

# Ueber philosophische Durchdringung des Mathematikunterrichtes

Autor(en): **Pfluger, Albert**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **27 (1940)**

Heft 22

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-539426>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Mittelschule

## Ueber philosophische Durchdringung des Mathematikunterrichtes

Im Altertum und Mittelalter standen Arithmetik und Geometrie selbständig nebeneinander. Erst die Neuzeit bringt eine Aenderung der Situation. Durch die analytische Geometrie wird das Geometrische arithmetisiert; Mathematik erscheint schlechthin als Lehre von den Zahlen.

Und wieder ändert sich das Bild. Die Entwicklungen der Mengenlehre, der Axiomatik und der theoretischen Logik rücken neue Gesichtspunkte ins Rampenlicht. Vor allem tritt die eine Frage in den Vordergrund: **Welches ist das Verhältnis des Mathematischen zum Logischen?**

Wie sehr die Antworten gleich von Anfang an auseinander gingen, zeigt die Tatsache, dass Frege die Mathematik als Spezialfall der Logik betrachtet, Schröder dagegen die Logik der Mathematik unterordnet. Wie dem auch sein mag, es kommt doch deutlich zum Ausdruck, dass zwischen Mathematik und Logik ein sehr enges Verhältnis besteht.

Gewiss ist die Schulung des folgerichtigen Denkens das vornehme Ziel des gesamten Mathematikunterrichtes. Dagegen sind nicht alle Gegenstände im gleichen Masse dazu geeignet. Ohne in Verdacht zu kommen, den Unterrichtsstoff noch mehr belasten zu wollen, darf dann auch darüber diskutiert werden, ob nicht gewisse langweiligere Kapitel verkürzt werden sollten, um instruktiveren und geistig aufregenderen Fragen Platz zu machen. Wäre es zum Beispiel nicht interessant, durch geeignete Beispiele das Verhältnis zwischen Mathematik und Logik besonders zu beleuchten? Dazu könnten die

nachfolgenden Gedanken eine Anregung bieten; also nur Anregung — und zudem nur eine.

Betrachten wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in welchem das geordnete Zahlenpaar  $(x, y)$  geometrisch dargestellt wird durch einen Punkt  $P$ , dessen Koordinaten eben  $x$  und  $y$  sind. Die Ungleichung

$$(A) \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

ist eine Aussage über das Zahlenpaar  $(x, y)$ : „die Summe der Quadrate ist nicht grösser als 1.“ Es ist eine Aussage von ganz bestimmtem Inhalt und stellt an das Zahlenpaar  $(x, y)$  eine ganz bestimmte Forderung. Es ist nun naheliegend zu fragen, welche Zahlenpaare  $(x, y)$  der Bedingung genügen oder für welche Zahlenpaare die Aussage  $A$  richtig ist. Mit andern Worten, es stellt sich die Frage nach der Menge der „richtigen“ Zahlenpaare, nach dem „Umfang der Aussage“. Im vorliegenden Falle wird diese Menge geometrisch dargestellt durch die Gesamtheit aller Punkte in und auf der Kreislinie um  $O$  vom Radius 1 (Fig. 1).

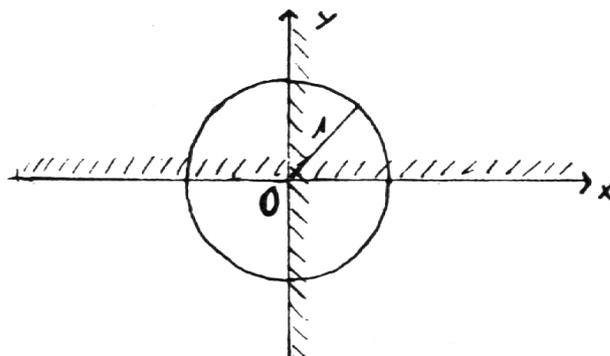


Fig. 1

In gleicher Weise stellt die lineare Gleichung  $ax + by + c = 0$  eine Aussage oder eine Forderung für die Zahlenpaare  $(x, y)$  dar, und der Umfang der Aussage, die Menge

der Lösungen ist, geometrisch gesprochen, die Gesamtheit der Punkte auf einer Geraden.

Die Analogie mit Inhalt und Umfang eines Begriffes ist offensichtlich.

Von grosser Reichhaltigkeit sind nun die Aussagenverbindungen. Ihre Behandlung zwingt nicht nur zu exaktem Denken, sondern ist auch zugleich eine erste Einführung in die formale Logik.

Betrachten wir neben A die weiteren Ungleichungen

$$(B) \quad x \geq 0,$$

$$(C) \quad y \geq 0,$$

ebenfalls Aussagen über Zahlenpaare  $(x, y)$ , deren Umfang dargestellt wird durch die Halbebene rechts der y-Achse bzw. oberhalb der x-Achse, je inklusive Rand (Fig. 1).

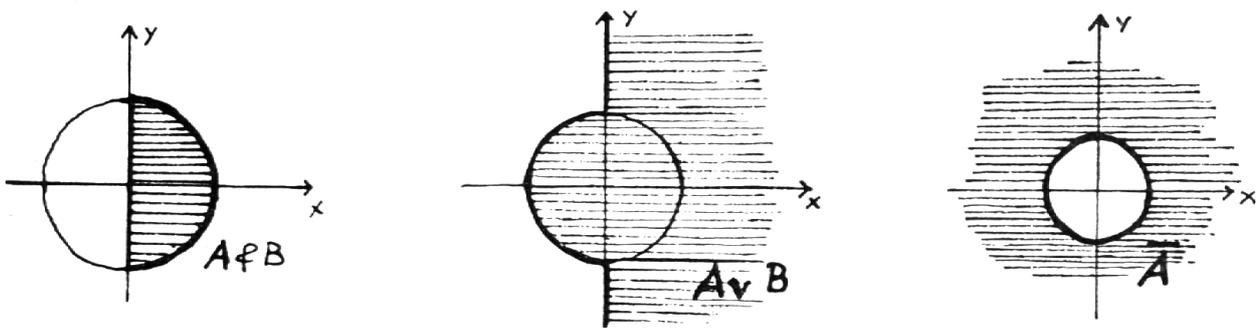


Fig. 2

A & B Konjunktion, A v B Disjunktion,  $\bar{A}$  Negation

„A & B“ (A und B) bezeichne die Konjunktion der Aussagen A und B. „A & B ist richtig“ heisst „sowohl A als auch B ist richtig“. Der Umfang einer Konjunktion besteht somit aus jenen Punkten, die den Bereichen aller Teilaussagen gemeinsam sind (Durchschnitt von Mengen) (vgl. Fig. 2). Oder, bezeichnen A und B die Gleichungen zweier sich schneidender Geraden, so besteht der Umfang der Aussage „A & B“ allein aus dem Schnittpunkt.

„A v B“ (A oder B) bezeichne die Disjunktion der Aussagen A und B. „A v B ist richtig“, heisst „mindestens eine der beiden Aussagen ist richtig“. Der Umfang einer Disjunktion wird also gebildet aus den Punkten, die mindestens einem der Bereiche der

Teilaussagen angehören (Vereinigung von Mengen) (vgl. Fig. 2). Oder, bezeichnet A die Aussage  $x = 0$  und B die Aussage  $y = 0$ , so ist die Aussage  $A \vee B$  identisch mit der Aussage  $xy = 0$ , ihr Umfang besteht aus den Punkten der Koordinatenachsen.

„ $\bar{A}$ “ (A nicht) bezeichne das kontradiktorische Gegenteil von A (Negation von A). „ $\bar{A}$  ist richtig“ heisst „A ist falsch“. Dass  $\bar{\bar{A}} = A$ , ist klar, ebenso, dass für die Konjunktion und für die Disjunktion mehrerer Aussagen das kommutative und assoziative Gesetz gilt.

Ein bisschen tiefer liegt folgendes: Die beiden Aussagen „A & B“ und „ $\bar{A} \vee \bar{B}$ “ sind äquivalent, d. h. die Negation einer Konjunktion ist gleich der Disjunktion der Negationen. Denn das Gegenteil von A & B ist

vorhanden, wenn das Gegenteil von mindestens einer der Aussagen A und B vorhanden ist. Anschaulicher ist die Betrachtung des Umfanges. Der Umfang von „A & B“ besteht aus der Komplementärmenge von „A & B“ (Fig. 2), das heisst aus den Punkten ausserhalb des Kreises oder ausserhalb der rechten Halbebene. — Diese Menge ist aber identisch mit dem Umfang von „ $\bar{A} \vee \bar{B}$ “. In ganz analoger Weise sieht man, dass „A v B“ und „ $\bar{A} \& \bar{B}$ “ einander äquivalent sind. Die Verallgemeinerung dieser Äquivalenzen ist offensichtlich. Sie lautet

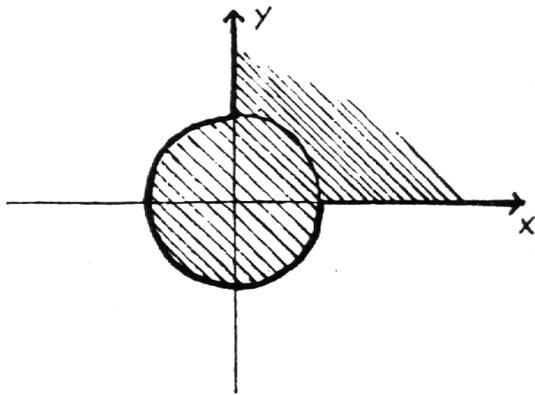
$$\overline{A \& B \& C \& \dots} = \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \dots$$

$$\text{bzw.} \quad \overline{A \vee B \vee C \vee \dots} = \bar{A} \& \bar{B} \& \bar{C} \& \dots$$

und bringt das Dualitätsprinzip der Aussagenverbindungen zum Ausdruck.

Zu neuen Gesichtspunkten führt die Betrachtung von logischen Formeln, in denen Konjunktion und Disjunktion gemischt auftreten. Durch Betrachtung des Umfanges (Fig. 3) können sofort die folgenden Aequivalenzen verifiziert werden:

- (1)  $A \vee (B \& C) = A \vee B \& A \vee C$
- (2)  $A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$



erläutert haben, so ist doch dessen Gültigkeit für ganz beliebige Aussagen unschwer zu erkennen. Analog wie die Analysis in der theoretischen Physik erweist sich dieser Formalismus als sachgemässes Hilfsmittel zur Darstellung logischer Zusammenhänge und zur Gewinnung eines systematischen Ueberblickes. Wohl handelt es sich hier nicht um den gewöhnlichen Formalismus der Algebra, es ist ein neuer Kalkül, aber nichts-

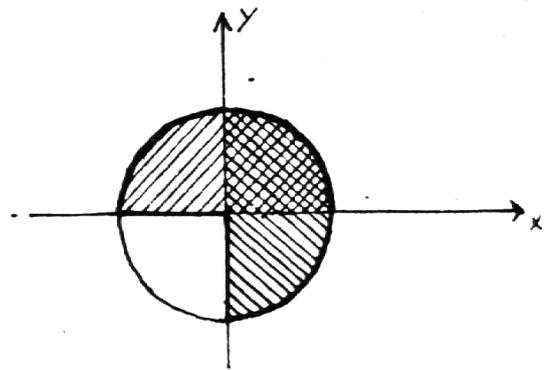


Fig. 3

Die Aequivalenzen (1) und (2) drücken das distributive Gesetz aus für die Disjunktion bzw. Konjunktion. Wegen dieser Analogie zur Algebra bezeichnet man „ $A \& B$ “ auch als logische Summe und „ $A \vee B$ “ als logisches Produkt. Im Gegensatz zur Algebra besitzt dieser Formalismus aber zwei distributive Gesetze (1) und (2), und wir könnten wegen dieses vollkommenen Dualismus zwischen den logischen Operationen  $\&$  und  $\vee$  ebensogut „ $A \& B$ “ als logisches Produkt und „ $A \vee B$ “ als logische Summe bezeichnen.

destoweniger von ausgesprochen mathematischem Charakter. Damit stellt sich hier neu die Frage nach dem Begriff des Mathematischen.

Die mathematische Erkenntnis liegt in einer bestimmten Art der Abstraktion, der formalen, die dabei zur Geltung kommt. Vom „Gegenstand“ wird die Art seiner Zusammensetzung aus Bestandteilen, werden die strukturellen Momente hervorgekehrt und ausschliesslich in Betracht gezogen.

Auf den angegebenen Gesetzen beruhen alle Umformungen und Vereinfachungen logischer Formeln. So kann z. B. die Formel für die Alternative von A und B folgendermassen umgeformt werden:

$$(A \& \bar{B}) \vee (\bar{A} \& B) = A \vee \bar{A} \& A \vee B \& \bar{B} \vee \bar{A} \& B \vee B = A \vee B \& \bar{A} \vee \bar{B} = A \vee B \& A \& B.$$

Die Aequivalenz von Anfang und Schlussformel ist unmittelbar ersichtlich (Fig. 4).

Wenn wir auch diesen Formalismus zunächst an Hand mathematischer Aussagen

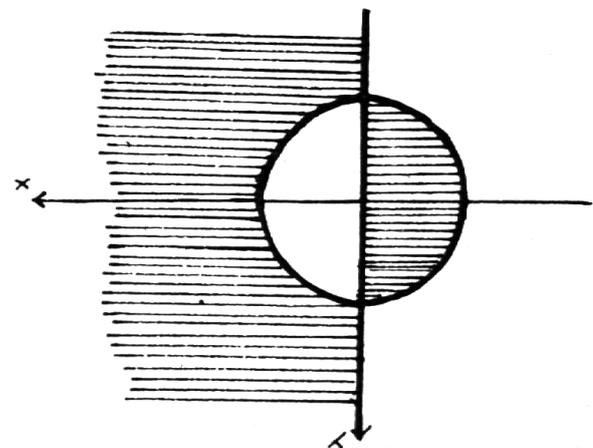


Fig. 4

