

Hundert Jahre Mengenlehre

Autor(en): **Landmann, Salcia**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **61 (1974)**

Heft 17

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-532574>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

dass eine Differenzierung nach dem Kriterium der Leistung keine erzieherische, sondern vielmehr eine administrative Entscheidung ist.

(4) Somit wird deutlich, dass wir ohne klare Zielsetzungen der Schule und der einzelnen Fächer zum Zwecke der Verbesserung des Unterrichts nicht auf objektiven Grundlagen differenzieren können. Aus diesen Überlegungen heraus formulieren wir folgende Postulate für unseren Unterricht:

– Bevor wir ans Differenzieren gehen, müssen jene Bedingungen des normalen Unterrichts voll ausgeschöpft werden, welche in Richtung auf eine *Individualisierung* hinauslaufen (Eigenmann 1974). Konkret heisst das vor allem folgendes: Die Lehrer sollten vermehrt mit neueren Unterrichtsformen vertraut gemacht werden (z. B. Gruppenunterricht, Partnerarbeit, Teamteaching, Programmierter Unterricht, Projektunterricht, integrierter Unterricht usw.). Unter Berücksichtigung der Motivation sollte vor allem auf den Schwierigkeitsgrad einzelner Lernaufgaben geachtet werden, d. h. die Lernaufgaben sollten individueller gestellt und stärker auf den Lernstand des einzelnen Schülers abgestimmt werden. Gleichzeitig sollte mehr auf das individuelle Lerntempo geachtet und dem langsameren Schüler mehr Zeit zur Lösung der Aufgaben eingeräumt werden. Es ist notwendig, dass die Lehrer innerhalb einer Schule sich regelmässig zu Arbeitssitzungen treffen, in welchen einerseits über ihre neuen Erfahrungen berichtet wird, andererseits aber auch gemeinsam das weitere Vorgehen im Unterricht geplant wird (Semesterplanung, Entwicklung von Unterrichtseinheiten, Diskussion über die Wahl bestimmter Methoden). Gruppenarbeit – ja ganz allgemein die soziale Interaktion zwischen Lehrern und Schülern – ist nicht Selbstzweck, sondern

ein wesentlicher Bestandteil unserer erzieherischen Aufgaben. Dies aber verlangt von uns allen zu überlegen, welche Methoden gewählt werden müssen, die dieser Zielsetzung nicht widersprechen.

– Erst wenn diese Bedingungen des konventionellen Unterrichts voll ausgeschöpft sind, sollte man sich intensiver Gedanken über den Differenzierungsprozess machen. In beiden Fällen aber ist es unabdingbar, dass man klare Zielsetzungen über den Unterricht besitzt. Der erste Schritt in der Differenzierung besteht darin, klare Ziele zu formulieren. Erst dann kann die Frage nach den Differenzierungsformen und -methoden geklärt werden.

Literatur

- Arnold, W.: Bildungswilligkeit der Eltern im Hinblick auf ihre Kinder. In: Roth H. (Hrsg.): *Begabung und Lernen*. Stuttgart 1969³, 357–375.
- Eigenmann, J.: *Sequenzen im Curriculum*. Weinheim 1974.
- Fischer, M.; Michael, B.: *Differenzierung im Schulunterricht*. Beltz, Weinheim und Basel 1973.
- Haller, H.-D.: Zur Integration sozialer und kognitiver Lernprozesse. Welche Differenzierungsformen erwarten wir für die Primarstufe? In: Halbfas H., Maurer F., Popp W. (Hrsg.): *Entwicklung der Lernfähigkeit*. Stuttgart 1972, 145–166.
- Heckhausen, H.: Förderung der Lernmotivierung und der intellektuellen Tüchtigkeiten. In: Roth H. (Hrsg.): *Begabung und Lernen*. Stuttgart 1969³, 193–228.
- Rosenthal, R.; Jacobson, L.: *Pygmalion in the Schools*. New York 1968.
- Teschner, W.-P.: Differenzierung und Individualisierung in der Gesamtschule. In: Teschner W.-P. (Hrsg.): *Differenzierung und Individualisierung des Unterrichts*. Göttingen 1971, 233–255.
- Thelen, A.: *Unterrichtsdifferenzierung*. In: Yates, A. (Hrsg.): *Lerngruppen und Differenzierung*. Weinheim 1972, 153–161.
- Yates, A. (Hrsg.): *Lerngruppen und Differenzierung*. Weinheim 1972.

Hundert Jahre Mengenlehre

Salcia Landmann

Mengelehre an Grund- und Vorschulen

Vor rund zehn Jahren schlugen etliche Pädagogen vor, an Grund- und Vorschulen statt

des üblichen Rechenunterrichts die Mengenlehre einzuführen. Der angebliche Doppelzweck: Dadurch, dass die Mengenlehre

im Gegensatz zum gewöhnlichen Rechnen zu den letzten, einfachsten und allgemeinsten Regeln vorstösst, erleichtere sie den Kindern aller Sozial- und Intelligenzstufen den Zugang nicht nur zu Mathematik, sondern auch zu den Grundgesetzen der Logik. Eine Reihe Länder haben sich daraufhin auf das Experiment eingelassen – mit so fragwürdigem Resultat, dass Frankreich, Österreich und Russland wieder davon abgekommen sind. In Amerika, wo man an der Neuheit noch festhält, mehren sich die Klagen, die Kinder könnten nicht mehr rechnen. Oft genug können sie drüben dank der «Ganzheitsmethode» beim Leseunterricht, die, genau wie die Mengenlehre, nicht von den Elementen (Zahlen resp. Buchstaben), sondern von ganzen Blöcken (Mengen resp. Wörtern) ausgeht, auch nicht mehr lesen. In Westdeutschland liefern sich Anhänger und Gegner der Methode wilde Wortschlachten. Einige wenige Schüler sind begeistert, die Majorität klagt, verzagt, versagt. Eltern erlernen Mengenlehre, um den Kleinen zu helfen. Manche Lehrer führen den Mathematikunterricht zweigleisig, d. h. nebeneinander zugleich nach alter und neuer Methode, was die Schüler verwirrt und sie zudem, wenn der Lehrer die Klasse allen «Reformen» zum Trotz im Rechnen trainiert, doppelt belastet. Das aber widerspricht strikt einem weiteren Postulat der Modepädagogen: der leistungsfeindlichen und antiautoritären Erziehung, und vor allem der bereits erwähnten Forderung nach narrensicheren Methoden auch für Schwachbegabte. In der Tat mehren sich speziell in Westdeutschland neuerdings Schülerelbstmorde aus reinen Schulgründen. Das gab es zwar vor dem Ersten Weltkrieg unter dem Druck eines harten Standesdenkens bei Gymnasiasten häufig, später aber nur noch ganz selten. Dennoch geht jetzt auch die Schweiz, wo man sich bisher vorsichtig konservativ zurückhielt, daran, die Mengenlehre an Elementarschulen einzuführen. Natürlich wäre es Unsinn zu behaupten, dass Schüler sich wegen der Mengenlehre vor Züge werfen oder vergiften. Sie ist aber integrierender Bestandteil der Totalumwandlung unserer pädagogischen Methoden. Deren Sinn und Auswirkung ist daher an jedem ihrer Elemente, und folglich auch an der Mengenlehre, zu überprüfen.

Die Mengenlehre Georg Kantors

Nur an Grundschulen ist Mengenlehre neu. Sie entstand schon 1874, also vor genau hundert Jahren, bei Georg Kantors Beschäftigung mit den Problemen des Unendlichen. Da man unendliche Zahlenreihen nicht auszählen und mit einer festen Zahl bezeichnen kann, nannte er sie «Mengen», unterschied «wohlgeordnete» Mengen von nur «geordneten», nannte solche, die «einander umgekehrt eindeutig» zugeordnet werden können, «*ein-eindeutig*» oder «bijektiv» und unterschied sie von Mengen, die sich nur einseitig «eindeutig» einander zuordnen lassen; er stellte auch unter vielem anderen fest, dass alle unendlichen Mengen oder Reihen aus «natürlichen» oder «rationalen» Zahlen einander «gleichmächtig» sind, jedoch von geringerer Mächtigkeit als die Mengen aus sogenannten «reellen Zahlen» (d. h. Dezimalbrüchen, deren Zahlen sich so wie bei der berühmten Grösse Pi (π) nicht periodisch wiederholen). Mittels dieser und vieler anderer Thesen gelang es Kantor tatsächlich zu beweisen, dass im Unendlichen keineswegs, wie man denken könnte, «alle Katzen grau», d. h. alle Grössen und Mengen ununterscheidbar sind.

Die Mengenlehre der Primitiven

Kantors Beweise sind zwar so klar dargelegt, dass auch ein mathematisch mässig Gebildeter sie zur Not begreift – niemals aber ein Elementarschüler. Nun – das sehen auch die fanatischsten Anhänger der Mengenlehre ein.

Jedoch: Man kann den Begriff der Menge, wenn er auch im Zusammenhang mit Fragen der Unendlichkeit kreierte wurde, ohne weiteres auch auf endliche Zahlen und sogar auf konkrete Gegenstände anwenden. Mengen gibt es nicht nur jenseits und oberhalb, sondern auch diesseits und unterhalb der abstrakten Zahl. Die primitiven Weddas auf Ceylon z. B., die noch keine Zahlen kennen, sind dennoch mit Hilfe des Mengendenkens imstande, ihren Besitz zu kontrollieren, indem sie neben jede gehortete Kokosnuss ein Stäbchen legen und hernach die Stäbchen gesondert aufbewahren. Sie können zwar nicht einmal bis 3 zählen, dennoch aber feststellen, ob nicht plötzlich

mehr Stäbchen als Nüsse da sind und folglich Nüsse gestohlen wurden.

In der Tat kann man auf diese Weise sogar mit Kleinkindern, die noch nicht einmal sprechen können, Mengenlehre betreiben: Schenkt man einem von zwei kleinen Kindern 2, dem andern 4 Bonbons oder bunte Bällchen, so wird das benachteiligte Kind vermutlich Kummer empfinden und weinen. Hierzu braucht es nicht zählen zu können. Mengen sind, wie man sieht, leichter fasslich als die (abstrakten) Zahlen.

Mengenlehre für Kleinkinder

Hat man dies einmal festgestellt, so kann man die Methode z. B. mit Hilfe bunter, verschieden geformter Klötzchen ausbauen. Sind gleichviel rote wie blaue Klötzchen da, so hat man 2 einander äquivalente Mengen – den lateinischen Ausdruck muss man ja nicht gleich zu Beginn einführen. Gibt es von der einen Sorte weniger, so erhält man eine «Differenzmenge». Durch andere Spiele gelangt man allmählich zu Vereinigungs-, Punkt- und echten sowie unechten Teilmengen. Besonders interessant wird das Spiel, wenn sich die Mengen teilweise überkreuzen, wenn es also gilt, zunächst alle blauen und alle viereckigen Klötzchen aus dem Haufen herauszusuchen und dann festzustellen, ob und welche Klötzchen aus den beiden Teilmengen zugleich blau und viereckig sind. Man wird auch feststellen können, dass manche Mengen zwar äquivalent, aber nicht ähnlich sind, während für andere genau das Gegenteil zutrifft.

Von der Menge zur Zahl

Irgendeinmal muss man den Kleinen aber doch verraten, dass es neben diesen konkreten Mengen auch die abstrakten Zahlen gibt, genau wie man ihnen, trotz «Ganzheitsunterricht», beim Lesen auf die Dauer die Existenz der Buchstaben nicht verheimlichen kann. Wie aber gelangt man vom Klötzchenhaufen zur Zahl? An sich lässt sich der Zahlbegriff aus dem der Menge mühelos ableiten: Der Mengentheoretiker erklärt zunächst einmal, «jede Menge, deren Objekte selber Mengen sind, ist eine Klasse» und kommt dann zu der Definition: «Eine natürliche Zahl ist eine Äquivalenzklasse von Mengen», oder, an einem Beispiel: «Die Zahl 5 ist = der Klasse der Mengen, die zur

Menge der Finger einer Hand äquivalent sind . . .»

Das ist sonnenklar, und es soll auch einzelne didaktisch genial begabte Pädagogen geben, die so etwas «kindergemäss» illustrieren und explizieren können. Die meisten allerdings fragen sich verärgert «Was soll's?» – und purzeln mit den Schülern holterdiepolter von den Buntklötzchen in die Zahlen hinein, was allerdings dadurch wesentlich erleichtert ist, dass unsere Kleinen, anders als die armen Weddas auf Ceylon, auch ohne Schulunterricht Zahlen kennen und zählen können.

Es erhebt sich dann bloss die Frage: Wozu hat dann der Staat die vielen Millionen für die Buntklötzchen ausgegeben?

Mengenlehre für «Fortgeschrittene»

Nun – ganz zwecklos ist es nicht. Auch nach Einführung der Zahlen kann man eine gewisse Ausrichtung auf Mengen beibehalten. Etwa durch Aufgaben solcher Art: Wenn von 2 Vietkongspähern der eine 3 Marinefusiliere, der andere jedoch 3 Neger gesehen haben will – wieviele (amerikanische) Feinde haben sie dann zusammen erspäht? Die Antwort ist, anders als bei üblichen Rechnungen, nicht eindeutig zu erteilen. Denn je nachdem, wieviele der Fusiliere zugleich schwarz sind, wieweit sich also die beiden Mengen überschneiden, haben die beiden zusammen 3, 4, 5 oder 6 Feinde gesichtet. Man kann den Kindern auch klarmachen, dass man leichter abzählen und rechnen kann, wenn man die an sich amorph dahinnerennende Zahlenreihe in kleine Blöcke, also Mengen unterteilt . . . Hier allerdings werden wir stutzen: Tun wir dann das nicht schon ohnehin durch unser Dezimalsystem mit dem Stellenwert Null, dieser genialen Erfindung Altindiens, die im Frühmittelalter durch die Juden und Araber Andalusiens an ganz Europa weitergegeben wurde? Und taten dies nicht schon seit jeher alle Kulturvölker? Die präkolumbanischen Majas errechneten mit der Grundzahl 20 sogar auf Jahrhunderte hinaus im voraus Mond- und Sonnenfinsternisse, und die astronomisch ebenfalls hochbegabten Altbabylonier gingen von der 12 aus. Bis vor kurzem haben die konservativen Engländer für ihr Münz- und Messwesen die 12 beibehalten, und

auch wir Kontinentalen sprechen noch miteinander von Dutzend und Gros (=12×12). Durchgesetzt hat sich aber auf der ganzen Welt mittlerweile die altindische Dezimale, das heisst die Grundzahl 10.

Natürlich spricht nichts dagegen, den Kleinen klarzumachen, dass die Dezimale nicht gottgewollt, sondern eine menschliche Schöpfung ist, dass man also ebenso gut mit 20, 12, 5, 6 usw. zurechtkäme. Dies den Kindern schon früh zu sagen, ist umso sinnvoller, als ja auch unser moderner Computerfachmann mit dem Binal oder Dual, d. h. mit der Grundzahl 2 operieren und den Stellenwert Null auch entsprechend einsetzen muss. Jedoch begnügt man sich im Elementarunterricht nicht mit dieser prinzipiellen Feststellung, sondern man lässt die Kinder mit beliebigen Zahlensystemen, die es nie und nirgends gegeben hat, also etwa auf der Basis von 5, 6 usw., operieren... Ob das die Fähigkeit zum formalen Denken steigert, weiss ich nicht. Aber behaupte keiner, dass solche Spässe intelligenzschwachen Kindern die Bewältigung des Schulstoffs erleichtern!

In andern Fällen bringt das Mengendenken tatsächlich eine gewisse Erleichterung: Erklärt man den Kindern z.B. die beiden «Kommutativgesetze» (lateinisch: mutare = auswechseln) ein für allemal in der prinzipiellen Form $A+B = B+A$ und $A \times B = B \times A$, wissen sie also, dass 3×7 soviel ist wie 7×3 , so werden sie beim Erlernen des Einmaleins tatsächlich nur noch halb so viel Mühe haben.

Die formale Logik

Schon Kantor selbst und erst recht seine Nachfolger haben aber nicht nur Fragen der Unendlichkeit abgeklärt, sondern auch untersucht, wie sich verschiedene Mengen oder auch Ganz- und Teilmengen zueinander verhalten können. Einfachstes Beispiel: Die Gesamtmenge der Menschen ist sterblich, also ist Meyer als Teilmenge ebenfalls sterblich... Ist das neu? Nein, es ist uralte. Es sind dies einfach die Gesetze der formalen oder Aussagelogik. Nur, dass die Mengenlehre, ein Produkt des positivistischen 19. Jahrhunderts, die Sterblichkeit Meyers nicht mehr aus der «Idee» oder dem «Wesen», sondern bloss noch aus der kon-

kreten Gesamtmenge der Menschheit ableitet. Das führt aber, wenn man es z. B. mit einer ausgerotteten Art zu tun hat, von der also keine reale «Menge» existiert, zu einer leichten Komplikation, die es nicht gab, solange man von der «Idee» einer Sache reden konnte. Nun – der Mengentheoretiker spricht eben in einem solchen Fall von «Nullmengen» oder «Leerklassen». Die Gesetze als solche bleiben sich gleich. Und das Einführen des Mengenbegriffs in die formale Logik hat neben solchen Begriffsungeheuern wie «Nullmenge» auch eine positive neue Einsicht gebracht: Die Erkenntnis, dass «Mengen, die sich selbst als Element enthalten», notwendig zu Antinomien (d. h. unauflösbaren Widersprüchen) führen. Gerade mit dieser unerlaubten logischen Operation haben aber seinerzeit die Sophisten Athens und die talmudgebildeten Juden sich und andern den Kopf heiss gemacht. Ein Beispiel aus Athen: Ein Kreter sagt: «Alle Kreter lügen.» Nun ist er selbst ein Kreter. Also lügt auch er. Also sagen alle Kreter die Wahrheit. Also sagt auch er die Wahrheit. Also lügen alle Kreter... und so fort ins Unendliche.

Und das jüdische Exempel: Gott ist allmächtig. Kann er folglich auch einen Stein schaffen, der so schwer ist, dass er selbst ihn nicht hochheben kann? –

Erst dank der Mengenlehre wissen wir nun also, dass solche Fragen nicht nur paradox, d. h. (subjektiv) schwer auflösbar sind, sondern antinom, d. h. in sich widersprüchlich und unlöslich.

Sinn und Unsinn der Mengenlehre an den Grundschulen

Sicher ist es für Schüler sinnvoll, sich mit den Grundgesetzen der formalen Logik – egal ob auf «ideengläubiger» oder auf neuer mengentheoretischer Basis – zu beschäftigen. Dies umso mehr, als auch der Satz vom Widerspruch hierher gehört, nach welchem ein und dasselbe Ding niemals zu gleicher Zeit etwas sein und nichtsein kann. Eine Grundeinsicht, die unsere linksorientierte Jungintelligenzia mit ihrem «dialektischen» Denken restlos eingebüsst hat, weshalb sie auch bedenkenlos Freiheit mit Unfreiheit, Verteidigung mit Aggression und Mord mit Nichtmord gleichsetzen kann.

Die Frage ist bloss: Sind Elementarschüler in der Lage, formal-logische Grundzusammenhänge zu begreifen? Sind sie nicht schon beim Herumhantieren mit nichtdezimalen Zahlensystemen überfordert? Ist nicht am Ende schon die sehr abstrakte Terminologie und Zeichensymbolik der Mengenlehre für Kinder dieses Alters eine Zumutung? – Was übrig bleibt, sind die Klötzchenspiele.

An ihnen dürften in der Tat schon Kleinkinder ihre helle Freude haben. Der Sprung aber von dieser «Mengenlehre» der primitiven Weddas, die sich diesseits und unterhalb der Zahl abspielt, zur modernen Mengenlehre jenseits und oberhalb der Zahlen dürfte für Kinder geistig strapazierender sein als alles, was ihnen der traditionelle Rechenunterricht je zugemutet hat.

«Mengenlehre» und Grundschulreform

H. Freund

Eltern contra Reform?

In der Grundschule fällt leider noch immer in vielen Fällen die Entscheidung darüber, ob ein Kind in der Schule weiterhin Erfolg haben wird oder nicht; denn in den nachfolgenden Schuljahren wird es – wie die Erfahrung zeigt – immer schwerer, den Leistungsrang noch wesentlich zu ändern. Die meisten Eltern haben aber berechtigterweise ein sehr starkes Interesse an dem Lebensschicksal ihrer Kinder. Wenn nun bereits im frühen Alter entscheidende Weichen gestellt werden, dann wird der in der Grundschule sich abspielende Prozess, durch den Kindern Berufschancen eröffnet oder verschlossen werden, besonders kritisch beobachtet. Dabei bringen die Eltern der Schule ganz bestimmte Erwartungen entgegen. Diese betreffen sowohl die Inhalte (die Kinder sollen glatt und sicher lesen, schreiben und rechnen lernen) als auch die Methode (Frontalunterricht, Disziplin, Hausaufgaben, Auswendiglernen usw.). Werden die Erwartungen, die sich meist an den eigenen Erfahrungen orientieren, nicht erfüllt, und zeigt das Kind schlechtere Leistungen als man es sich erhofft hatte, dann ist es nur allzu natürlich, dass die Eltern dem Schulgeschehen die Schuld für ihre Enttäuschung zuschreiben. Werden nun gar in der Schule Anforderungen gestellt, die den Eltern völlig fremd sind und die ihnen daher selbst schwer erscheinen, so werden sie folgern, dass ihre Kinder durch diese Stoffe erst recht überfordert sind. Ein Konflikt mit der Schule ist unvermeidbar.

Die negative Einstellung der Eltern überträgt sich aber mit Sicherheit auf die Kinder und verschlechtert deren Leistung noch mehr. Man kann sich leicht vorstellen, dass diese Entwicklung so weit fortschreiten kann, dass Kinder krank werden.

Wie kann man diese verhängnisvolle Eskalation vermeiden? Mehrere Veränderungen von Einstellungen sind eine notwendige Voraussetzung:

Grundschule muss Leistungsdruck vermindern!

Die Schule muss es deutlicher werden lassen als bisher, dass es ihr auf der kognitiven Seite weniger auf abfragbare Leistungen ankommt, als vielmehr darauf, Leistungsbereitschaft und -fähigkeit, Selbstvertrauen, Beweglichkeit im Denken usw., insgesamt also mehr die Voraussetzungen für spätere Leistungen aufzubauen.

Damit ihr das gelingt, muss sie durch ein breites Angebot an Reizen mit Aufforderungscharakter versuchen, jedem Kind die Möglichkeit zu geben, an geeigneten Stellen Erfolgserlebnisse zu haben. Dabei kann man von den beiden folgenden Hypothesen ausgehen:

1. Jedes Kind hat an mindestens einer Stelle den Keim der Fähigkeit, der der Ausgangspunkt von Erfolgserlebnissen sein kann.
2. Allein über derartige Erfolgserlebnisse baut ein Kind Schritt für Schritt sein Selbstsein, Selbstbewusstsein und sein Anspruchsniveau auf, d. h. es gewinnt Zu-