

Zeitschrift: Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins

Herausgeber: Schweizerischer Elektrotechnischer Verein ; Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke

Band: 2 (1911)

Heft: 1

Artikel: Ueber das "Paradoxon der Impedanz"

Autor: Herzog, Josef

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1059636>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 19.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich und wird unter Mitwirkung einer vom Vorstand des S. E. V. ernannten Redaktionskommission herausgegeben.

Alle den Inhalt des „Bulletin“ betreffenden Zuschriften sind zu richten an die

Redaktion: Ing.-Consulent Dr. W. Kummer,
Mythenstrasse 15, Zürich II (Telephon 5806)

Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition und
Inserate sind zu richten an den

Verlag: Fachschriften-Verlag A.-G., Zürich
Bahnhofstrasse 61, Zürich I (Telephon 6741)

Est publié sous la direction d'une Commission de Réaction nommée par le Comité de l'A. S. E.

Ce bulletin paraît mensuellement.

Toutes les communications concernant la matière du „Bulletin“ sont à adresser à la

Rédaction: Ing.-Conseil Dr. W. Kummer
Mythenstrasse 15, Zurich II (Téléphone 5806)

Toutes les correspondances concernant les abonnements,
l'expédition et les insertions sont à adresser à

l'éditeur: Fachschriften-Verlag A.-G., Zurich
Bahnhofstrasse 61, Zurich I (Téléphone 6741)

II. Jahrgang
II^e Année

Bulletin No. 1

Januar
Janvier 1911

Ueber das „Paradoxon der Impedanz“.

Von Dipl.-Ing. Josef Herzog, Budapest.

1. In der Zeitschrift „Electrical World“ Band LVI No. 6 vom 11. August 1910 untersucht F. M. Denton den Einfluss eines veränderlichen ohmschen Nebenschlusses auf eine einfache Leiterverbindung, wie sie Abbildung 1 zeigt. Hierin bedeute C einen

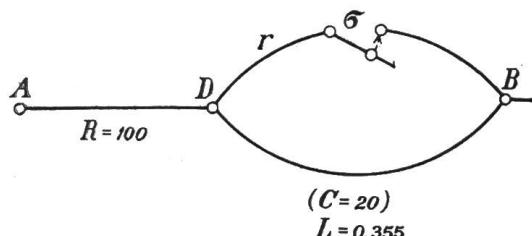


Abbildung 1. Leiterverbindung aus ohmschem Widerstand R und Zweigen r (ohmisch, veränderlich) und x (induktiv, unveränderlich). AD hat V_1 , DB V_2 und AB V als Spannungswert. Gesamtwiderstand AB sei z .

ideellen Kondensator, beispielsweise von 20 Mikrofarad und R einen induktionslosen Widerstand von beispielsweise 100 Ohm. Dem induktiven Widerstand ist ein *veränderlicher* induktionsloser Widerstand r nebengeschaltet, in dessen Zweige ein Schalter σ sitzt. Ist dieser Schalter σ geöffnet, d. h. $r = \infty$, dann ist die Intensität eines Wechselstroms von 60 Perioden in der Sekunde in der Leiterverbindung grösser, als wenn r beispielsweise 250 Ohm betragen würde. Gleicher bestünde bei Ersatz der Kapazität $C = 20$ durch eine Induktivität von $L = 0,355$ Henry.

In Abbildung 2 wird eine Kurve gezeigt, welche die Abhängigkeit zwischen dem veränderlichen Nebenschlusswiderstand r und dem Gesamtwiderstand z der Leiterverbindung

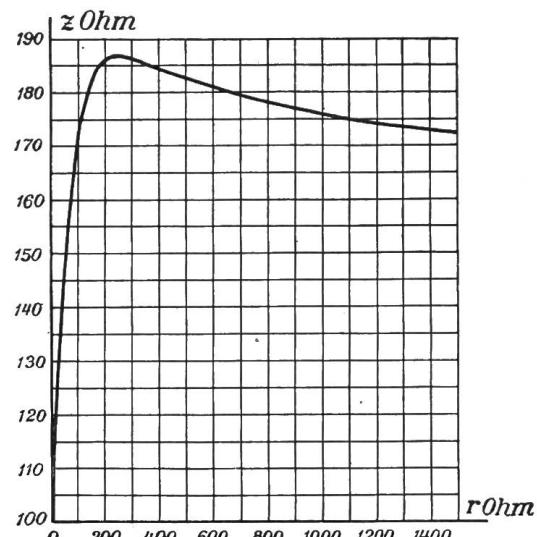
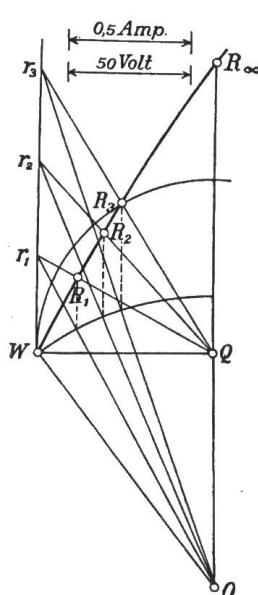


Abbildung 2. Abhängigkeit zwischen dem veränderlichen Nebenschluss r und dem Gesamtwiderstand z .

wiedergibt. Für jeden Wert von z , der grösser als 170 Ohm ist, finden sich daraus zwei Werte von r . Bei ungefähr 170 Ohm erscheint etwa das Wertpaar $r = 99$ und $r = \infty^1$, d. h. der Strom, den die Leiterverbindung beim Ein- und Ausschalten des Nebenschlusses aufnimmt, bleibt unverändert. Dieses anscheinend überraschende Resultat gab Denton Veranlassung, von einem „Paradoxon der Impedanz“ zu sprechen.

Die Spannungen und Ströme veranschaulicht Abbildung 3. \overline{OQ} stellt die Spannung V_1 und \overline{QW} den Strom durch den Kondensator C oder der Induktivität L vor. Die Massstäbe sind so gewählt worden, dass \overline{QW} auch den Spannungsverlust in R misst, der durch den Strom im Kondensator C oder der Induktivität L hervorgerufen wird. Wenn $r = \infty$, so wird die Spannung von A nach B zum Vektor \overline{OW} , wobei \overline{QW} den Strom in R misst. $\overline{Wr_1}$ ist der Strom in $r = 1000$ Ohm, $\overline{Wr_2}, \overline{Wr_3} \dots$ sind die Ströme in $\frac{1}{2} r, \frac{1}{3} r \dots$ bei einer festen Spannung V_1 . Für veränderliche Werte von r sind die Spannungen V zwischen den Knoten A und B durch $\overline{Or_1}, \overline{Or_2} \dots$ dargestellt, während die Ströme in R durch $\overline{Qr_1}, \overline{Qr_2}$ gezeigt werden. Wenn nun V als festgegeben vorausgesetzt wird, während sich V_1 verändert, so wird der Strom in R dargestellt sein durch:

\overline{QW} , wenn $r = \infty$ und durch $\overline{QR_1}$, wenn $r = r_1$ usw., wobei $\overline{QR_n} : \overline{Qr_n} = \overline{OW} : \overline{Or_n}$.



Die Ermittlung der Punkte R_1 , R_2 . . geschieht durch einen Kreis aus O mit dem Halbmesser OW . Durch die Schnitte des Kreises mit Or_1 , Or_2 . . werden Parallelstrahlen geführt, welche sich mit den Strahlen Qr_1 , Qr_2 . . in den Punkten R_1 , R_2 . . schneiden.

Die Abbildung 3 ist mit folgenden Werten gezeichnet worden:

$$R = 100, \quad C = 20 \text{ (oder } L = 0,355) \sim = 60; \quad V = 150$$

$$r_1 = 1000 \quad r_2 = 500 \quad r_3 = 333,3.$$

Wenn R einen kleineren Wert als oben erhielte, so würde der Buckel der Kurve in Abbildung 2 abflachen und bei ganz kleinen Werten würde die geschilderte Schalterscheinung überhaupt ausbleiben, weil der Widerstand zwischen D und B überhaupt verschwindet.

* * *

Abbildung 3. Spannungen und Ströme in der Leiterverbindung. $\overline{OQ} = V_1$; QW Strom durch x und auch Spannungsverlust in R .

2. Herr *H. F. Hagen* hat diese Darstellung in der Zeitschrift „*Electrical World*“, Band LVI, No. 15 vom 13. Oktober 1910 durch eine Arbeit „*Analytical Investigation of an Impedance Paradox*“ ergänzt, deren wesentlicher Inhalt folgendermassen wiedergegeben werden kann. Es bezeichne:

$$g = 1/r \text{ die Konduktanz, } b = 1/x \text{ die Suszeptanz,}$$

$$Y_{BC} = \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{x^2}} \text{ die Admittanz, } r_{BC} = \frac{g}{Y^2} = \frac{rx^2}{r^2 + x^2} \text{ und}$$

$$x_{BC} = \frac{b}{Y^2} = \frac{r^2 x}{r^2 + x^2} \text{ die Reaktanz.}$$

Die totale Resistenz vom Punkte *A* bis *C* beträgt dann nach der von *Steinmetz* eingeführten Rechnungsweise:

¹⁾ Wie die spätere Zeichnung und Rechnung zeigt, sind $z_0 = 167,5$ und $r_0 = 89,5$ die genauen Werte.

$$r_{AC} = R + r_{BC} = R + \frac{rx^2}{r^2 + x^2} \text{ und die totale Reaktanz}$$

$x_{AC} = x_{BC}$; womit sich die totale Impedanz findet mit

$$z = \sqrt{\left(R + \frac{rx^2}{r^2 + x^2}\right)^2 + \left(\frac{r^2x}{r^2 + x^2}\right)^2} \quad \quad (1)$$

Diese Gleichung (1) entspricht der Kurve der Abbildung 2:

Um den grössten und kleinsten Widerstand z_{max} und z_{min} von z und ihre beiden Werte (r') und (r'') zu finden, bilde man den Differentialquotienten $\frac{dz}{dr}$ und setze ihn Null. Daraus folgt, dass man den Zähler des so erhaltenen Bruches der Null gleichsetzen kann, woraus sich unmittelbar ergibt:

$$\left. \begin{array}{l} (r') \\ (r'') \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2R} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{2R}\right)^2 + x^2} \quad \quad (2)$$

Setzt man hierin $R = 100$; $x = 133,8$ ein, so erhält man Werte, die in Gleichung (1) substituiert auf $z_{max} = 187,4$ und $z_{min} = 250,5$ führen.

* * *

3. Diesen Darstellungen amerikanischer Autoren wollen wir nun eine solche nach einer eigenen Entwicklungsmethode folgen lassen. Sie soll die Fruchtbarkeit der elektrographischen Denk- und Zeichnungsmethode für solche Untersuchungen bekunden.

Vorerst mag aber ein Uebergang vom Vorhergehenden hergestellt werden. Die Gleichungen (1) und (2) lassen sich leicht graphisch

deuten, indem $\frac{rx^2}{r^2 + x^2}$ durch die Strecke \overline{DF} und $\frac{r^2x}{r^2 + x^2}$ durch die Strecke \overline{PF} in Abbildung 4

gemessen wird, wie sich aus den ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecken BDD' und PFD ergibt; z ist demnach die Hypotenuse des Dreiecks APF mit den Katheten \overline{AF} und \overline{EP} . Wenn der Widerstand r sich bei festem x verändert, so beschreibt der Höhenfusspunkt P einen Kreis K mit dem Mittelpunkt in O .

Kommt der Punkt P in die Mittellinie AO zu liegen (Abbildung 5), so erhält man den grössten

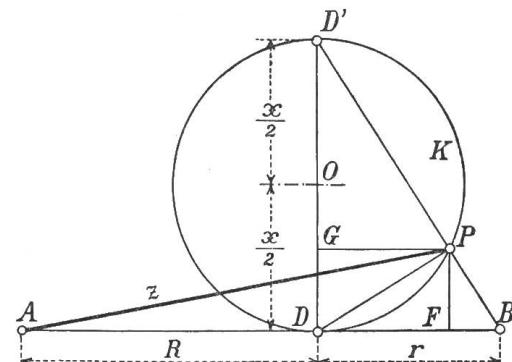


Abbildung 4. Widerstandsbild der Leiterverbindung. P beschreibt K bei veränderlichem r und festem x .

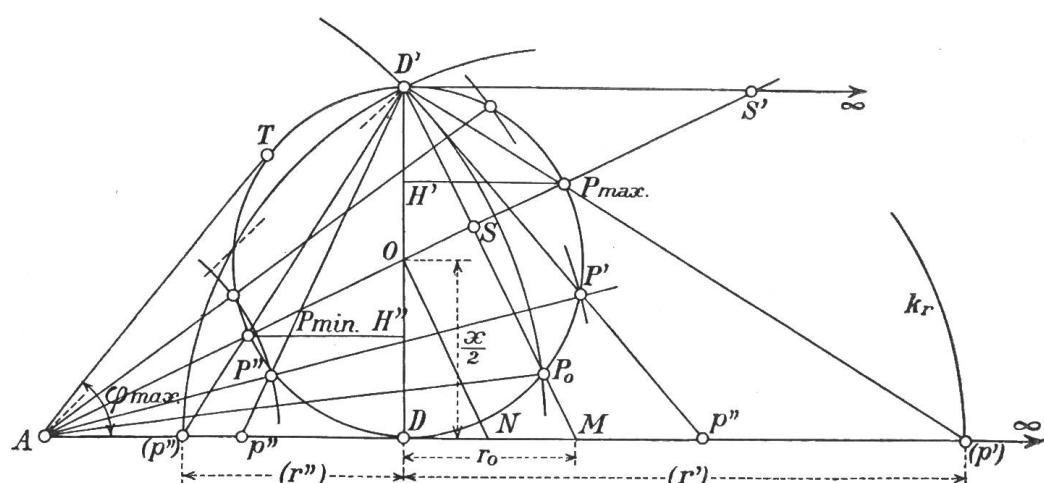


Abbildung 5. Sonderwerte des Gesamtwiderstandes z durch die Punkte P_{max} , P_{min} und P_0 .

Wert des Widerstandes z in P_{max} und den kleinsten in P_{min} und diese Extreme rechnen sich aus dem Dreiecke AOD sofort heraus:

$$\left. \begin{array}{l} z_{max} \\ z_{min} \end{array} \right\} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \pm \frac{x}{2}$$

Die diesen Grenzen entsprechenden Werte des veränderlichen Nebenschlusses (r') und (r'') finden sich zeichnerisch durch die Strahlen $D'P_{max}$ und $D'P_{min}$; r'' ist an und für sich negativ, wie man sieht. Die Werte von (r') und (r'') lassen sich auch unschwer rechnerisch hieraus ermitteln, indem man von den Hilfsstrecken $P_{max}H$, $D'H'$ und $D'H''$ und ähnlicher Dreiecke Gebrauch macht. Es findet sich die obige Formel (2), welche etwas umgeschrieben, lautet:

$$\left. \begin{array}{l} (r') \\ (r'') \end{array} \right\} = 2 \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{R} \pm \sqrt{\left[2 \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{R}\right]^2 + x^2} \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Diese Gleichung (2') besagt, dass man durch das rechtwinkelige Dreieck AON in Abbildung 5 zum Stücke $\overline{DN} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{R}$ oder durch das Lot $D'S$ auf AO zum Punkte M und dadurch zum doppelten Stücke $2 \overline{DN}$ gelangen kann. Die Hypotenuse des Dreiecks $DD'M$ aber stellt den Wurzausdruck der Formel (2') dar, demzufolge kann man aus M als Mittelpunkt einen Kreis k_r schlagen, der zu den Endpunkten (p') und (p'') von (r') und (r'') führen muss.

Wer genau zusieht, der erblickt darin nur die Folgen der vier harmonischen Strahlen aus D' zu den harmonischen Punkten $P_{min}S$ $P_{max}S'$. Da S' beim Projizieren auf AD ins Unendliche fällt, so hält M eben die Strecke ($p')$ (p'').

Die Uebereinstimmung zwischen analytischer und synthetischer Behandlung herrscht nun in jeder Hinsicht. An Einfachheit bleibt wirklich nichts mehr zu wünschen übrig — und doch kann diese Herleitung wenig befriedigen.

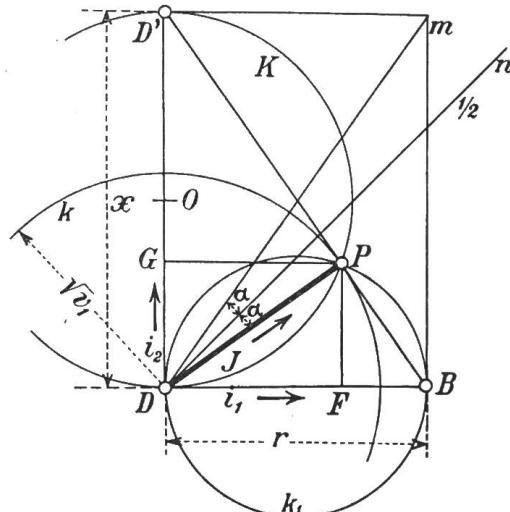
Der Elektrotechniker begehrte mit Recht eine solche Lösungsweise, die sich aus einem elektrischen Gedankengange schrittweise bis zum Schlusse aufbaut. Wie der brückenbauende Techniker seine Graphik, im mechanischen Gewande gehüllt, benützt und dadurch eine sichere Führung für sein Gedächtnis, für die Zeichnung und wenn nötig für die Rechnung gewinnt, ebenso strebt der Elektrotechniker durch eine Elektrographik Gleches zu erreichen.

Im vorliegenden Beispiele, dem „Paradoxon der Impedanz“, und in zahlreichen andern, findet sich ein solches Mittel im Satze von der zeichnerischen Parallelschaltung zweier Wechselstromwiderstände, deren Phasenunterschied 90° beträgt, also z. B. eines rein ohmschen Widerstandes r mit einem rein induktiven Widerstand x , wie in Abbildung 6.

Die aufgedrückte Spannung V_1 zwischen den Knoten D und B der nebengeschalteten Zweige r und x (Abbildung 1) ist für die Widerstandsuntersuchung gleichgültig, sie beeinflusst hier nur die Stärke der phasenverschobenen Zweitgrößen.

Abbildung 6. Zeichnerische Parallelschaltung zweier Wechselstromwiderstände, deren Phasenwinkel um 90° verschieden sind. Die Höhe DP parallel die Kathetenwiderstände und die Katheten spalten den Höhenwiderstand.

Es sei die Höhe DP (Abbildung 6) des Dreiecks DBD' gleich $\sqrt{V_1}$ (wenn V_1 gegeben wäre, so liesse sich das auch durch den Maßstab der Spannungen jederzeit erreichen).



Dann sind die auf dem Grundkreis K bezogenen reziproken Werte (bei $V_1 = 1$ sind es die Leitfähigkeiten):

$$\overline{DF} = \frac{\sqrt{V_1^2}}{\overline{DB}} = \frac{V_1}{r} = i_1 \text{ und}$$

$$\frac{DG}{D'D} = \frac{\sqrt{V_1^2}}{D'D} = \frac{V_1}{x} = i_2$$

die um 90° verschobenen Teilströme der parallelen Zweige. Ihre Zusammensetzung nach dem Parallelogramm der Kräfte führt zum Gesamtstrom J resp. zur Höhe \overline{DP} als er-setzenden Widerstand. Die Höhe eines rechtwinkeligen Dreiecks, als gerichteter Wider-stand aufgefasst, ersetzt zwei parallelgeschaltete, die durch die Katheten dieses Dreiecks dargestellt sind; umgekehrt kann man den Richtungswiderstand als Höhe eines Dreiecks in zwei parallele Widerstände, dargestellt durch die Katheten des Dreiecks, spalten. Der Gedächtnissatz mag kurz lauten: *Die Höhe parallelt die Katheten und die Katheten spalten die Höhe¹⁾.* Die Rolle, die dieser Satz für die Widerstandslehre der Elektrotechnik besitzt, ist ebenso wichtig, wie jene des Parallelogramms für die Ströme bei gegebener Spannung oder für Spannungen bei gegebenem Strom.

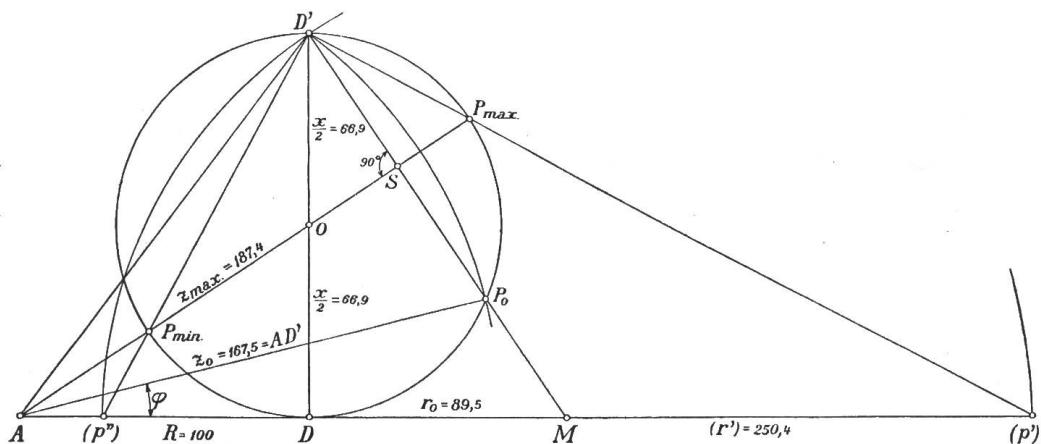


Abbildung 7. Konstruktionsblatt zum Widerstandsbild.

Für unser Beispiel heisst dies aber, dass die Höhe \overline{DP} die parallelen Widerstände r und x ersetzt. Hierzu addiert sich geometrisch der Vorschaltwiderstand $\overline{AD} = R$ und führt zu $\overline{AP} = z$ (Abbildung 4). Umgekehrt, wird durch irgend einen Widerstand ein P gewählt, so spaltet man sein DP und erhält das veränderliche r . Jeder Länge z entsprechen zwei Kreis-Schnittpunkte, die für P_{max} und P_{min} zusammenfallen (Abbildung 5). Die Wertpaare der r erfordern nur das Ziehen von Strahlen, wie aus Abbildung 5 ersichtlich. Für das besondere $z_0 = \overline{AD'}$ ist ein Wert von r *unendlich gross*, entspricht also der geöffneten Stellung des Schalters, während für den Spiegelpunkt P_0 sich r_0 als *jener merkwürdige Wert* verrät, der gleiche Ströme für beide Zustände der Leiterverbindung wegen des gleichgrossen Widerstandes z erzeugt. Die masstäblichen Verhältnisse der obigen Werte erhält man bei Durchführung auf Millimeterpapier, wonach Abbildung 7 gezeichnet wurde.

Zum Schlusse soll noch gezeigt werden, dass die Lösung der *erweiterten* Aufgabe, bei der der Vorschaltwiderstand R auch Kapazität (Abbildung 8) mit \overline{dD} und der Zweig x ausser Selbstinduktion noch ohmschen Widerstand $\overline{Dd'}$ enthält, sich nicht wesentlich anders

¹⁾ Herzog-Feldmann, die Leitungsnetze, 2. Auflage, 1. Teil, Seite 117.

gestaltet. Man spaltet x in die Zweige q und x'' (Abbildung 9), indem im Fusspunkte D' die Senkrechte $D''d''$ errichtet. Die parallelen ohmschen Widerstände q und r lassen sich

dann durch die Winkelhalbierende Dn überaus leicht durch einen gleichwertigen ersetzen. Der Kreis K führt durch D'' . A liegt ausserhalb der Grundlinie Df . AO gibt jedoch wieder z_{max} und das Spiegelbild von D' führt abermals zu P_0 und damit zu AP_0 . Durch den Strahl $D''P_0$ findet man über den Punkt t hinweg den Punkt f und damit r_0 . Zieht man $P_{max}(p')$, so ergibt sich auf gleiche Weise über g der Punkt m und mit ihm der merkwürdige Wert von r , dessen Ausschaltung die Stromstärke der ganzen Leiterverbindun

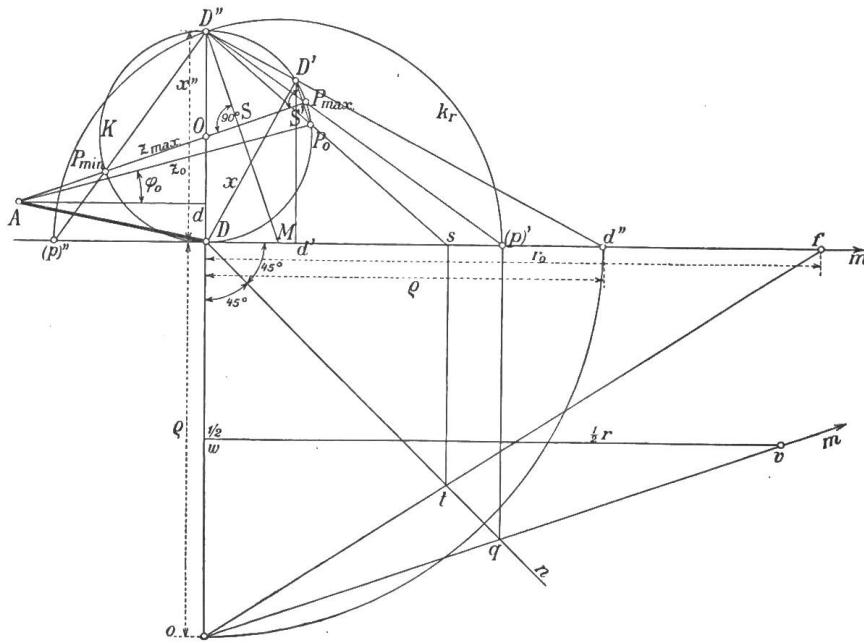


Abbildung 8. Erweiterter Fall : gerichtete Widerstände in allen Leitern der Verbindung.

bei gegebener Spannung V zwischen A und B unverändert lässt.

In den bisherigen Betrachtungen darf ohne weiteres der ohmsche Widerstand durch den allgemeineren, den effektiven ersetzt werden. Die Darstellung gilt weiters nicht nur für Leitungen, sondern sie umfasst namentlich Transformatoren, Generatoren und Motoren. Deutet man z. B. Abbildung 1 oder 9 als das Ersatzschema eines mehrphasigen Asynchronmotors, bei dem der Widerstand q die veränderliche sekundäre Belastung samt Schlüpfung ersetzt, so stellt die Abbildung 4 oder 8 das bekannte Kreisdiagramm dar.¹⁾

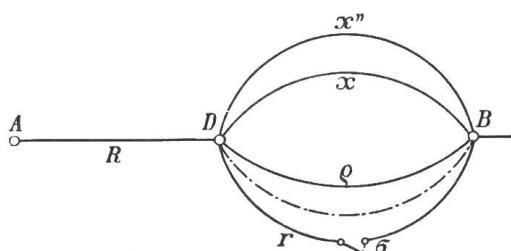


Abbildung 9. Erweitertes Leiterbild mit gespalteten Zweigwiderständen.

Zum Schlusse sei wiederholt: Im Höhensatz des rechtwinkligen Widerstandsdreiecks (dem elektrischen Pythagoras) liegt die Wurzel der Kreisdiagramme.

¹⁾ Siehe etwa den neuesten Aufsatz nach: Das Kreisdiagramm des mehrphasigen Asynchronmotors von Karl Krug in der Zeitschrift „Elektrotechnik und Maschinenbau“, Band XXVIII, Heft 49 vom 4. Dezember 1910.