

# Zum Unterricht in der elementaren Arithmetik und Algebra

Autor(en): **Ineichen, Robert**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **45 (1958)**

Heft 20: **Der Mathematikunterricht in der Sekundarschule**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-539360>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Mörser sind Steilfeuergeschütze mit kurzem Rohr und sehr großer Rohrweite (Kaliber).

Minenwerfer haben Abschubwinkel von mehr als  $45^\circ$ , sind leicht gebaut und haben kleine Anfangsgeschwindigkeiten.

Steht genügend Zeit zur Verfügung, so lohnt sich auch noch die Besprechung folgender Spezialfälle:

$\alpha = 90^\circ$ , d. h. senkrechter Wurf aufwärts, und

$\alpha = 0^\circ$ , z. B. Abwurf aus horizontalfliegendem Flugzeug,

ferner die Auswertung der obigen Ergebnisse in Bezug auf Weitwurf und Kugelstoßen im Turnen.

### 3. *Repetition der Rechenfertigkeit in Form eines Wettbewerbes*

Wettbewerbe begeistern die Schüler immer; Eifer und Interesse steigen merklich. Nützen wir dies auch genügend aus im Rechnen? Meine Idee ist absolut nicht neu. Eine Art des Wettbewerbes, die ich praktisch erprobte, möchte ich kurz beschreiben.

Der Wettbewerb erfolgt nach dem Cup-System; der Verlierer scheidet endgültig aus, der Gewinner kommt eine Runde vorwärts. Bereits das Auslosen der Zweier- oder Dreiergruppen (je nach Klassenbestand) wirkt stimulierend. Jeder Schüler schreibt seinen Namen auf einen Zettel, der möglichst klein zusammengelegt wird. Immer die zwei oder drei ‚Gezogenen‘ bilden eine Gruppe. Ich gebe jeweils vorher bekannt, in welcher Rechenstunde eine Gruppe daran kommt (höchstens 2 pro Woche) und was dann gerechnet werden muß. Damit erreiche ich, daß das entsprechende Stoffgebiet nochmals studiert und geübt wird. Je nach dem Stand seiner Klasse wählt der Lehrer die Aufgaben aus dem Buch aus oder stellt eigene zusammen<sup>3</sup>. Rechnen Sie aber unbedingt vorher die Probleme selber durch, denn diese sollten in höchstens 5 bis 10 Minuten lösbar sein. Rein numerische Beispiele eignen sich besser als Textaufgaben. Wann innerhalb der Stunde gestartet werden soll, ist dem Geschick des Lehrers überlassen. Die Wettbewerbsrechnungen schreibe ich vorher je an eine Tafelfläche oder diktiere sie. Derjenige Schüler hat gewonnen, der das richtige Resultat zuerst gefunden hat. In der Hitze des Gefechtes werden die unglaublichsten Fehler begangen. Die unbeteiligten Schüler am Platze spüren das wirkliche Können heraus. Eine anschließende kurze Besprechung lohnt sich, ja drängt sich oft auf. Nach dem ersten Durchgange ist also die eine Hälfte der Klasse ausgeschieden, mit der andern wird das ‚Spiel‘ fortgesetzt, bis der Cup-Sieger, der ‚Rechnungskönig‘, ermittelt ist.

Auf allgemeinen Vorschlag kombinierten wir das letztmal den einen Wettbewerbsdurchgang mit einem Toto. Die Schüler setzen in eine Kolonne die Namen der mutmaßlichen Sieger untereinander. Jeder Schüler durfte dem von der Klasse gewählten Verwalter so viele Tips, d. h. Kolonnen mit Namen, abgeben, wie er wollte. Preis pro Tip 5 Rappen. Ein Teil des Gesamteinsatzes reservierten wir für den Sieger, der Rest wurde wieder an die ersten Ränge ausbezahlt. Der Verteilungsschlüssel ergab sich in einer Klassenbesprechung. Der Verwalter mußte eine genaue Kassaabrechnung aufstellen.

Je nach der Klasse kann der Lehrer selbstverständlich das Ganze nach eigener Phantasie abändern. Machen Sie den Versuch einmal! Es lohnt sich. Viel Vergnügen!

<sup>3</sup> Eine große Auswahl bietet das Buch ‚Aufgaben für das schriftliche Rechnen an Gymnasien, Real- und Sekundarschulen‘ von Kopp/Ineichen, Verlag Haag, Luzern.

## **Zum Unterricht in der elementaren Arithmetik und Algebra** Dr. Robert Ineichen, Luzern

Es sollen im Folgenden einige Einzelfragen, deren Behandlung manchmal Schwierigkeiten bereitet, nach der mathematischen und nach der methodischen Seite hin besprochen werden.

1. ‚minus mal minus = plus‘

Eine Beziehung, die selbst für manchen Gebildeten noch etwas Geheimnisvolles an sich hat! Soll und

kann sie in der Schule bewiesen werden? Oder genügt als Begründung etwa der einfache Hinweis, daß ja auch in der modernen hochdeutschen Sprache eine doppelte Verneinung ( $- \cdot -$ ) eine Bejahung ( $+$ ) ergibt? Vom *mathematischen Standpunkt* aus ist die Sache klar: Es seien  $a$  und  $b$  zwei Zahlen aus der Folge der *natürlichen Zahlen*  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ , also aus der Folge jener Zahlen, die sich aus dem *Zählen* ergeben. Für die Gleichung  $a + x = b$  läßt sich in diesem Falle dann und nur dann eine Lösung aus dem Bereich der natürlichen Zahlen angeben, wenn  $a$  kleiner ist als  $b$ . Um sie auch dann lösen zu können, wenn  $a$  größer ist als  $b$ , müssen außerhalb des Bereiches der natürlichen Zahlen *neue* Symbole geschaffen werden. Für diese neuen Symbole müssen jetzt wiederum die *Rechenregeln erklärt* (also definiert, nicht bewiesen!) werden, denn es ist ja gar nicht gesagt, daß die Rechenregeln für die bisherigen natürlichen Zahlen auch hier gelten. Diese Erklärung oder Festsetzung der Rechenregeln muß in sinnvoller Weise so vorgenommen werden, daß die bisherigen Rechenregeln möglichst erhalten bleiben und keine Widersprüche auftreten. Gelingt es, solche Festsetzungen zu treffen, so bezeichnet man die *neuen Symbole* auch wieder als ‚Zahlen‘, in unserm Falle als *negative Zahlen*.

Selbstverständlich gehören solche Überlegungen nicht in den Vordergrund des einführenden Algebraunterrichtes, aber sie sollten gewissermaßen den dem Lehrer bewußten *Hintergrund* bilden. Was aber unseres Erachtens in den Unterricht gehört, ist die ausdrückliche Feststellung, daß nach Einführung der negativen Zahlen nun zunächst untersucht werden muß, wie man mit ihnen rechnen soll, und daß dieses ‚wie‘ sich nicht so ganz selbstverständlich aus dem Rechnen mit den natürlichen Zahlen ergibt. Und was sicher *nicht* in den Unterricht gehört, das sind Scheinbeweise. – Sachlich und methodisch vertretbar ist zum Beispiel folgendes Vorgehen: Ganz ähnlich wie die Primarschule ins Rechnen einführt, indem die natürlichen Zahlen durch Gegenstände veranschaulicht werden (z. B. Stäbchen) und dann die Rechenoperationen zunächst mit diesen Gegenständen vorgenommen werden, können auch im einführenden Algebraunterricht Beziehungen wie  $(-2) \cdot (-5) = +10$  durch *Heranziehung entsprechender Beziehungen in der Außenwelt veranschaulicht* werden, durch Vergleiche also, die dann natürlich *nicht als Beweise* angesehen werden dürfen, sondern bloß *zei-*

*gen wollen, daß unsere Festsetzungen über das Rechnen mit negativen Zahlen sinnvoll sind.*

Betrachten wir das folgende Beispiel:

Ich befinde mich an einem Punkt einer langen geradlinigen Straße und beobachte Fußgänger, die mit einer Geschwindigkeit von 5 km pro Stunde nach *links* und nach *rechts* an mir vorbeimarschieren. Wo werden solche Fußgänger zwei Stunden *nach* ihrem Vorbeimarsch sein, wo waren sie zwei Stunden *vor* ihrem Vorbeimarsch? Soll diese Rechnung durchgeführt werden, so brauche ich Zahlen, die ‚links‘ und ‚rechts‘, sowie ‚vor‘ und ‚nach‘ verschieden zum Ausdruck bringen. Üblicherweise bringt man diese Richtungsunterschiede durch die Vorzeichen  $+$  und  $-$  zum Ausdruck:

5 km pro Stunde nach links:  $-5$ ; 5 km pro Stunde nach rechts:  $+5$ ; nach zwei Stunden:  $+2$ ; vor zwei Stunden:  $-2$ .

Damit führen die obigen Fragen auf die folgenden Rechnungen:

$$(+2) \cdot (+5) = ? \quad (+2) \cdot (-5) = ? \quad (-2) \cdot (+5) = ? \\ (-2) \cdot (-5) = ?$$

Die Lösungen finden wir anschaulich durch Schließen an unserm Beispiel:  $+10, -10, -10$  und  $+10$ . Wir wollen nur den uns interessierenden Fall  $(-2) \cdot (-5) = +10$  noch kurz darstellen: Ein nach *links* marschierender Fußgänger ( $-5$  km/h!) ist *vor* zwei Stunden ( $-2$ !) noch 10 km *rechts* von uns (also  $+10$ ) gewesen, also  $(-2) \cdot (-5) = +10$ .

Wir bemerken noch, daß nach Hermann Hankel (1839–1873) die Forderung, daß die neuen Zahlengattungen die für die natürlichen Zahlen geltenden Rechenregeln (möglichst) erfüllen sollen, oft als ‚Prinzip der Fortgeltung der Rechnungsregeln‘ oder als Permanenzprinzip bezeichnet wird. Wir fügen aber gleich bei, daß dieses Prinzip nicht – wie es etwa sogar in Lehrbüchern geschieht – als Beweismittel verwendet werden darf; es ist nur ein leitendes Prinzip beim Aufstellen der Rechenregeln für neue Zahlen, also nur ein *heuristisches Prinzip*: Man probiert gewissermaßen, ob alles ‚gut‘ geht, wenn man die Rechenregeln zu übertragen versucht. Die diesbezüglichen Untersuchungen gehören in ein recht schwieriges Gebiet der Mathematik, in die sogenannte Grundlagenforschung.

## 2. Die Division durch Null. – $1:0 = \infty$ ?

Auch das Rechnen mit der Zahl Null gehört zu jenen Dingen, bei denen die herkömmliche Behandlung nicht in allen Fällen den Beifall des Mathematikers finden kann, vor allem was die *Division durch 0* anbelangt.

Mathematisch ist die Sachlage zunächst ganz ähnlich wie bei den eben besprochenen negativen Zahlen: Wenn  $a$  und  $b$  wiederum zwei natürliche Zahlen sind, so kann die Lösung der Gleichung  $a + x = b$  nicht unter den natürlichen Zahlen gefunden werden, wenn  $a$  gleich  $b$  ist. Man hat in bekannter Weise eine neue Zahl einzuführen, die Null. Nun sind für diese neue Zahl wieder die Rechenregeln festzusetzen, was für die Addition, Subtraktion und Multiplikation dem Schüler äußerst leicht fällt, da er sofort an entsprechenden Beziehungen der Außenwelt das Sinnvolle der folgenden Festsetzungen einsehen kann:  $a + 0 = a$ ;  $a - 0 = a$ ;  $a \cdot 0 = 0$ . Die Schwierigkeiten treten bei der *Division* auf. Betrachten wir zunächst die folgenden Divisionen:

$1 : \frac{1}{10} = 10$ ;  $1 : \frac{1}{100} = 100$ ;  $1 : \frac{1}{1000} = 1000 \dots$  usw. Wir stellen fest, daß – bei gleichbleibendem Dividenden – das Ergebnis immer größer wird, wenn der (positive) Divisor immer kleiner wird. Für den Fall  $1 : 0$  finden wir aber unter den dem Schüler bereits bekannten Zahlen keine Zahl, die wir als Ergebnis angeben können und für die die Probe (Ergebnis mal Divisor = Dividend) stimmt. Die obige Folge von Divisionen legt es dann nahe, zu sagen,  $1 : 0$  gebe eben eine neue, eine ‚unendlich große Zahl‘, und dafür das Zeichen  $\infty$  einzuführen und zu schreiben  $1 : 0 = \infty$ . Dies sollte man nicht tun, denn den so eingeführten Unendlichkeitsbegriff kann man nicht ohne weiteres als Zahl betrachten, da sich bei seiner Verwendung sofort Widersprüche ergeben:

So folgt z.B. aus  $\infty + 7 = \infty$  und  $\infty + 9 = \infty$  nach den üblichen Regeln sofort  $7 = 9$ , was offensichtlich falsch ist. Oder aus  $\infty + 7 = \infty$  folgt durch beidseitiges Quadrieren  $\infty^2 + 14\infty + 49 = \infty^2$  und daraus  $\infty = -7/2$  usw. Deshalb müssen wir festsetzen: *Durch Null kann nicht dividiert werden.*

Damit soll nicht etwa der Anschein erweckt werden, das Unendliche sei aus der Mathematik verbannt. Verschiedene Gebiete der Mathematik (die höhere Analysis und die höhere Geometrie, speziell aber die Mengenlehre) haben sich recht eingehend mit den verschiedenen Aspekten dieses Begriffes zu befassen. Er tritt dort – unter anderm! – als uneigentlicher Grenzwert auf, so etwa in der Aussage  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \infty$  (für positive  $a$  und  $x$ ). Aber damit ist nicht etwa die Division durch Null erklärt, da ja  $x$  hier gerade nicht Null sein darf.

Es sei schließlich noch bemerkt, daß das in diesen beiden Abschnitten beleuchtete Problem der Festsetzung der Rechenregeln natürlich jedesmal eintritt, wenn der Bereich der behandelten Zahlen er-

weitert wird, also z.B. auch bei der *Einführung des Bruchrechnens*.

3. Das Rechnen mit benannten Zahlen.  $-3 \cdot 4 \text{ m}^2 = 12 \text{ m}^2$  oder  $3 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 12 \text{ m}^2$ ?

Die erste der beiden Darstellungen,  $3 \cdot 4 \text{ m}^2 = 12 \text{ m}^2$ , ist offensichtlich richtig. Sie kann leicht mit dem ursprünglichen Multiplikationsbegriff erklärt werden:  $3 \cdot 4 \text{ m}^2$  bedeutet eben  $4 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2$ , was  $12 \text{ m}^2$  ergibt. Die andere Darstellung kann ebenso offensichtlich nicht mit diesem ursprünglichen Multiplikationsbegriff erklärt werden:  $4 \text{ m}$  können nicht  $3 \text{ m}$ -Mal als Summand gesetzt werden. Doch auch diese andere Darstellung ist richtig! Die Sachlage ist wiederum ähnlich wie beim Rechnen mit negativen Zahlen oder mit Null, nur geht es hier um benannte Zahlen (etwas allgemeiner einfach als ‚Größen‘ bezeichnet), das heißt um Zahlen in Verbindung mit Maßeinheiten. Für diese benannten Zahlen kann man nun einwandfrei zeigen – die entsprechenden Untersuchungen sind allerdings nicht ganz einfach –, daß die folgende Regel gilt: *Man darf mit benannten Zahlen nach den Regeln des gewöhnlichen Buchstabenrechnens multiplizieren oder dividieren.* An geeigneten Beispielen läßt sich auch dieser Sachverhalt dem Sekundarschüler klar machen:

Fläche eines Rechtecks  $20 \text{ m}^2$ , Länge  $5 \text{ m}$ . Breite? – Breite =  $20 \text{ m}^2 : 5 \text{ m} = 4 \text{ m}$ . (Man beachte: Konsequente Verfechter der ‚ändern‘ Darstellungsart müßten hier wohl schreiben:  $20 \text{ m} : 5 = 4 \text{ m}$ . Dies wäre sehr unbefriedigend, da ja nicht  $20 \text{ m}$ , sondern  $20 \text{ m}^2$  gegeben ist.)

Volumen eines Prismas  $30 \text{ m}^3$ , Grundfläche  $10 \text{ m}^2$ . Höhe? – Höhe =  $30 \text{ m}^3 : 10 \text{ m}^2 = 3 \text{ m}$ .

$15 \text{ kg}$  werden  $2 \text{ m}$  hoch gehoben. Arbeit? – Arbeit =  $2 \text{ m} \cdot 15 \text{ kg} = 30 \text{ mkg}$ . (Nur die Verwendung dieser Darstellung erklärt einsichtig, wieso  $\text{mkg}$ , das Meterkilogramm, als Maßeinheit für die Arbeit gewählt wird.)

Solche Beispiele – sie ließen sich beliebig vermehren – zeigen dem Schüler, daß diese Art der Darstellung sinnvoll ist. Man darf beifügen, daß technisches oder physikalisches Rechnen darauf überhaupt nicht verzichten kann. Es darf auch nicht als störend empfunden werden, daß bei den erwähnten Multiplikationen vom ursprünglichen Multiplikationsbegriff abgewichen werden muß. Denn dieser stammt vom Multiplizieren mit natürlichen Zahlen her, mit ihm könnte auch  $(-2) \cdot (-5)$  oder  $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$  oder schließlich  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$  nicht erklärt werden. Jedesmal muß der Multiplikationsbegriff erweitert werden.

4. Das Auftreten von Grenzwerten –  $\frac{5}{6} = 0,83333 \dots$ ? Der aufmerksame Schüler macht hier die Bemerkung



kung, die obige Gleichung stimme ,eigentlich‘ nie, denn wenn man auch noch so viele Stellen nehme, so bleibe doch immer ein Fehler. Es ist so, aber trotzdem steht das Gleichheitszeichen zurecht. Mit der Erklärung, daß man halt ,unendlich viele‘ Stellen zu nehmen habe, ist dem Schüler nicht gedient, da er den Begriff ,unendlich groß‘ doch nicht erfaßt. Natürlich kann man auf dieser Stufe auch nicht den Begriff des Grenzwertes einführen und  $\frac{5}{6}$  als Grenzwert der Summe  $0,8 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$  darstellen. Aber der Lehrer, der um diesen mathematischen Hintergrund weiß, kann trotzdem in verständlicher Weise den Sinn der Gleichung  $\frac{5}{6} = 0,8333\dots$  erklären: Sie bedeutet einfach, daß ich der Zahl  $\frac{5}{6}$  durch  $0,8333\dots$  so nahe kommen kann, wie ich will, wenn ich nur genügend viele Stellen nach dem Komma nehme. – Damit ist zugleich eine Formulierung vorhanden, die auch an allen andern Orten im Mathematikunterricht, wo eigentlich der Begriff des Grenzwertes verwendet werden sollte, gebraucht werden kann. Es sei nur etwa an die Berechnung des *Kreisumfangs* erinnert: Es ist doch sinnlos, zu sagen, der Kreis sei ein regelmäßiges Vieleck mit ,unendlich großer‘ Seitenzahl! Vorstellen kann sich der Schüler (und auch der Lehrer!) diese Figur doch nicht, ganz abgesehen von Einwänden mathematischer Art. Korrekt und zugleich leicht faßlich ist es aber zu sagen, daß man dem Kreisumfang so nahe kommen kann, wie man will, wenn man nur dem eingeschriebenen Vieleck genügend viele Stellen gibt.

5. Der ,Mißbrauch‘ des Gleichheitszeichens –  
*10 Arbeiter = 4 Tage?*

Wie oft wird doch diese Darstellung gewählt, um Aussagen wie ,10 Arbeiter benötigen 4 Tage‘ kurz auszudrücken. Sie ist vollkommen falsch! Ganz abgesehen von allen inhaltlichen Schwierigkeiten ersieht man den Unsinn in diesem Falle schon daran, daß aus dieser ,Gleichung‘ z.B. durch Multiplikation mit 20 auf beiden Seiten (was man bei einer richtigen Gleichung bekanntlich tun darf), die offensichtlich falsche Folgerung  $200 \text{ Arbeiter} = 80 \text{ Tage}$  hervorgeht. Wenn man in solchen Fällen ein Zeichen verwenden will, so ist das Zeichen  $\triangleq$  (gelesen: ,entspricht‘ oder ,entsprechen‘) am Platze:  $10 \text{ Arbeiter} \triangleq 4 \text{ Tage}$ . *Durch das Gleichheitszeichen sollen nur Größen verbunden werden, die sich gegenseitig stets ersetzen können*, also etwa  $3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$ ,  $800 \text{ kg} = 8 \text{ q}$ ,  $2 \text{ Wegstunden} = 9600 \text{ m}$ ,  $1 \text{ Lichtjahr} =$

$9,6 \cdot 10^{12} \text{ km}$  usw. Ebenso falsch sind nach dem Gesagten auch die folgenden Beispiele:

$5 \text{ Fr.} = 2 \text{ m}$ ;  $7 \cdot 3 = 21 \text{ Fr. u. a. m.}$  Und natürlich verdient in diesem Zusammenhang auch der verbreitete Brauch angeprangert zu werden, in einer Rechnung, die mehrere Schritte umfaßt, die einzelnen Schritte durch Gleichheitszeichen zu verbinden:  $4^{\frac{3}{5}} + 7^{\frac{4}{5}} = 4^{\frac{3}{5}} + 7 = 11^{\frac{3}{5}} + \frac{4}{5} = 12^{\frac{2}{5}}$ , anstatt die Zwischenresultate in gesonderten Nebenrechnungen zu bestimmen.

Noch wären etliche ,kritische‘ Stellen im elementaren Arithmetik- und Algebraunterricht zu erwähnen. Wir denken etwa an *Verstöße gegen die sachgemäße Genauigkeit* bei der Behandlung angewandter Aufgaben. In einem verbreiteten Schulbuch wird die Fläche eines quadratischen Gartens von  $13,65 \text{ m}$  Seitenlänge zu  $186,3225 \text{ m}^2$  bestimmt. Dabei ist doch die Größe  $13,65 \text{ m}$  ein Näherungswert, der vielleicht auf  $\text{cm}$  – sicher aber in diesem Gartenbeispiel nicht genauer! – gemessen wurde. Der unbekannte, wahre Wert der Seite sei z. B.  $13,648 \text{ m}$ . Man betrachte nun die Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} 13,65 \mid 5 \cdot 13,65 \\ 4095 \\ 8190 \\ \hline 6825 \\ \hline 186,3225 \end{array}$$

Alle Zwischenergebnisse rechts des vertikalen Striches sind bereits unzuverlässig, so daß die *vernünftige* Angabe heißt: Fläche des Gartens =  $186,3 \text{ m}^2$ .

Wir denken bei den ,kritischen‘ Stellen weiter an die bereits kurz erwähnte Herleitung der Regeln für das Bruchrechnen, an die Verwendung von Klammern, an die Tatsache, daß jede Rechnung durch eine Probe geprüft werden sollte oder an die Unsitte, jedes Gebiet des bürgerlichen Rechnens wieder mit einer (scheinbar) neuen Lösungsmethode zu behandeln, statt klar aufzuzeigen, daß mit ganz wenigen Methoden (meistens sogar mit einer einzigen, mit dem *Dreisatz*) auszukommen ist. – Eine sehr geschickte Verbindung solcher und anderer Probleme mit den allgemeineren mathematischen Zusammenhängen findet der interessierte Leser mit vielen methodisch gut verwertbaren Beispielen z. B. im Buche ,Arithmetik und Algebra‘ von L. Locher-Ernst (Kreuzlingen 1945); manches enthalten auch die zusammenfassenden Rückblicke in den Ober-

stufenausgaben vieler Unterrichtswerke (z. B. Reidt-Wolff, Elemente der Mathematik, Oberstufe, Kurzausgabe, Paderborn 1954); in der ‚Arithmetik, Leitfaden des Rechnens‘ (Verlag Eugen Haag, Luzern 1957) versuchten wir selber, das theoretische Rüstzeug, dessen der Schüler zur Lösung von Aufgaben bedarf, in einfacher Weise so darzustellen, daß ein Einblick in die mathematischen Grundlagen des Rechnens möglich ist.

## Die Sätze über das rechtwinklige Dreieck

Friedrich Pfister, Altdorf

Wie oft bleiben diese Sätze unverstanden! Wie gerne werden sie verwechselt! Leider versucht man allzuoft, mit zu ‚klassischen‘ Beweisen aufzurücken, wenn die Schüler in die Satzgruppe des Pythagoras eingeführt werden sollen. Ist es wirklich so, daß sich das Komplizierte länger hält als das Einfache, weil man es immer wieder zu ergründen sucht? Andererseits finden wir heute jedoch auch eine Tendenz in das Allzueinfache: Um den Schwierigkeiten auszuweichen, diktiert man den Schülern den schönen Satz und gibt ihnen eine farbenprächtige Wandtafelzeichnung, die ins Heft zu kopieren ist. Den Katheten- und den Höhensatz läßt man weg, denn diese Sätze könnten den Pythagoras wieder aus dem Gedächtnis verdrängen.

Warum machen diese Sätze dem Schüler oft soviel Mühe? Warum erschreckt man da und dort, wenn der Satz des Pythagoras verlangt wird? Warum getraut man sich nicht, von den Schülern die Beweise dieser Sätze zu verlangen? Vielleicht hängt der Lehrer zu sehr an Euklid. Euklid aber hat kein Schulbuch geschrieben, sondern sich an die reiferen Kreise gewandt.

Die Satzgruppe des Pythagoras soll nicht in einer Schulstunde behandelt werden. Auch soll man nicht auf vielleicht nur zum Teil verstandenen anderen Sätzen aufbauen. – Viele Wege führen zum Ziel. Es ist unsere Aufgabe, den Weg einzuschlagen, den un-

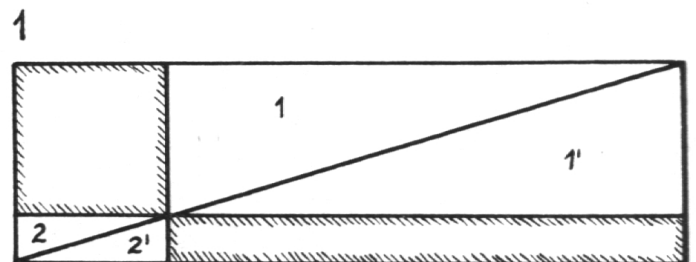
sere Schüler gehen können. Es soll uns möglichst keiner entgleiten.

Sorgen wir dafür, daß das rein geometrische Problem nicht zu einem algebraischen Problem wird. Erst später soll zur Darlegung der geometrischen Gegebenheiten die Algebra herbeigezogen werden. Die Geometrie mit der Algebra zu verknüpfen ist sehr nützlich. Die Verbindung der beiden Gebiete wird später geradezu zu einer Notwendigkeit. Hier aber und in all den Fällen, wo sich Geometrie auf einfache Weise geometrisch erklären läßt, soll zur Begriffsbildung die Algebra nicht verwendet werden, zumindest am Anfang nicht.

### Satz des Pythagoras:

Wir bauen nicht auf den Kathetensatz auf, sondern wir entwickeln ihn unabhängig davon. Es wird zwar interessant sein, die Beziehung zwischen den beiden Sätzen zu finden, aber wir kommen erst nachher dazu. Der Gnomonsatz schleicht sich immer wieder ein. Reden wir aber nicht vom Gnomonsatz in diesem Zusammenhang, sondern gehen wir auf die Grunderkenntnis zurück, die zum Gnomonsatz führt. Den folgenden Überlegungen können die Schüler bestimmt folgen:

Abb. 1: Ein Rechteck wird durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke geteilt (Beweis:  $180^\circ$ -Drehung um den Diagonalenmittelpunkt). Ferner gilt aus dem gleichen Grunde: Dreieck 1 kongruent Dreieck 1' und Dreieck 2 kongruent Dreieck 2'. Schneiden wir von gleichen Flächen gleiche Flächen weg, so haben wir gleich große Reststücke. (Mit der



Schere am Modell oder mit dem Schwamm an der Tafel ausführen.) Da staunt der Schüler, denn vielleicht scheint ihm durch optische Täuschung oder ungeübtes Schätzen die eine der Flächen doch größer. Vor allem ist er überrascht, daß die Restflächen verschieden aussehen, obwohl doch von gleichen Stücken gleiche Stücke weggeschnitten wurden.