Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 76 (1989)
Heft: 6: Verstehen lernen : z.B. Mathematik

Artikel: Minus mal Minus
Autor: Wagenschein, Martin / Schuberth, Ernst / Buck, Peter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-531044

Minus mal Minus

Martin Wagenschein, Ernst Schuberth, Peter Buck[1]

> Zu meinem Schrecken fand ich,
> dass es auch niemand gab,
> der meine Schwierigkeiten verstand.
> C. G. Jung

1. Eingeklagtes Verstehen

Dass sich Mathematiklernen nur zwischen Lehrer und Schüler und Schulbuch abspielt, gilt wohl nur in den wenigsten Fällen. Zumeist sind mindestens noch die Eltern einbezogen, wenn nicht darüberhinaus Nachhilfelehrer unterschiedlichster Kompetenz und Erfahrung.

Schwierigkeiten beim Mathematiklernen werden meist sehr ernst genommen. So auch in unserem Beispiel, obwohl Noten hier keine Rolle spielen, weil keine erteilt werden und Epochenunterricht, also die konzentrierte Beschäftigung z.B. mit Mathematik hier ein Kennzeichen der Schule ist.

Die Tragödie nimmt ihren Anfang, als der Vater eines Morgens verschläft und die Tochter dadurch den Schulbus verpasst. Da es der Vater für angezeigt hält, den Tag nicht ganz zu einem Ferientag ausarten zu lassen, soll die Tochter Rechenaufgaben üben. Er will nur Aufgaben stellen, die in der Schule schon gerechnet wurden. Aber er nimmt die Sache nicht genau genug: In der Schule wurde gerechnet:

$$27\tfrac{1}{2} - 18\tfrac{7}{8} - 9\tfrac{1}{4} + x = 9\tfrac{3}{4}$$

Als Übungsaufgabe stellte er:

$$24\tfrac{1}{4} - 18\tfrac{3}{4} - 8\tfrac{1}{2} = 9\tfrac{3}{4} - x$$

Dabei meint der Vater noch, die Aufgabe sei nun leichter, denn schliesslich ist der gemeinsame Nenner einfacher. Weit gefehlt! Die Aufgabe löst Tränen, ja fast eine Existenzkrise aus. Denn die Schulaufgabe konnte H. lösen, die Übungsaufgabe aber nicht.
Der Vater rechnet sie vor, schrittweise, hat schliesslich links -13 und rechts $-x$. So steht's da:

$$-13 = -x \cdot (-1)$$

$$+13 = +1$$

Im Tonfall seines Erklärens schwingt ein ungeduldiges Also-das-ist-doch-wirklich-ganz-leicht, -das-musst-du-doch-können mit. H. muss sich dagegen wehren: «Ich verstehe nie, was du meinst! Du kannst überhaupt nicht erklären!» Die Stimme überschlägt sich bei «nie» und «kannst» – Mahnung an den Lehrer, den Schüler dort abzuholen, wo er steht.

Der Vorwurf trifft den Vater hart, denn wenn er auch nicht Mathematiker ist, so ist er doch Pädagoge.
Kommt die Mutter hinzu. In der Schule hat sie meist «nur mechanisch gerechnet» und «Formeln auswendig gelernt». Seit die Kinder zur Schule gehen, wird ihr das Mathematische erneut zur Frage. «Ja», sagt sie, «das habe ich auch nie verstanden: warum ist minus mal minus plus?»

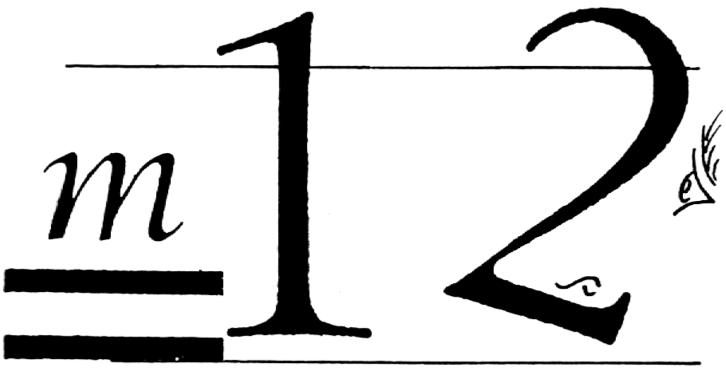
Ja, warum ist minus mal minus plus? Der Vater, dem es doch geläufig ist, weiss auf diese Frage keine Antwort. Aber wenigstens kann nun H. aufatmen: «Hier gibt es jemand, der meine Schwierigkeiten versteht! Ja, recht hatte ich: Der Vater kann's wirklich nicht erklären!»
Nebenbei: der berühmte Physiker d'Alembert soll negative Zahlen «obskur» gefunden haben.[2]

Zum Mittagessen kommt der Onkel. Er ist Ingenieur. Dem kann man eine solche mathematische Frage stellen. Aber bis das Essen auf dem Tisch steht, hat auch er keine Erklärung gefunden, obwohl auch er solche Aufgaben mühelos rechnen kann.

2. «Theorie»

Die Frage lässt auch ihn nicht los. Am nächsten Dienstag kommt mit der Post ein Päckchen Fotokopien. Auf einem Bündel Kopien hat der Onkel geschrieben: «Hier ist m.E. für eine Schülerin wie H. verständlich und in der Beweisführung ausreichend dargestellt, warum $- \cdot - = +$ ist». Rot unterstrichen hat er «verständlich und in der Beweisführung ausreichend». Es ist die folgende Passage:[3]

> «Multiplikation mit ganzen Zahlen
> Bei der Multiplikation können bezüglich des Vorzeichens ebenso wie bei der Addition vier verschiedene Fälle unterschieden werden:
>
> 1) Beide Faktoren sind positiv.
>   Beispiel $3 \cdot 4$
> 2) Der Multiplikand ist negativ, der Multiplikator positiv.
>   Beispiel $(+3) \cdot (-4)$
> 3) Der Multiplikand ist positiv, der Multiplikator negativ.
>   Beispiel $(-3) \cdot (+4)$
> 4) Beide Faktoren sind negativ.
>   Beispiel $(-3) \cdot (-4)$
>
> Fall 1) Er ist bereits definiert. Wir erinnern uns: $3 \cdot 4$ bedeutet: die Zahl 4 soll dreimal als Summand geschrieben werden:
> $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12$



> Fall 2) Die bisherige Definition lässt sich leicht übertragen:
> $3 \cdot (-4)$ bedeutet: die Zahl -4 soll dreimal als Summand gesetzt werden:
> $3 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$.
> In den Fällen 3) und 4) lässt sich die bisherige Definition der Multiplikation nicht mehr übertragen, weil eine Zahl zwar dreimal als Summand gesetzt werden kann, aber keinesfalls «minus dreimal». Die bisherige Definition der Multiplikation wird für negative Multiplikatoren sinnlos. Man muss also für die Fälle 3) und 4) neue Definitionen suchen. Diese Definitionen können nicht willkürlich getroffen werden. Sie müssen vielmehr die alten Definitionen einschliessen und dürfen ausserdem keinen Verstoss gegen die Gesetze (K), (A), (D) darstellen, auf denen alles Rechnen beruht. Die Permanenz (Fortdauer) der Rechengesetze muss gewahrt bleiben.»

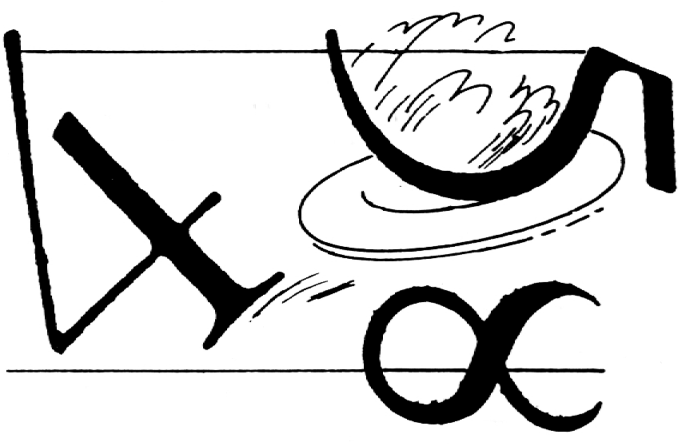
Immer nur «muss» und «darf». Das kann doch nicht als Argument für die Richtigkeit genommen werden!

> «Auf der Beachtung dieser Forderung beruht der einheitliche, logisch zwingende Aufbau der Mathematik. Würde dagegen verstossen, so stünden die neuen Definitionen im Widerspruch zu den bisher gültigen Rechengesetzen. Die Errichtung eines mathematischen Gebäudes, in dem jeder Stein sich einerseits auf die vorhergehenden stützt und andererseits Fundament für die nachfolgenden ist, wäre unmöglich.»

Das muss man dem Fachmann wohl glauben. Aber verträgt Mathematiklernen Autoritätsgläubigkeit? (Ganz davon abgesehen, dass in H.'s Alter sich die Frage der Autorität ganz neu zu stellen beginnt und pädagogisch schon gar nicht mit ihrer Wirksamkeit zu rechnen ist.)

Den Fall 3 («Wie soll $(-3)\cdot 4$ definiert werden?») lassen wir aus, denn er interessiert uns nicht vordergründig.

> «Fall 4) Wie soll $(-3)\cdot(-4)$ definiert werden? Wir wollen das Produkt aus zwei negativen Zahlen versuchsweise definieren und überprüfen, ob die oben erhobene Forderung nach der Permanenz der Rechengesetze erfüllt ist.



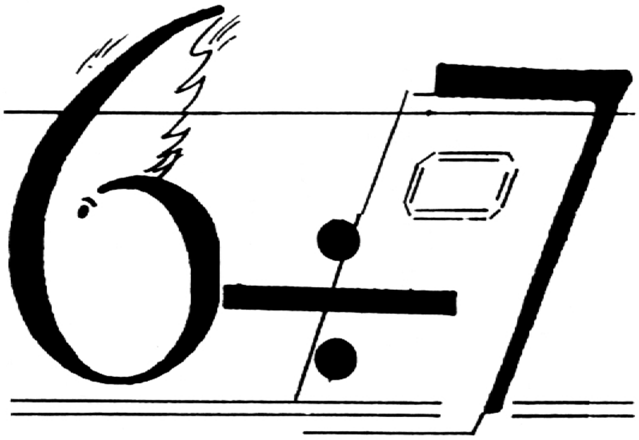
> 1. Versuch:
> $(-3)\cdot(-4)=-12$. Jetzt greifen wir das Distributionsgesetz (D) heraus und fragen anhand eines Beispiels, ob es erfüllt ist.
> $(-4)\cdot[(3)+5]=?\ [(-4)\cdot(-3)]+[(-4)\cdot 5]$
> Links: $(-4)\cdot 2=-8$ rechts:
> $(-12)+(-20)=-32$
> Das Distributionsgesetz ist also *nicht* erfüllt, also verstösst die versuchsweise getroffenen Definition $(-3)\cdot(-4)=(-12)$ gegen das Permanenzprinzip: sie darf nicht gewählt werden.
> 2. Versuch:
> $(-3)\cdot(-4)=+12$. Überprüfung des Distributionsgesetzes ergibt:
> $(-4)\cdot[(-3)+5]=?\ [(-4)\cdot(-3)]+[(-4)\cdot 5]$
> Links: $(-4)\cdot 2=-8$ rechts:
> $12+(-20)=-8$.
> Das Distributionsgesetz ist erfüllt. Die 2. Definition steht also in Einklang mit dem Distributionsgesetz. Selbstverständlich genügt ein einziges Zahlenbeispiel für eine solche Untersuchung nicht.»

«In der Beweisführung ausreichend» hatte der Onkel gemeint, aber ausreichend für wen? Muss ein Siebtklässler nicht die Heranziehung des Distributionsgesetzes als Verkomplizierung der Sache ansehen? *Wir halten dem Onkel zugute, dass seine Kinder in den siebziger Jahren in der Schule eine stark formalisierte Mathematik lernen mussten und er daher die entsprechende Terminologie als bekannt voraussetzte. Daher vielleicht sein Vorschlag.* Aber die Diktion des Textes ist «einer Schülerin wie H.» fremd. Belehrung statt Erklärung.

3. Helfen Modelle weiter?

Das hat der Onkel wohl geahnt, denn es ist ein zweites Bündel Kopien in dem Päckchen, Kopien aus einem Lehrbuch (vgl. Literaturverzeichnis Nr. 6), das mit dem Pfeilmodell arbeitet, einem Modell, das der Mathematikdidaktikerin Hefendehl-Hebeker «nicht ganz geheuer ist, schon weil die formalen Regeln des Pfeilkalküls nicht einfach zu handhaben sind.»[4]

Unsere Bedenken sind anderer Art: Wird der Schüler überhaupt den Modellcharakter dieser Veranschaulichung erfassen? In Hefendehl-Hebekers Protokoll ihres didaktischen Lernprozesses (vgl. Literaturverzeichnis Nr. 5) klagt der Siebtklässler Stefan (ebenso wie H.) eine andere «Erklärung» ein. Haben Lehrer und Schüler dasselbe Vorverständnis und dieselbe Erwartung an eine «Erklärung»? Bedeutet Erklärung für sie vielleicht nicht so sehr Analogie als vielmehr Auseinander-Wickeln einer verwickelten Sache (die wörtliche Übersetzung von Explikation), also Wesensaussage über das mathematische Phänomen statt Isomorphie?



Das Pfeildiagramm für $(-4)\cdot(-6)$ (vgl. Literaturverzeichnis Nr. 6, S. 19) läuft auf ein «viermal in umgekehrter Richtung addieren» hinaus. Wie ist das zu verstehen? *Ein Lehrer, der $\cdot(-2)$ erklärt mit einmal-wegnehmen-und-noch-einmal-wegnehmen, der versteht keine Mathematik.*

4. «Beweise»

Aber wir greifen vor. Am selben Tag bringt die Post zufällig noch einen zweiten Brief. Er enthält Stücke aus einem Briefwechsel zwischen Tatjana Ehrenfest-Afanassjewa und Martin Wagenschein aus dem Jahre 1961.

> «Unser Bruder Erich schickt mir den Text eines Briefes, den er von einem Schüler aus der dritten Klasse des Lyzeums – also etwa 14-15 Jahre alt – (...) erhalten hat (...), nämlich: ‹Ich habe zwei Mathematiklehrer gefragt, warum $1\cdot(-1)=-1$ und $-1\cdot(-1)=+1$ sein soll, aber sie konnten es nicht erklären.
> Ich habe selbst dieses gefunden: $-1+1=0$; dies ist sicher richtig. Multiplizieren wir beide Seiten mit 1, so ist: $1\cdot(-1)+1\cdot1=0$, woran $1\cdot(-1)=-1$!! (I)
> Nun ist aber doch $-1+1=0$. Aber aus (I) folgt: $-1\cdot(-1)-1=0$, also $-1\cdot(-1)=1$!! (II).›
> (...) Im Wesen läuft die Erklärung des Jungen auf dasselbe hinaus, wie ich es zu erklären trachte, nur gibt er sich, natürlich, keine Rechenschaft davon, warum bei der Erweiterung des Zahlbegriffs stets die distributive Regel eingehalten wird für das Multiplizieren.»[5]

Was ich damals und heute noch über den Jungen dachte und denke, ist ernüchternd (und für die Schülerin H. auch beruhigend, denn auf eine solche Idee wäre sie nie gekommen): *Ich schrieb an Frau Ehrenfest-Afanassjewa zurück: «Sie fragen, wie ich über den Jungen denke, der* $(-1)\cdot(\cdot1)=+1$ *richtig bewiesen hat?: Ein geschickter Routinier, glaube ich, der gelernte Automatismen richtig bedenkt. Ob klug, ist eine andere Frage.*
Aus meiner Schulzeit weiss ich nichts ausser, dass ich mich entsetzlich gelangweilt habe, wenn «bewiesen» werden sollte, etwa, dass Winkel an Parallelen einander gleich sind. Und später bei den Beweisen dachte ich immer: Warum macht er jetzt das? (Ich verbinde jetzt den Punkt A mit dem Punkt B). Und diese sinnlose Reihenfolge von Handlungen lernte man dann für den nächsten Tag auswendig. Da schien mir etwas nicht zu stimmen.»

5. Plausibles

Aber zurück zu H.: Sie hatte ja Verstehenkönnen eingeklagt.
Im Treppenhaus der Hochschule trifft der Vater anderen Tags den Mathematikdidaktiker Jürgen Schönbeck. «Ein Beweis ist das nicht,» sagt er, «aber probieren Sie's mal mit einer Reihe, z.B.:

$$
\begin{aligned}
5\cdot(-4)&=-20\\
4\cdot(-4)&=-16\\
3\cdot(-4)&=-12\\
2\cdot(-4)&=-\ \ 8\\
1\cdot(-4)&=-\ \ 4\\
0\cdot(-4)&=-\ \ 0\ *\\
(-1)\cdot(-4)&=+\ \ 4\\
(-2)\cdot(-4)&=+\ \ 8\\
(-3)\cdot(-4)&=+12\\
\dots&=\dots\\
\dots&=\dots
\end{aligned}
$$

Plausibel ist sie wenigstens.»

Verstehen kann H. dies immer noch nicht, aber plausibel ist's ihr in der Tat. Sie macht einen Unterschied zwischen Verstehen und Hinnehmen. *Das Verstehen-wollen ist stärker als das Hinnehmen des für sie Unsinnigen.*

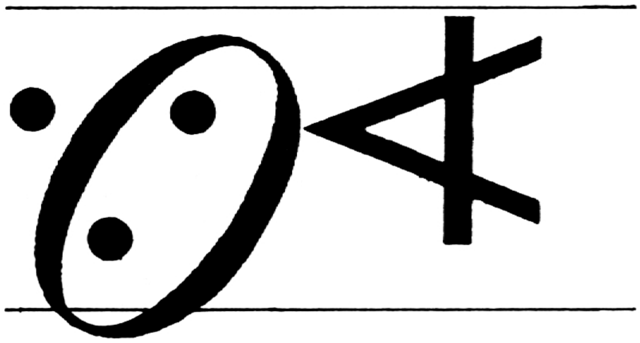
Drängen wir sie mit Plausibilitätsbetrachtungen, dann flüchtet das Verstehen wollen in den Keller.

6. Er-finden

*An der mit * bezeichneten Stelle müsste man an den Rand schreiben: Schon Unsinn! Tun = Nicht tun? Manche sagen: das geht nicht, gibt also nix. Es geht auch nicht. Aber die auf der rechten Seite absteigenden Zahlen suggerieren* $(-1)\cdot(-4)=4$.

«Nun», sagt der Lehrer, «was erwartet ihr hier (*)? Was passt?»
Die Klasse schliesst einmütig auf die positiven Zahlen 4, 8, 12 usw. Sagt nun der Lehrer, oder suggeriert er: das ist ein Beweis, so begeht er ein Verbrechen. Er verschüttet Mathematikverstehen. *Sagt er stattdessen: Das sind Erfindungen, die sich anpassen, so sagt er die Wahrheit. Fragt einer zurück: Darf man denn das?, dann lässt der Lehrer sehen: ‹die 3› ist doch auch eine Erfindung gewesen! Es gibt 3 Äpfel, 3 Birnen usw. Die kann man sehen und anfassen. Aber ‹die 3› gibt's nicht in der Lebenswelt (als sinnlich erfahrbarer Welt)! – das gibt lange Diskussionen.* In ihnen wird Verstehen auf eine andere Art gelehrt: Verstehen heisst hier selbst denken, nicht bloss mit-denken auf dem vorgelegten Gleis.

Ist nun ‹die 3› er-funden oder ge-funden worden?[6] Und es stellt sich die Frage: Ist denn das, was wir geistig an der Welt entwickeln «Erfindung»? Die Zahlen haben wir nicht aus den Dingen (Äpfeln, Birnen usw.) «abstrahiert», sondern wir durchdringen die Anschauung mit geistig gewonnenen Inhalten, eben den Zahlbegriffen. Gibt es nicht vieles in der Welt, was wir nicht von aussen gewinnen, sondern im Inneren er-bilden müssen? Kein Sinnesding ist: Freiheit, Herzensgüte, Treue, und so weiter. Dennoch sind diese Begriffe nicht leer, sondern wohlbestimmt und untereinander in vielfältigen Beziehungen stehend. Durch Intuition fasst das Denken solche Inhalte und bildet es seinem Wesen selber ein. Die Subjekt- und Objektallgemeinheit der Begriffe (erkenntnis-theoretisch gesprochen) wäre ganz unverständlich, wenn es sich um «Er-findungen» in dem Sinne handelte, dass irgendeine Beliebigkeit hineinkäme. Meine Zurückhaltung gegenüber dem «Er-finden» bedeutet aber nicht, dass alles Zwang, logische Zwangsläufigkeit sein müsste. Es gibt keinen logischen Zwang, der mich zum Freiheitsbegriff führen könnte. So ist es auch mit dem Minus mal Minus, mit dem Differential und so weiter.



Übrigens auch Faradays Feldlinien sind *Er-findungen* in diesem Sinn, also im Inneren *Er-bildetes,* sind geistig gewonnener Inhalt – mit Anschluss an die Sinneswelt. Erfindungen, die «funktionieren». Ein perpetuum mobile ist noch nie erfunden worden. Er-finden: Welch ein schönes Tätigkeitswort: aktives, geistig erarbeitendes Finden!

Ob wir es bei dem hier Gemeinten um Erfindungen oder Entdeckungen zu tun haben, ist umstritten. Der Physiker Walter Heitler zum Beispiel hat sich sowohl bei den «Gegenständen» der Mathematik als auch der Physik gegen das Wort Erfindungen ausgesprochen[7], vor allem um abzuwehren, sie seien aus der Luft gegriffen, also Erfindungen im Sinne von ohne-Grundlage-erdacht.

Wenn Sie mich fragen: «Er-findung», «Er-bildung», «Entdeckung» *– das ist hier dieselbe Sache, nur von verschiedenen Seiten aus betrachtet.* Man überschätzt den Menschen, wenn man meint, er könnte Beliebiges erfinden.

7. Freiheitselemente

Es geht uns dreien nicht um Wortklaubereien, es geht uns um ein pädagogisches Anliegen, für das immer wieder von neuem geworben werden muss: um das selbständige Anwenden der Werkzeuge des Denkens, um mit ihnen zu Begriffen des Immateriellen zu gelangen.

Man kann den Kindern zeigen, wie ein Freiheitselement auch in der Mathematik möglich ist. Auch beim Minus mal Minus kann man niemals sagen, man müsse *so oder so verfahren. Man kann nur zeigen, was die* Folgen *sind, wenn man sich für das eine oder andere entscheidet. Etwa: Man stellt einen begrifflichen, gesetzmässigen Zusammenhang zwischen verschiedenen Grössen her (beispielsweise Stromverbrauch, Preis und Kosten). Dabei fragt man insbesondere nach der* Änderung *gegenüber einem Vormonat oder ähnlichem. In der Gesetzmässigkeit können wir aussprechen, wie die Kosten sich ändern, wenn der Verbrauch oder der Preis sich ändern. Die Beziehung ist zunächst nicht anwendbar, wenn beides sich verringert. Hier würde ich nun die Kinder darauf hinweisen, dass grundsätzlich zwei Wege bestehen:*

1. der begriffliche Zusammenhang bleibt erhalten, oder
2. man fomuliert für diesen Fall ein neues Gesetz. [8]

Grundsätzlich müssen die Kinder erfahren, dass beides *möglich ist. Es gibt keine göttliche oder menschliche Instanz, die das verbieten würde. Die Entscheidung für den Fall, dass Minus mal Minus Plus ist, hat eine andere Wirkung als die für den Fall, dass Minus mal Minus Minus ist. Im ersten Fall wird Harmonie entstehen, im zweiten Fall ist eine ständige Unterscheidung unterschiedlicher Fälle notwendig. So ist es auch im Leben. Es gibt Taten, die den Bedürfnissen der Aussenwelt gerecht werden, und andere, die vor allem mein eigenes Interesse im Vordergrund haben. Man kann nicht von vornherein sagen, welche Tat zulässig ist. Wir handeln mal so, mal so. An den Folgen werden wir aber die Unterschiede erkennen können – in dem oben genannten Sinne.*

Was also meines Erachtens deutlich werden sollte: es gibt auch in der Mathematik Freiheitsmomente. Wir können uns für das eine oder das andere entscheiden. Der Hinweis auf das Permanenzprinzip (oder anderes) ist kein logisches *Argument. Wir haben die Freiheit, uns zum einen oder zum anderen zu entscheiden. In den Folgen sind wir aber nicht mehr frei. Wir erzeugen Harmonie, indem wir den einen Fall (dass minus mal minus plus ist) wählen. Zugleich schliessen wir uns damit den Entscheidungen anderer Menschen in der Vergangenheit und Gegenwart an.*

8. Die Notwendigkeit des Gesprächs

Um einen Zipfel dieser rein geistigen, mathematischen Welt zu erhaschen, braucht es einen Gesprächspartner, der begriffliche Geburtshilfe zu leisten vermag, der Formulierungen findet, die das Denken weiterbringen. Bilderreiche Formulierungen dürfen es ruhig sein, auch anthropomorphe, denn jeder weiss ja, dass man um Worte für das Unsichtbare und Unberührbare ringt.

Das Gespräch ist hierbei unumgänglich. Es kann nicht anders als «sehr philosophisch»[9] zugehen. «Action»[10] verschüttet nur. Aber es muss ein sokratisches Gespräch sein. Das ist oft übersehen worden. Quast beispielsweise, der sich in seinem Unterrichtsbericht über das «grosse Spüreisen» ausdrücklich auf Wagenschein beruft, geht hierin, wie ich meine, am Wesentlichen vorbei: Er führt sehr professionell ein herkömmliches Klassengespräch, das in doppelter Weise antisokratisch ist: Es hilft dem Kind nicht zum *Verstehen*, sondern bringt es zum *Hinnehmen*. Dazu ersetzt er das Geistige, Immaterielle des Magnetismus, das in Wagenscheins *grossem Spüreisen* vermittelt wird, durch ein grob-materialistisches Modell[11]. Ein Gespräch also, das dahin lenkt, dass «Der Nordpol das macht», der Nordpol «aus Eis und so», eben der visuell sichtbare, und das «Eisenerz in der Erde es macht, dass die Erde ein grosser Magnet ist»[12], ein Gespräch also, das die Erde auf einen sehr grossen, kugelförmigen Magneten reduziert, an dem sich eben das vergleichsweise kleine «grosse Spüreisen» ausrichtet, ein solches Gespräch ist kein sokratisches, denn es führt nicht zum Verstehen, sondern ersatzweise zum Hinnehmen. Trivialisiert die Physik zu wenn-dann-Beziehungen und die Erde zum Modell-Kugelmagneten. Dasselbe gilt sinngemäss, wenn Minus mal Minus einfach nur gleich Plus gesetzt wird. *Es kultiviert das Hinnehmen und zwingt das Verstehen-wollen zur Flucht in den Keller.*

9. Sokratische und unsokratische Ziele

Aus einem Gespräch wie dem oben bersprochenen (siehe Literaturverzeichnis Nr.13) ausgezeichneten hört man deutlich heraus: Der Lehrer will zu «Ergebnissen» führen. Ihm genügt die blosse Korrelation. ‹Die Magnetnadel zeigt zum Nordpol›. Die Isomorphie des Modells hat sein didaktisches Handeln geprägt. Das angezielte Lernergebnis lautet: 'Die Kugelgestalt der Erde widerspricht nicht dem Vorhandensein von Polen'. Dieser Lehrer hat zweifellos seine Ziele vor Augen, Ziele von der unsokratischen Art, «dass das Mass ihrer Erfüllung festgestellt werden kann»[13]. Der Fragehorizont im *grossen Spüreisen* ist ein ganz anderer: Vor dem geistigen Auge soll eine physikalische Idee *aufstrahlen und das Ganze erleuchten.*

Die unsokratischen Ziele entstammen der 45-Minuten Diktatur. Die 45-Minuten-Stunde zerstört alles, wenn sie eine «Einheit» sein soll. Den Ausweg, den ich sehe, habe ich in meinem Band «Verstehen lehren». beschrieben[14]. Die «Stunde» nur als steter Tropfen, der den Stein höhlt.

Die 45-Minuten Hackordnung der Staatsschule ist das einfachste Mittel, das Verstehen-für-alle zu verhindern und stattdessen die Hack-selektion durch Wettbewerb für selbstverständlich zu erklären. Von dreissig Schülern verstehen fünf, der Rest «kommt mit».

Ich will nochmals andeuten, was ich meine: Für das sokratische Gespräch muss es Nischen geben am Rande der Schnell-Strassen[15], die ich als Informationsmittel toleriere. Bei den Themen der Nischen muss man ernst machen mit:

- *keine Vorkenntnisse haben oder diese vergessen, ja sie verstossen,*
- *das Thema muss ein Rätsel aufgeben (ein «Wunder» sein, sagt Galilei), das jeden «motiviert»,*
- *es muss lösbar sein unter minimaler sokratischer Führung im gemeinsamen Suchgespräch – jeder spricht seine Sprache,*
- *Die Lösung muss zu Erfindungen physikalischer und mathematischer Begriffe führen, sie notwendig machen,*
- *und dadurch neue Horizonte eröffnen, die zu neuen Fragen führen, kurz: exemplarisch für die Entdeckung, Erfindung der Physik oder Mathematik oder eines Teiles von ihr sein.*

Nicht als ob mir selber das in meinem Seminar immer gelungen wäre; es ist für Studenten ungewohnt zu sagen, was sie denken, statt, was sie «wissen». Sie verschreiben sich zu gerne den papierenen Autoritäten.

Physik- und Mathematiklernen hat nicht nur mit einer Sache, es hat auch mit mir selber zu tun. *Was die vergangene Epoche an Begriffen und «Stufen» zu häufen pflegte, ist gar nicht nötig, nur schädlich.*

10. Verstehen lehren!

Schülerin H. steht keineswegs alleine da. Stefan, Frau Hefendehl-Hebekers Schüler, dem es «immer wieder gelingt, auf konstruktive Weise unangepasst zu sein», ruft aus: «Das muss man doch auch noch anders erklären können!»[16] Und nach 70 Jahren, so als ob es erst gestern war, erinnert sich C. G. Jung:

«Die Schule ödete mich an. Sie nahm mir viel zu viel Zeit, die ich lieber mit Schlachtenzeichnen und Feuerspielen ausgefüllt hätte. Die Religionsstunden waren unaussprechlich langweilig und vor der Mathematikstunde empfand ich positive Angst. Der Lehrer gab sich den Anschein, dass Algebra ganz selbstverständlich sei, während ich noch nicht einmal wusste, was Zahlen an und für sich sind. Sie waren keine Blumen, keine Tiere, keine Versteinerung, nichts was man sich vorstellen konnte, bloss Anzahlen, die sich durch Zählen ergaben. Die Anzahlen wurden zu meiner Verwirrung durch Buchstaben, die Laute bedeuteten, ersetzt, so dass man sie sozusagen hören konnte. Merkwürdigerweise konnten meine Kameraden damit umgehen und fanden das selbstverständlich. ... Ich wusste nicht woher und wozu – offenbar um ein befriedigendes Ende der Prozedur zu ermöglichen. Ich war von der Tatsache meines Nichtverstehens dermassen eingeschüchtert, dass ich schon gar nicht zu fragen wagte.»[17]

Solche Verstehenshindernisse sind schwerwiegender als man gemeinhin einschätzt. Wo anders als im sokratischen Gespräch kann man sie ernst nehmen? ***Für das sokratische Gespräch muss Raum und Zeit im Schulalltag bindend vorgesehen werden, müssen Gesprächs-Nischen geschaffen werden neben den Schnell- und Fernstrassen der Lehrpläne.***

Und: Muss man Mathematik einfach nur so hinnehmen? Soll man im Mathematikunterricht nur Konventionen lernen oder auch geistige Inhalte? Konventionen (etwa die Zeichen 3 oder III) *kann man hinnehmen. Um geistige Inhalte* (etwa ‹die 3› oder das ‹magische Feld›) *muss man ringen – im eigentlich philosophischen Gespräch.*

Der verstehen-wollende Lehrer, der wenigstens hin und wieder sein Fach verstanden (und nicht nur gelernt) hat, ist gefragt. Momo mit ihrem verstehenden Schweigen (Literaturverzeichnis Nr. 4) könnte das Leitbild sein.

Anmerkungen

1 Wie bereits in unserem Stück «Demokrit auf dem Zeugenstand» (siehe Literaturverzeichnis Nr.18) treten wir hier dreistimmig, sozusagen im «Terzett» auf, indem wir die Textpassagen, die jeder von uns (Wagenschein, Schuberth und Buck) eingebracht hat, auch durch die Schrift voneinander abheben. Wir treten in der Reihenfolge auf: Buck, Schuberth zu Ende von Abschnitt 2, Wagenschein zu Ende von Abschnitt 3.
2 Vgl. Literaturverzeichnis Nr. 12, Seite 110.
3 Aus Literaturverzeichnis Nr. 2, Seite 79–80.
4 Siehe Literaturverzeichnis Nr. 5, Seite 5. Auch die Bedenken, die wir im folgenden Abschnitt vorbringen, hatte Frau Hefendehl-Hebeker, wie sie uns schrieb, bereits bei der Veröffentlichung von Literaturverzeichnis Nr. 5 ebenfalls.
5 Original abgedruckt in Literaturverzeichnis Nr. 3, Seite 75.
6 Zum Ursprung der Zahlbegriffe vgl. Literaturverzeichnis Nr. 14 und 10.
7 Vgl. Literaturverzeichnis Nr. 7, Seite 39.
8 Dies ist im Prinzip der Weg, den Lois Locher-Ernst in Literaturverzeichnis Nr. 11 beschreitet, vgl. Kapitel 16 bis 19, Seite 80–102.
9 Kommentar eines Lehrers in Literaturverzeichnis Nr. 5, Seite 17.
10 Siehe Literaturverzeichnis Nr. 15, Seite 175.
11 Vgl. hierzu auch Kapitel 6 in Literaturverzeichnis Nr. 1.
12 Vgl. Literaturverzeichnis Nr. 13, S. 447–448.
13 Siehe Literaturverzeichnis Nr. 9, Seite 25.
14 Siehe Literaturverzeichnis Nr. 16, Anhang I, Seite 95f.
15 Vgl. Literaturverzeichnis Nr. 17, Seite 39ff.
16 Siehe Literaturverzeichnis Nr. 5, Seite 6.
17 Siehe Literaturverzeichnis Nr. 8, Seite 34–35.

Literatur

1 Buck, Peter; Mackensen, Manfred: Naturphänomene erlebend verstehen. Köln. Aulis Verlag, 2 1988.
2 Drücker, Heinrich: Mengen und Zahlen – eine Einführung in die moderne Mathematik. Wiesbaden: Falken-Verlag Erich Sicker, 1971.
3 Buck, Peter; Berg, Hans Christoph, (Hrsg.): Kristallisationskeime, Heidelberg: Weltbund für Erneuerung der Erziehung, 1986.
4 Ende, Michael: Momo. Hamburg: Tiedemann Verlag, 1980.
5 Hefeldehl-Hebeker, Lisa: «... das muss man doch auch noch anders erklären können! – Protokoll über einen didaktischen Lernprozess. In: Der Mathematikunterricht 34, 1988 S. 4-18.
6 Heimburg, Ernst; Arabin, Wilhelm: Aufgaben und Beispiele zur Arithmetik und Algebra. Braunschweig: Georg Westermann, 1968.
7 Heitler, Walter: Der Mensch und die naturwissenschaftliche Erkenntnis. Braunschweig: Friedrich Vieweg Verlag, 1961.
8 Jung, Carl Gustav: Erinnerungen, Träume, Gedanken. Olten, Freiburg: Walter-Verlag, 1984.
9 Köhnlein, Walter. Exemplarischer Physikunterricht. Bad Salzdefurth: Verlag B. Franzbecker, 1982.
10 Locher-Ernst, Louis: Entdecken oder Erfinden? – Zum 60. Geburtstag von Paul Finsler. In: Elemente der Mathematik, IX, 1954 S. 25–28.
11 Locher-Ernst, Louis: Arithmetik und Algebra. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag, 1984.
12 Piaget, J.: Die Entwicklung des Erkennens, Bd.1. Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 1972.
13 Quast, Ulrich: Ein grosses Spüreisen im 3. Schuljahr – ein Beitrag zur Praxis des genetischen Unterrichts. In: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule, 14, 1986, S. 445–448.
14 Schuberth, Ernst: Zum Ursprung der Zahlbegriffe. In Leber, S. (Hrsg.): Die Pädagogik der Waldorfschulen und ihre Grundlagen. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgemeinschaft 1983.
15 Wagenschein, Martin: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken, Bd.I. Stuttgart: Ernst Klett, 2 1970.
16 Wagenschein, Martin: Verstehenlehren. Weinheim: Verlag Julius Beltz, 7 1982.
17 Wagenschein, Martin: Die Sprache zwischen Natur und Naturwissenschaft. Marburg: Jonas Verlag, 1986
18 Wagenschein, Martin; Buck, Peter: Demokrit auf dem Zeugenstand. In: chemica didactica 10, 1984 S. 3–20.