischen Grössen R_0 und β, oder dem hyperbolischen Winkel βL, wenn sie über einen Widerstand R' der grösser ist als der charakteristische Leitungs-Widerstand R_0 geschlossen wird, für die Spannungen einen äquivalenten Dämpfungsfaktor $\varepsilon^{-\theta_{2v}}$ besitzt, der grösser ist (schwächer ausgeprägte Dämpfung) *als der normale $\varepsilon^{-\beta L}$ der Leitung, während der äquivalente Dämpfungsfaktor $\varepsilon^{-\theta_{2i}}$ für die Ströme kleiner ist (stärker* ausgeprägte Dämpfung) *als der normale $\varepsilon^{-\beta L}$ der Leitung.*

Alle diese Resultate sind in den Figuren 7 und 8 dargestellt, die sich auf einen Stromkreis, wie er in Fig. 4 gezeichnet ist, beziehen und dessen Konstanten sind:

$$r = 6{,}77\,\Omega \text{ pro km}$$
$$g = 1 \cdot 10^{-6} \text{ mho pro km}$$
$$\beta = \sqrt{rg} = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$$
$$R_0 = \sqrt{\frac{r}{g}} = 2600\,\Omega$$
$$L = 500 \text{ km}$$
$$\beta L = 1{,}3$$

Die Spannung am Leitungsanfang ist stets als konstant vorausgesetzt und beträgt für alle Fälle 100 Volt.

Die fünf Kurven stellen folgende Fälle dar:

Kurve (1), unendlich lange Leitung: $v_0 = 100$ V; $v_L = 27{,}3$ V; $i_0 = 0{,}0386$ A
$i_L = 0{,}0104$ A

„ (2), Leitung von 500 km Länge, $R' = \infty$; $v_0 = 100$ V; $v_L = 50{,}8$ V; $i_0 = 0{,}0336$ A
$i_L = 0$

„ (3), Leitung von 500 km Länge, $R' = 0$; $v_0 = 100$ V; $v_L = 0$; $i_0 = 0{,}0446$ A
$i_L = 0{,}0227$ A

„ (4), Leitung von 500 km Länge,
$R' = \frac{R'}{2} = 1300\,\Omega$; $v_0 = 100$ V; $v_L = 18{,}4$ V; $i_0 = 0{,}0402$ A
$i_L = 0{,}0144$ A

„ (5), Leitung von
500 km Länge, $R' = 2R_0 = 5200\,\Omega$; $v_0 = 100$ V; $v_L = 35{,}4$ V; $i_0 = 0{,}0366$ A
$i_L = 0{,}0068$ A

„ (6), Leitung von
500 km Länge, $R' = R_0 = 2600\,\Omega$; $v_0 = 100$ V; $v_L = 27{,}3$ V; $i_0 = 0{,}0386$ A
fällt mit Kurve (1) zusammen. $i_L = 0{,}0104$ A

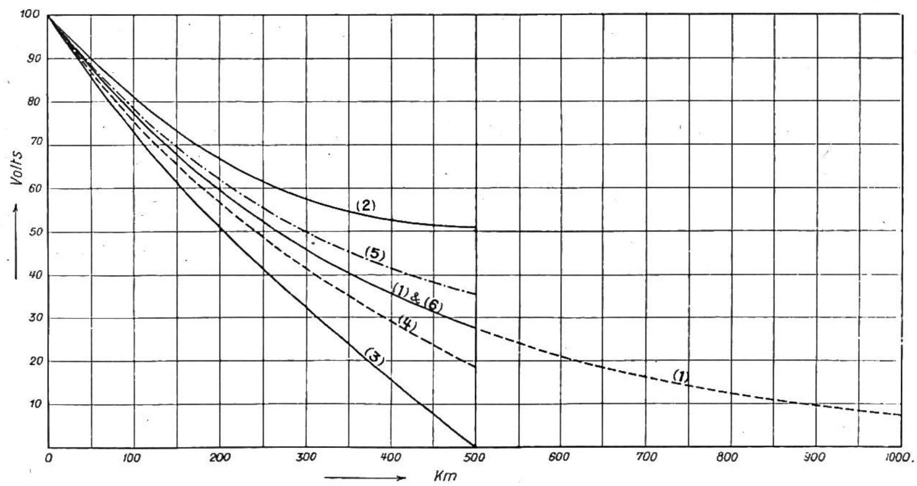

Fig. 7 v = f (x)

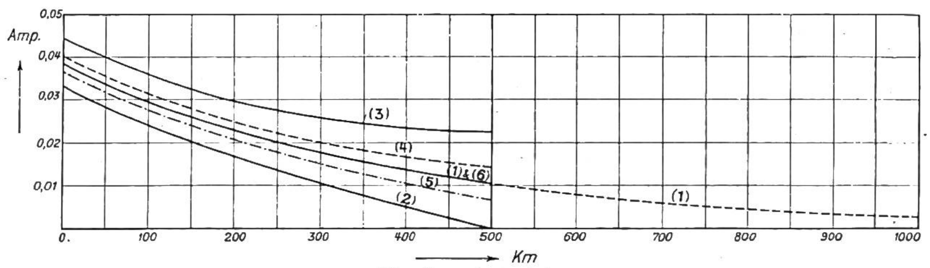

Fig. 8. i = g (x)

Da für die Figuren 7 und 8 der gleiche Maasstab verwendet wurde wie für die Figuren 5 und 6, die sich auf einen mit dem soeben betrachteten identischen Stromkreis, aber mit der Annahme $g = 0$, beziehen, ist es ohne weiteres möglich, den Einfluss der Ableitung auf die Verteilung der Ströme und Spannungen längs der Leitung zu erkennen.

Das soeben behandelte Problem würde noch zur Erwähnung von zahlreichen anderen interessanten Tatsachen und Bemerkungen Anlass bieten. Wir werden es aber bei den gemachten bewenden lassen, indem wir auf den eingangs genannten Zweck hinweisen, den diese Untersuchung der *Gleichströme im Beharrungszustand* verfolgen sollte, nämlich, dem Leser als Vorbereitung für das schwieriger zu behandelnde Problem der *Wechselströme im Beharrungszustande* zu dienen.

Wechselströme.

Wir können hier bei der Behandlung der Wechselströme im Beharrungszustande natürlich nicht auf viele Einzelheiten eingehen. Es wird angesichts des von uns verfolgten Zweckes genügen, einige der wichtigsten Grundbegriffe in Erinnerung zu rufen und vor allem einiges über die verschiedenen Darstellungsweisen von sinusförmig verlaufenden Wechselgrössen zu sagen.

Eine Wechselgrösse, z. B. eine mit der Zeit sinoidal veränderliche elektromotorische Kraft (E. M. K.) e wird durch die einfache periodische Funktion

$$e = E_m \sin(\omega t - \alpha) = E\sqrt{2} \sin(2\pi f t - \alpha) = E\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \alpha\right) \tag{44}$$

dargestellt, in welcher E_m die *Amplitude* von e, E deren *Effektivwert*, f deren *Frequenz*, T deren *Periode*, ω deren *Pulsation* (Winkelgeschwindigkeit wenn die Polpaarzahl $= 1$ ist) und $\omega t - \alpha$ ihre *Phase* bedeuten. Der Winkel α, der positiv oder negativ sein kann, stellt die *Phasen-Verschiebung* von e gegen eine andere einfache periodische oder sinoidal wechselnde Grösse $y = Y_m \sin(\omega t)$ dar, deren Phase als Ausgangspunkt gewählt wird.

Eine solche E. M. K. kann geometrisch in der Ebene dargestellt werden, entweder durch eine Sinuslinie, welche als Abscissenaxe eine unendliche Gerade Ox auf der die Zeit oder die Winkel ωt und als Ordinatenaxe eine zu Ox senkrechte Gerade Oy besitzt, zu welcher parallel die Werte der Funktion e (Fig. 9) abgetragen werden, oder durch einen Vektor OA von der Länge E oder E_m, vom Mittelpunkt O ausgehend und einen Winkel α mit einer horizontalen geraden Ox bildend, deren Richtung der Phase der Vergleichsgrösse y entspricht (Fig. 10). Da die meisten zu lösenden Aufgaben die Ermittelung von Effektivwerten, Phasen oder Phasenverschiebungen bezwecken, wird diese zweite Darstellungsweise (Vektoren, deren Länge den Effektivwerten proportional sind) bei weitem häufiger verwendet, entweder unmittelbar als Rechnungsart oder für die Konstruktion graphischer Figuren, die mit Hilfe der Trigonometrie die Aufstellung der gesuchten Beziehungen für Grössenwerte und Phasen ermöglichen. So wird man z. B. für einen Stromkreisteil mit Widerstand R_{AB} und Selbstinduktion L_{AB}, die zur Aufrechterhaltung eines Stromes i, dessen Effektivwert I ist, also $i = I \cdot \sqrt{2}\, sin\, (\omega t)$ zwischen den Punkten A und B nötige Potentialdifferenz V_{AB} bestimmen können.

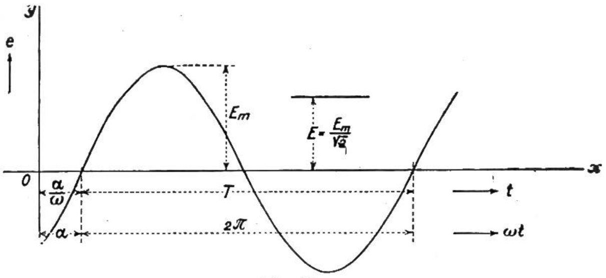

Fig. 9.

Die für diesen Stromkreisteil geltende Gleichung ist, unter Voraussetzung dass, ausser derjenigen der Selbstinduktion, keine andere E. M. K. zwischen A und B wirke und dass der besagte Stromkreis weder Kapazität im Nebenschluss noch Ableitung besitze:

$$v_{AB} = R_{AB}\, i - \left(- L_{AB} \frac{di}{dt} \right) = R_{AB}\, i + L_{AB} \frac{di}{dt} .$$

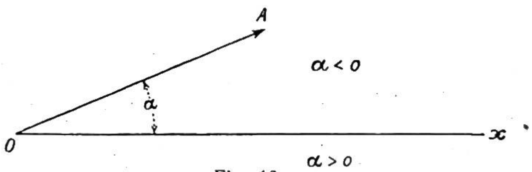

Fig. 10.

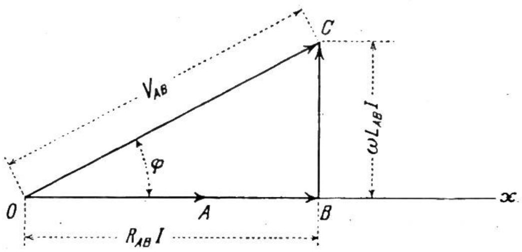

Fig. 11.

Die gesuchte Potentialdifferenz ergibt sich nun aus Fig. 11, wo die Länge des Vektors OC deren Effektivwert darstellt. Sie ist die Resultierende von $OB = R_{AB} \cdot I$, dem Effektivwert von $R_{AB} \cdot i$, in Phase mit $i\ (OA)$ und von $BC = \omega L_{AB} \cdot I$, dem Effektivwert von $L_{AB} \frac{di}{dt}$, senkrecht zur Richtung von $i\ (OA)$ und voreilend. Die Phasenverschiebung von e gegen i wird durch den Winkel $BOC = \varphi$ den $OC = V_{AB}$ mit $OA = I$ bildet gemessen. Wir ziehen hieraus den Schluss, dass die gesuchte Potentialdifferenz durch die Funktion

(45)

$$v_{AB} = OC \cdot \sqrt{2}\, sin\, (\omega\, t + \varphi) = V_{AB} \sqrt{2}\, sin\, (\omega\, t + \varphi)$$

$$= \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BC}^2}\, \sqrt{2}\, sin \left(\omega\, t + arc\, tg \frac{BC}{OB} \right) = I \sqrt{R_{AB}^2 + \omega^2 L_{BA}^2}\, \sqrt{2}\, sin \left(\omega\, t + arc\, tg \frac{\omega\, L_{AB}}{R_{AB}} \right)$$

gegeben ist.

Diese für die Behandlung aller dem soeben gelösten ähnlichen Probleme so bequeme Methode eignet sich besonders für die Bestimmung des *Zustandes am Anfang* (Ausgangspunkt) einer Uebertragungsleitung die bei gegebener Endspannung V zur Speisung eines einzelnen oder einer Gruppe von Verbrauchern dienen soll, wobei die aufgenommene

Leistung P und der Leistungsfaktor $\cos\varphi$ bekannt sind. Es liegt also der Fall eines Stromkreises AB vor, gebildet durch eine Leitung vom Widerstand R und der Selbstinduktion L in Serie mit einem einzelnen oder einer Gruppe von Verbrauchern, deren äquivalenter Widerstand $R_e = \frac{V\cos\varphi}{I}$ und deren äquivalente Selbstinduktion $L_e = \frac{V\sin\varphi}{\omega I}$ ist, womit das Problem auf den vorangehenden Fall zurückgeführt ist, so dass

$$v_{AB} = V_{AB} \cdot \sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi') \text{ ist}$$

wobei

$$(46) \quad \begin{cases} V_{AB} = \sqrt{(V\cos\varphi + RI)^2 + (V\sin\varphi + \omega LI)^2} \\ \text{und} \quad tg\varphi' = \dfrac{V\sin\varphi + \omega LI}{V\cos\varphi + RI} \end{cases} \quad \text{sind.}$$

Eine andere, im englischen und deutschen Sprachgebiet sehr beliebte Darstellungsweise für sinoidale Wechselgrössen besteht in der Verwendung der *komplexen Grössen.* Erwähnen wir kurz das Wichtigste. Zu diesem Zwecke nehmen wir zwei senkrecht aufeinander stehende Axen Ox und Oy und setzen fest, dass eine *reelle Grösse* $\pm a$ durch eine auf Ox vom Mittelpunkt O aus nach rechts oder links abgetragene entsprechende Strecke a dargestellt werde.

Welches algebraische Symbol müssen wir nun aber anwenden, um die gleiche Strecke a, nach oben oder unten auf Oy abgetragen, ausdrücken zu können? Wir werden zu diesem Zwecke ein Symbol wählen müssen, welches anzeigt, dass die Strecke $OA = a$ um O als Mittelpunkt um einen rechten Winkel gedreht worden ist, und zwar nach OB, wenn die Drehung nach links (positiver Drehsinn), und nach OB', wenn die Drehung nach rechts (negativer Drehsinn) erfolgte. Betrachten wir zunächst den ersten Fall und bezeichnen wir das gesuchte Symbol mit j, sodass ja der Grösse a, durch Strecke OB dargestellt, entspreche.

Lassen wir nun die Strecke OB nochmals im positiven Drehsinn um einen rechten Winkel sich drehen, so wird sie mit $OA' = -a$ zusammenfallen und es wird OB: $jja = j^2a$.

Es muss also $j = \sqrt{-1}$, gleich der Einheit der imaginären Zahlen sein und man erkennt, dass durch Multiplikation einer Grösse a, dargestellt durch eine Strecke OA auf Ox, mit dem Werte $j = \sqrt{-1}$ einer Drehung der Strecke OA in die Lage OB ausgedrückt durch $\sqrt{-1} \cdot a = ja$ entspricht, während die Multiplikation mit $-j = -\sqrt{-1}$ eine Drehung nach OB', ausgedrückt durch $-\sqrt{-1} \cdot a = -ja$, ergibt.

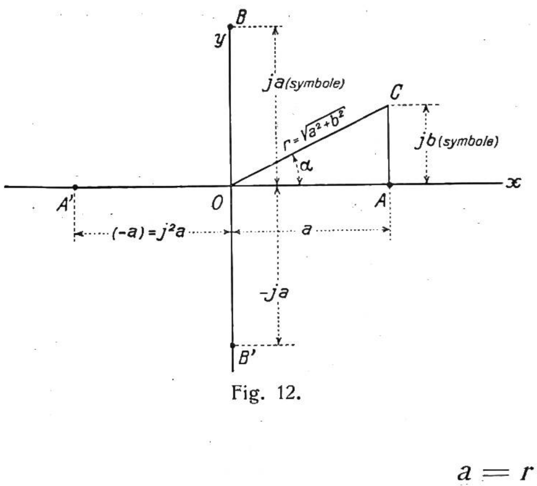

Fig. 12.

Es ist nunmehr leicht einzusehen, dass eine *komplexe* Grösse von der Form $a + jb$, bestehend aus einer reellen Grösse a (auf Ox als Strecke OA abgetragen), und einer ebenfalls reellen Grösse b (parallel Oy vom Endpunkte aus nach C abgetragen) eine vom Mittelpunkt O ausgehende Strecke OC darstellt, deren Projektionen auf die beiden Axen a und b sind. Die Länge dieser Strecke OC ist $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und der Winkel, den OG mit Ox bildet, ist gegeben durch $tg\,\alpha = \frac{b}{a}$ oder $\alpha = arc\,tg\frac{b}{a}$.

Da anderseits (Fig. 12)

$$a = r\cos\alpha \text{ ist}$$

können wir schreiben: $$b = r\sin\alpha,$$

$$a + jb = r\cos\alpha + jr\sin\alpha = r(\cos\alpha + j\sin\alpha),$$

oder weil

$$\cos \alpha = \frac{\varepsilon^{j\alpha} + \varepsilon^{-j\alpha}}{2}$$

wird:

$$\sin \alpha = \frac{\varepsilon^{j\alpha} - \varepsilon^{-j\alpha}}{2j}$$

(47) $$\boldsymbol{a + jb = r(\cos \alpha + j \sin \alpha) = r\,\varepsilon^{j\alpha}} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}\,\varepsilon^{j \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}$$

womit für die Strecke OC (Fig. 12) äquivalente komplexe Ausdrücke gewonnen sind, in welchen r der *Modul* und α das *Argument* der komplexen Grösse $a + jb$ sind.

Es können demnach die sinoidalen Wechselgrössen auch durch komplexe Zahlen ausgedrückt werden. Da also eine reelle Grösse A, dargestellt durch eine auf Ox abgetragene Strecke OA, durch Multiplikation mit der komplexen Grösse $\varepsilon^{ja} = \cos \alpha + j \sin \alpha$ in die neue Lage OA_1 übergeht, deren Richtung den Winkel α mit Ox bildet, so wird man von dieser Eigenschaft die folgenden Anwendungen machen können.

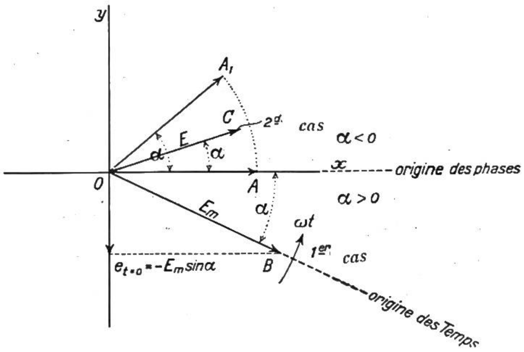

Fig. 13.

1. Man wird eine Wechselgrösse, z. B. eine sinoidale E. M. K. $e = E_m \sin (\omega t - \alpha)$ von der Amplitude E_m und der Pulsation ω, deren Momentanwerte durch die entsprechenden Projektionen eines mit der konstanten sekundlichen Winkelgeschwindigkeit ω oder der sekundlichen Umdrehungszahl f (Fig. 13) um den Mittelpunkt O rotierenden Vektors $OB = E_m$ auf eine feste Axe gegeben sind, durch den komplexen Ausdruck

(48) $$\boldsymbol{E} = E_m [\cos (\omega t - \alpha) + j \sin (\omega t - \alpha)] = E_m\,\varepsilon^{j(\omega t - \alpha)}$$

darstellen können.

2. Wenn es sich, wie dies meistens der Fall ist, darum handelt Effektivwerte, Phasen oder Phasendifferenzen von Wechselgrössen zu bestimmen, wird die gleiche E. M. K. $e = E\sqrt{2} \sin (\omega t - \alpha)$ vom Effektivwert E und mit Phasenverschiebung α, also Vektor OC, Fig. 13, auch durch den komplexen Ausdruck

(49) $$\boldsymbol{E} = E [\cos \alpha - j \sin \alpha] = E\,\varepsilon^{-j\alpha}$$

gegeben sein, worin α, wie auch im Fall 1, als algebraischer Wert ($\alpha < 0$ für OC, $\alpha > 0$ für OB, Fig. 13) aufzufassen ist.

Stellen wir uns nun als Aufgabe den Effektivwert und die Phase des Stromes zu bestimmen, der in einem lokalisierten Stromkreis (d. h. einem solchen mit konzentrierten Konstanten) mit effektivem Widerstand R, Selbstinduktion L und Kapazität C (frei von abgezweigten Kapazitäten und von Ableitung) in Serieschaltung, durch die sinoidale E. M. K. $e = E\sqrt{2} \sin (\omega t - \alpha)$ erzeugt wird. Zur Lösung dieser Aufgabe brauchen wir nur den komplexen Ausdruck für E, d. h.

$$\boldsymbol{E} = E\sqrt{2}\,\varepsilon^{j(\omega t - \alpha)}$$

durch den komplexen Ausdruck der Impedanz dieses Stromkreises, der eine Vektor-Grösse ist, also durch

$$\boldsymbol{Z} = R + j\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right] = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,\varepsilon^{\operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

zu dividieren und erhalten den gesuchten komplexen Ausdruck für den Strom i.

Er ist:

(50) $$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{E\sqrt{2}[\cos (\omega t - \alpha) + j \sin (\omega t - \alpha)]}{R + j\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]} = \frac{E\sqrt{2}\,\varepsilon^{j(\omega t - \alpha)}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,\varepsilon^{j \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}}$$

$$= \frac{E\sqrt{2}\,\varepsilon^{j(\omega t - \alpha)}}{Z\varepsilon^{j\varphi}} = \frac{E}{Z}\sqrt{2}\,\varepsilon^{j(\omega t - \alpha - \varphi)}$$

Hieraus erhalten wir i

$$i = \frac{E}{Z}\sqrt{2}\, sin\,(\omega t - \alpha - \varphi) = I\sqrt{2}\, sin\,(\omega t - \alpha - \varphi)$$

sowie

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} I &= \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{R^2 - \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega c}\right)^2}} \\ \text{und} \quad tg\,\varphi &= \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega c}}{R} \end{aligned} \right.$$

Wir wären offenbar zum gleichen Resultat gelangt, wenn wir den oben unter 2. aufgeführten vereinfachten Ausdruck als Ausgangspunkt gewählt hätten.

Die Darstellungsweise durch komplexe Grössen bietet also den Vorteil, dass für die Lösung aller sich auf sinoidale Wechselströme beziehenden Probleme von den Gesetzen für den Gleichstrom ausgegangen werden kann, z. B. vom Ohm'schen Gesetze $I = \frac{E}{Z}$ aus, in welchem I, E und Z *die komplexen Ausdrücke für i, e und für die Impedanz des Stromkreises* sind. Es können also alle Wechselstromprobleme mit Hilfe der Rechnungsmethoden für die komplexen Grössen behandelt werden. Dabei ist aber immerhin zu beachten, dass der *reelle Teil* des Produktes EI nicht etwa die *reelle Leistung* des Stromkreises darstellt, sondern dass der *reelle Teil des Produktes* sie erst ergibt, wenn im Ausdruck für E oder I das j durch $-j$ ersetzt wird.

Ferner ist noch zu erwähnen, dass

$$\boldsymbol{I} = \frac{Z}{E}\sqrt{2}\,\varepsilon^{j(\omega t - \alpha - \varphi)}$$

sich auch schreiben lässt:

$$\boldsymbol{I} = E\sqrt{2}\,\varepsilon^{j(\omega t - \alpha)}\frac{\varepsilon^{-j\varphi}}{Z} = E\sqrt{2}\varepsilon^{j(\omega t - \alpha}\frac{1}{Z}\left[cos\,\varphi - j\,sin\,\varphi\right].$$

$$(52) \quad = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}$$

woraus wir

$$(53) \quad \boldsymbol{A} = Z^{-1}\left[cos\,\varphi - j\,sin\,\varphi\right] = \frac{R}{Z^2} - j\frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{Z^2} = G - jS$$

$$= \sqrt{G^2 + S^2}\,\varepsilon^{-j\frac{S}{G}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega c}\right)^2}}\,\varepsilon^{-j\varphi}$$

erhalten. Die komplexe Grösse A heisst komplexe *Admittanz* des Stromkreises mit konzentrierten Konstanten, sein *Modul* ist gleich dem reziproken Werte des Moduls der Impedanz Z und sein Argument hat das entgegengesetzte Vorzeichen desjenigen von Z.

Anderseits heissen $G = \frac{R}{Z^2}$ *Konduktanz* und $S = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{Z^2}$ *Suszeptanz des betrachteten lokalisierten Stromkreises.*

Im weitern Verlauf dieses Aufsatzes werden wir uns je nach besserer Eignung, der einen oder andern Darstellungsweise bedienen.

(Fortsetzung folgt.)