Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 58 (1971)
Heft: 21: Moderner Mathematikunterricht

Artikel: Zur Revision des Mathematikunterrichts : ein didaktisches Modell
Autor: Hengartner, Elmar
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-534963

Schweizer Schule

Halbmonatsschrift für Erziehung und Unterricht

1. November 58. Jahrgang Nr. 21

Moderner Mathematikunterricht

Vorwort

Im Mathematikunterricht der Volksschule herrscht gegenwärtig eine beträchtliche Unsicherheit. Diese hängt u. a. damit zusammen, daß der Lehrer künftig einen Mathematikunterricht erteilen soll, der wesentlich verschieden ist von dem, was er selbst während seiner Ausbildung in Mathematik gelernt hat. Die Unsicherheit wird verstärkt durch die Tatsache, daß die Lehrmittelproduzenten im Mathematikunterricht ein Geschäft entdeckt und zum Teil im Schnellverfahren eine Fülle von Lern- und Arbeitsmitteln geschaffen und auf den Markt gebracht haben, welche viele Lehrer verwirren. In dieser Situation darf es kaum verwundern, daß man in der Volksschule heute einer bunten Mannigfaltigkeit an schulpraktischen Versuchen mit moderner Mathematik begegnet, wobei diese Versuche meist von einzelnen Lehrern oder Mathematikern geplant und häufig im Alleingang durchgeführt werden. Diese Feststellung beinhaltet keineswegs eine Verkennung der Pionierleistung, die einzelne Lehrer für die Erneuerung des Mathematikunterrichts vollbracht haben. Aber im jetzigen Zeitpunkt drängt sich eine Koordination der Neuerungsbestrebungen auf, welche nur durch enge Zusammenarbeit zwischen Volksschullehrern, Mathematikern und Didaktikern zu erreichen ist. Im Sinne einer solchen Koordination bearbeitet die Pädagogische Arbeitsstelle des Kantons St. Gallen mit dem Kanton Zürich ein Projekt für den Mathematikunterricht in der Volksschule, welches ansetzt bei der Auswertung bisheriger Erfahrungen mit Lehrmitteln für moderne Mathematik. Ziel des Projektes ist ein Curriculum für den Mathematikunterricht, welches von einem Team von Lehrern, Mathematikern und Experten der Didaktik und Psycholcgie entwickelt wird. Der folgende Aufsatz greift die didaktischen Probleme auf, die sich im Zusammenhang mit der Revision des Mathematikunterrichts der Planungsgruppe stellen. Er ist der Intention nach verfaßt worden für die am Projekt beteiligten Mitarbeiter, dürfte aber auch bei jenen Lesern Interesse finden, die sich mit Fragen der didaktischen Forschung und der Modernisierung des Mathematikunterrichts auseinandersetzen.

In einem zweiten praktischen Teil gibt Max Feigenwinter Hinweise, wie eine zentrale Forderung des modernen Mathematikunterrichtes, nämlich das Rechnen in verschiedenen Stellenwertsystemen, auf der Primarschulstufe eingeführt werden kann. CH

Zur Revision des Mathematikunterrichts — ein didaktisches Modell

Elmar Hengartner

Einführung

Auf allen Stufen der Volksschule sind Bestrebungen im Gange, das Schulfach Mathematik neu zu überprüfen und zu revidieren. Den Anstoß zu dieser Revision gaben einerseits Vertreter der Fachwissenschaft Mathematik, die eine Neukonzeption des Mathematikunterrichts in der Volksschule entwickelten, andererseits waren es Entwicklungs- und Lernpsychologen, die auf Unzulänglichkeiten des traditionellen Rechenunterrichtes hinwiesen.

Es wird heute von verschiedenen Ansätzen her versucht, den Mathematikunterricht in der Volksschule zu modernisieren. Vielerorts begnügt man sich allerdings mit einer Neufassung der Stoffpläne oder führt nach mehr oder weniger gründlicher Überprüfung Lehrmittel zur neuen Mathematik in die Schule ein. Dieses Vorgehen scheint insofern unzulänglich zu sein, als es fraglich bleibt, ob die Schüler aufgrund eines veränderten Stoffplanes mit neuen und anders strukturierten Inhalten oder aufgrund eines neuen Lehrmittels nun wirklich etwas Anderes und Besseres lernen als bisher. Nicht die Stoffpläne und nicht die Lehrmittel müssen sich primär verändern, verändern sollen sich der Unterricht der Mathematik und mit ihm die Lernleistung der Schüler. Eine Veränderung und Verbesserung des Unterrichts aber bedarf einer sorgfältig und umfassenden didaktischen Planung, welche möglichst viele Bedingungen und Variablen des Mathematikunterrichts in der didaktischen Reflexion berücksichtigt. Ziel dieser Arbeit ist es, ein für diese Planungsarbeit geschaffenes Modell zu erläutern und verschiedene didaktische Probleme, die sich im Zusammenhang mit einer Revision des Mathematikunterrichts ergeben, anhand dieses Modells zu diskutieren.

Kennzeichnung des didaktischen Modells

Die im Modell (Abb. 1) vorgesehene Planung unterscheidet sich wesentlich von der traditionellen Lehrplanarbeit.

Lehrpläne beinhalten in der Regel einen mehr oder minder detaillierten Katalog von Lerninhalten, dem einige allgemeine Bildungsziele (meist nachträglich) vorangestellt werden. Sie enthalten keine präzisen Aussagen über die Ziele, welche in der Auseinandersetzung mit den Stoffinhalten erreicht werden sollen, noch geben sie dem Lehrer Hinweise für die Planung, die Gestaltung und die Kontrolle seines Unterrichts. Die Folge ist, daß traditionelle Lehrpläne von den Lehrern weitgehend ignoriert werden. – Hinzu tritt die Tatsache, daß die traditionellen, praxisorientierten und erfahrungsgebundenen Lehrplanrevisionen meist nur geringfügige Verbesserungen und Ergänzungen des bestehenden Unterrichts bewirkt haben. Der Grund liegt darin, daß die geisteswissenschaftliche Lehrplantheorie sich weitgehend auf die hermeneutische Aanalyse und Interpretation der bestehenden Erziehungswirklichkeit beschränkte und keine Lehrplanentscheidungen jenseits des Althergebrachten ermöglichte (ROBINSOHN 1971, S. 23 ff., BLANKERTZ 1969, S. 134–138). Aus den angeführten Gründen erscheint der Versuch, eine grundlegende Revision des Mathematikunterrichts durch die Neuformulierung der bestehenden Lehrpläne zu realisieren, unzulänglich und naiv.

Gegenüber der einseitig stoffbezogenen Lehrplanarbeit sieht das vorliegende *didaktische Modell* eine Planung vor, welche die Voraussetzungen, Bedingungen und Variablen des Mathematikunterrichts möglichst vielseitig erfaßt und reflektiert. Es lehnt sich einerseits an das lerntheoretische Modell des Berliner Arbeitskreises an (SCHULZ 1965, SCHULZ 1969) und berücksichtigt andererseits den curriculumtheoretischen Ansatz der Reform von den Zielen resp. Inhalten her (ROBINSOHN 1971, ROBINSOHN 1969, HUHSE 1968). Es sind drei charakteristische *Merkmale,* welche das didaktische Modell vom traditionellen Lehrplan unterscheiden: *Erstens* erfolgen Entscheidungen über Lernziele, Stoffe, Methoden und Medien aufgrund von systematisch gewonnenen Informationen über den gesellschaftlichen Zusammenhang des zu planenden Unterrichts (1. Soziokulturelle Gegebenheiten), über Stand und Entwicklungstendenzen der Fachwissenschaft Mathematik (2. Fachspezifische Gegebenheiten) und aufgrund von Informationen über entwicklungspsychologische, persönlichkeits- und schichtenspezifische Merkmale der Adressaten (3. Lernvoraussetzungen). *Zweitens* werden Entscheidungen nicht nur über den Stoffkatalog, sondern darüber hinaus über Lernziele, Methoden und Medien gefällt. Die wechselseitige Abhängigkeit, die zwischen der Wahl von Lernzielen, Stoffen, Methoden und Medien besteht, wird dabei stets berücksichtigt. *Drittens* betont das Modell die empirische Kontrollierbarkeit des Unterrichtes: die Evaluation beschränkt sich nicht auf die Kontrolle der Schülerleistung, sondern dient der Überprüfung und Revision der Ziele, Methoden und Medien (vgl. NIPKOW 1971).

Die im didaktischen Modell vorgezeichnete

I. Information über

1. Soziokulturelle Gegebenheiten
- gesellschaftlicher Zusammenhang
- geforderte Qualifikationen

2. Fachspezifische Gegebenheiten
(structure of the discipline)

3. Lernvoraussetzungen
- entwicklungs- und denkpsychologisch
- schichtenspezifisch
- persönlichkeitsbedingt

II. Entscheidungen:

4. Fachdidaktischer Kommentar
Leitideen
- fachspezifisch
- denkpsychologisch

5. Lernziele
- Ermittlung von Lernzielen
- Entscheidung über Lernziele
- Operationalisierung
- Klassifikation von Lernzielen
- Revision

6. Methode
- Großgliederung
- Gliederung der Unterrichtseinheiten
- Sozialformen des Unterrichts
- Aktionsformen des Lehrers

7. Medien
- Lehrmittel
- Arbeitsmittel

III. Evaluation

Abb. 1 Didaktisches Modell

Planung führt nicht zu einem Curriculum im eigentlichen Sinn. Die Erarbeitung eines Curriculums für den Mathematikunterricht setzt eine langfristige Planung über mehrere Jahre voraus und verlangt ein personelles und finanzielles Aufgebot, über das vorläufig nur wenige Institute verfügen. Demgegenüber ist das Modell für eine mittelfristige Planung gedacht, die allerdings die langfristige Curriculumplanung nicht ersetzen darf, sondern lediglich eine praxisnotwendige Alternative darstellt (vgl. ACHTENHAGEN/MENCK 1970 und NIPKOW 1971, S. 4 ff.). Im weiteren sei darauf hingewiesen, daß es sich nachteilig auswirken muß, wenn hier der Mathematikunterricht isoliert von den andern Schulfächern didaktisch geplant wird; eine sinnvolle Koordination der Lernziele verschiedener Fächer kann so vom Ansatz her nicht gelingen. Eigentlich müßte die Revision des Mathematikunterrichts Bestandteil einer Revision des Gesamtcurriculums sein.

Nach dieser knappen Einführung und Kennzeichnung des Modells soll im folgenden die didaktische Planung bezüglich der einzelnen im Modell angeführten Bereiche der Information, der Entscheidung und der Evaluation erläutert werden. Wenn wir dabei diese Bereiche der Reihe nach besprechen, so könnte der Eindruck entstehen, es handle sich hier um ein logisch-deduktives Schema; das wäre ein grundlegendes Mißverständnis. Es ist keineswegs so, daß aus den Informationen über den gesellschaftlichen Zusammenhang, über die fachspezifischen Gegebenheiten und über die Lernvoraussetzungen der Schüler zwingend bestimmte Ziele, Inhalte und Methoden sich ableiten lassen. Ebenso ist es undenkbar, daß aus bestimmten fachspezifischen und denkpsychologischen Leitideen oder «Gesamtlernzielen» sich detaillierte Lernziele, Lernstoffe und Organisationsformen des Unterrichts deduzieren lassen. Auf diese abwegige Vorstellung eines Deduktionsschemas muß nicht zuletzt deshalb hingewiesen werden, weil sie auch neueren als modern und bedeutungsvoll gepriesenen Konzeptionen der Didaktik wieder zugrunde liegt. So heißt es z. B. bei B. und C. MÖLLER (Perspektiven der didaktischen Forschung, München 1966, S. 10): «Die Lehrplanung als mathematisch-logische Abteilung von Teilzielen aus einigen wenigen, von der Kultur eines Staates erstellten Gesamtlernzielen sowie deren psychologische Begründung wird durch logische Maschinen (!) bewerkstelligt.» Ähnlich lösen nach MÖLLER Computer die Planung der Lernorganisation und regeln automatisch die Lernkontrolle (BLANKERTZ 1966, S. 150). Die selben Gedankengänge kehren wieder in Christine MÖLLERs Ausführungen zur Technik der Lernplanung, (MÖLLER 1969). Hinter einer modern anmutenden technologischen Terminologie versteckt sich hier eine naive Neuauflage der längst überholten normativen Didaktik. Gegenüber der deduktiven Ableitung betont das didaktische Modell klar den Entscheidungscharakter der Planung von *Lernzielen, Stoffinhalten und Methoden.* Es ist grundsätzlich möglich, die Planungsarbeit bei jedem der sieben im Modell angeführten Informations- oder Entscheidungsbereiche anzusetzen. Wesentlich ist, daß die Planung, wo immer sie einsetzen mag, schlußendlich alle Bereiche der Information und Entscheidung miteinbezieht.

Nach diesem Exkurs wollen wir nun versuchen, das didaktische *Modell im Zusammenhang der Revision des Mathematikunterrichts in der Grundschule zu erläutern* und die im Modell angedeuteten Schritte der Planung zu konkretisieren. Wie bereits angedeutet, vollzieht sich die Planung in drei Hauptschritten: es werden *Informationen* über gesellschaftliche Entwicklungen und Bedürfnisse hinsichtlich des Mathematikunterrichts (1.), über die fachspezifische Struktur der Mathematik (2.) und über die Lernvoraussetzungen der Schüler (3.) bereitgestellt. In Berücksichtigung dieser Informationen werden Entscheidungen getroffen über Intentionen oder Leitideen (4.), Lernziele und Stoffinhalte (5.), Methoden (6.) und Medien (7.). Informationsgewinnung, Entscheidungsprozesse und die Realisierung der Entscheidungen im Unterricht werden empirisch überprüft durch die *Evaluation* (8.), welche zur Revision der Ziele, Methoden und Medien führt. Es ist offensichtlich, daß die mit der Evaluation gegebene Rückkoppelung neue Planungsphasen einleitet, welche kaum je zu einem endgültigen Abschluß gelangen können, sondern eine permanente rollende Reform bedingen.

I. Bereitstellung von Informationen

Die Informationen, die für die Entscheidungen über Ziele, Methoden und Medien bereitgestellt werden müssen, betreffen Fragen der gesellschaftlichen Bedeutung der Mathematik (1.), ihre fachspezifische Struktur (2.) und die Lernvoraussetzungen der Schüler hinsichtlich des Mathematikunterrichts (3.). Die Entwicklungs- und denkpsychologischen Lernvoraussetzungen sollen im folgenden in exemplarischem Sinn etwas breiter dargestellt werden.

1. Soziokulturelle Gegebenheiten

Soll über Ziele und Lerninhalte des Mathematikunterrichts entschieden werden, so muß zunächst einmal ermittelt werden, welche mathematischen Leistungen von den Schülern in der gegenwärtigen und künftigen Gesellschaft gefordert werden. Es geht mit anderen Worten um die Frage, in welchen *Situationen* (der weiteren Ausbildung, der Berufstätigkeit usw.) der Schüler später mathematische Leistungen erbringen soll und mit welcher Wahrscheinlichkeit er solchen Situationen begegnen wird. Die Analyse dieser Situationen und der in ihnen erforderlichen Leistungen führt weiter zur Frage nach den mathematischen *Qualifikationen,* welche den Schüler zur Bewältigung dieser Leistungen befähigen und welche im Mathematikunterricht erworben werden sollen. Schließlich stellt sich die Frage, welche mathematischen *Lerninhalte* diese Qualifikationen bewirken (ROBINSOHN 1971, S. 44 ff., HUHSE 1968, S. 129–138). Ein Beispiel: Wenn DIENES den Siegeszug des Computers in immer neuen Bereichen der Wirtschaft und Technik als ein wichtiges Argument für die Modernisierung des Mathematikunterrichts erwähnt, so müßte erst ermittelt werden, wieviele Schüler wie häufig später tatsächlich mit Computern arbeiten werden. Sodann müßte festgestellt werden, ob die für die Arbeit mit Computern erforderlichen Qualifikationen z. B. das Operieren im Binärsystem bereits in der Grundschule notwendig machen (DIENES 1970, 20 ff.) Freilich darf der Versuch, mathematische Qualifikationen und Lerninhalte nach dem Kriterium gesellschaftlicher Anforderungen zu bestimmen, nicht pragmatisch eingeengt werden. Es geht hier nicht um eine Planung des Mathematikunterrichts unter dem alleinigen Gesichtspunkt der späteren Verwendbarkeit des zu Lernenden. Weitere Kriterien für die Ermittlung von Lernzielen und Stoffinhalten ergeben sich etwa aus der Frage nach dem Beitrag, den der Mathematikunterricht leisten kann zum Verständnis einer Kultur, die in zunehmendem Maße von mathematischen Strukturen bestimmt ist.

Die Analyse der soziokulturellen Gegebenheiten hinsichtlich mathematischer Qualifikationen, die in der gegenwärtigen und künftigen Gesellschaft erforderlich sind und vom Schüler erworben werden müssen, stellt Probleme, die noch nicht befriedigend gelöst sind. Selbst wenn es möglich sein sollte, durch sozialwissenschaftliche Analysen gesellschaftlicher Anforderungen (Arbeitsplatzanalysen u. a. m.) mathematische Qualifikationen zu bestimmen, so ist die Frage noch ungeklärt, mit welchem mathematischen Lerninhalten diese Qualifikationen nun tatsächlich erreichbar sind. ROBINSOHN warnt vor übertriebenen Erwartungen: «Nur eine naive Überschätzung der durch exakte empirische Untersuchungen bereits gewonnenen oder zu erwartenden Erkenntnisse jedoch könnte verkennen, daß der größte Teil der genannten Aufgaben in Wirklichkeit in dieser Weise nicht zu lösen ist» (ROBINSOHN 1971, S. 48). Immerhin bezeichnet ROBINSOHN das *Verfahren der Expertenbefragung* und der Expertengespräche als vielversprechende und entwicklungsfähige Methode der Lernzielgewinnung. Als zu befragende Experten werden Personen genannt, die einzelne Verwendungsbereiche (in unserem Fall der Mathematik) repräsentieren und die kompetent sind, zur Auswahl von Stoff- und Lernzielen Stellung zu beziehen; es sind dies in erster Linie Vertreter der Fachwissenschaft Mathematik und Abnehmer der Schulabsolventen (Vertreter der weiterfürenden Schulen, der Berufsbildung usw.). Die Expertengespräche werden aufgrund eines präzisen Fragenkatalogs geführt und die von den Experten geäußerten Antworten anschließend kritisch beurteilt und gewichtet. Es sei schon an dieser Stelle erwähnt, daß die Expertenbefragung keineswegs das einzig mögliche Verfahren der Lernzielgewinnung darstellt. FLECHSIG beschreibt wenigstens acht weitere Verfahren, die – abgesehen von der bereits erwähnten Arbeitsplatzanalyse – allerdings weniger von soziokulturellen Gegebenheiten ausgehen (FLECHSIG 1969/70, S. 9–23). Wir werden an späterer Stelle (5. Lernziele) auf diese Verfahren zurückkommen.

Wir haben in diesem ersten Abschnitt versucht zu zeigen, daß die Analyse soziokultureller Gegebenheiten Informationen liefert über erforderliche mathematische Qualifikationen der Schüler in der gegenwärtigen und künftigen Gesellschaft; diese Informationen bilden eine notwendige Grundlage für die Entscheidung über Lernziele und Stoffinhalte. Eine zweite Informationsquelle ist mit der Fachwissenschaft Mathematik gegeben: der fachwissenschaftliche Beitrag zur Planung des Mathematikunterrichts soll im folgenden nur kurz skizziert werden.

2. Fachspezifische Gegebenheiten

Wie eingangs erwähnt, waren es in erster Linie Vertreter der Fachwissenschaft Mathematik, die den Anstoß zu einer Revision der Lerninhalte des Mathematikunterrichts gaben. Der Grund liegt in einer fachwissenschaftlichen Neuorientierung der Mathematik: seit G. CANTOR Ende des 19. Jahrhunderts die Mengenlehre begründete, ist eine bedeutsame Entwicklung der Mathematik vor sich gegangen, die dahin geht, das *Denken in Strukturen* in den Mittelpunkt zu stellen. Der theoretische Ansatz CANTORs führte zu einer «Vereinheitlichung und Präzisierung der mathematischen Denkweise, die es erlaubt, den Aufbau der gesamten Mathematik aus wenigen Grundprinzipien zu versuchen» (NEUNZIG/SORGER 1969, 8 f.). Die «Grundstrukturen» der Mathematik wurden u. a. von einer französischen Mathematikergruppe (Pseudonym «Nicolas Bourbaki») herausgearbeitet: sie umfassen algebraische Strukturen (z. B. arithmetische Operationen wie Addition oder Division), Ordnungsstrukturen (z. B. die Ordnungsrelation zwischen den ganzen Zahlen) und topologische Strukturen (z. B. Offenheit oder Geschlossenheit von Kurven und Flächen). Der Ausbau der Strukturlehre sowie die Entwicklung einer stark formalisierten Sprache der Mathematik, welche erlaubt, Operationen und Verfahren eindeutig zu formulieren, fordern als Grundlage eine leistungsfähige mathematische Logik, die eine zentrale Stellung in der Mathematik einnimmt.

Für die geplante Revision des Mathematikunterrichts in der Volksschule ergibt sich die Forderung, daß sich Entscheidungen über Lernziele an der Struktur der Fachwissenschaft Mathematik orientieren müssen. Es widerspricht z. B. der fachwissenschaftlichen Struktur, wenn das Erlernen von Rechentechniken als vornehmliches Ziel der Schulmathematik betrachtet wird und wenn mathematische Begriffe und Operationen nur eingeübt werden, soweit sie zum Verständnis dieser Techniken notwendig erscheinen. Eine an der «structure of the discipline» orientierte Revision des Schulfaches Mathematik fordert vielmehr die Integration des bisherigen Rechenunterrichts in einen Mathematikunterricht, dessen erstes Ziel das Denken in Strukturen und die Förderung der Abstraktionsfähigkeit ist. Es geht nicht um Mechanisierung von Techniken und Verfahren, sondern um Einsicht in mathematische Begriffe und Operationen aufgrund eingehender Betrachtung von Strukturen.

Orientierung an der Fachdisziplin heißt nun allerdings nicht, daß die inhaltliche Struktur des Unterrichtsfaches Mathematik die Struktur der Fachwissenschaft widerspiegeln müßte. Es gibt keine der Mathematik immanente Didaktik, aus welcher die Didaktik des Mathematikunterrichts der Volksschule unmittelbar ableitbar wäre. Die Entscheidungen über Ziele des Mathematikunterrichts erfolgen nicht einseitig aufgrund von Informationen über fachspezifische Gegebenheiten, sondern berücksichtigen daneben auch gesellschaftliche Bedürfnisse hinsichtlich des Mathematikunterrichts und die alters- und schichtenspezifischen sowie die persönlichkeitsbedingten Lernvoraussetzungen der Schüler. In der Berücksichtigung dieser Faktoren liegt eine Relativierung der Kompetenz des Fachwissenschaftlers für Enscheidungen über Unterricht. Gerade weil didaktische Entscheidungen auch Informationen erfordern von seiten der Sozialwissenschaften, der Entwicklungs- und Lernpsychologie usw., muß die Idee einer «Abbilddidaktik» zurückgewiesen werden (vgl. BLANKERTZ 1969, S. 126–134). Im folgenden Abschnitt sollen die Informationen, welche die Lernvoraussetzungen der Schüler für den Mathematikunterricht betreffen, etwas ausführlicher dargelegt werden.

3. Lernvoraussetzungen

Vertreter der Fachwissenschaft Mathematik haben in erster Linie den Anstoß zu einer Revision der Inhalte des Schulfaches Mathematik bewirkt; die Revision der Methode und der Medien ist v.a. vonseiten der neueren Entwicklungs- und Denkpsychologie gefordert worden. Die Informationen der Entwicklungs- und Denkpsychologie bedürfen aber der Ergänzung und Korrektur durch Informationen über schichtenspezifische und persönlichkeitsbedingte Merkmale der Schüler. Wenn im folgenden der entwicklungs- resp. denkpsychologische Beitrag im Vordergrund steht, so geschieht das in der Absicht, die Bedeutung von Informationen für die Entscheidungen über Unterricht an einem exemplarischen Bereich aufzuzeigen.

3.1. Entwicklungs- und denkpsychologische Voraussetzungen:

Entscheidungen über Lernziele und Lerninhalte, über methodische Fragen und über den Einsatz von Medien stützen sich u. a. auf Informationen über die Entwicklung mathematischen Denkens und über die Genese mathematisch bedeutsamer Begriffe bei Kindern und Jugendlichen. Den Mathematikunterricht resp. Rechenunterricht kennzeichnete bis vor wenigen Jahren ein diesbezüglicher Mangel an psychologischer Reflexion. Der erste Rechenunterricht z. B. bestand in einer weithin unkritischen Hinführung der Kinder zum Zahlbegriff, in der getrennten Behandlung der vier oder fünf Grundrechenoperationen im schrittweise erweiterten Zahlenraum, und zwar ausschließlich im Dezimalsystem. Dabei wurden häufig zwei grundlegende Fehler begangen: man setzte erstens voraus, daß die Kinder bei Schuleintritt bereits über den Zahlbegriff verfügen und man schränkte zweitens das Ziel des Mathematikunterrichts ein auf das Erlernen und den Gebrauch bestimmter Verfahrenstechniken und Regeln, die im Sinne reiner «Gedächtnisstrategien» verwendet wurden (vgl. DIENES/JEEVES 1968).

3.1.1. Bereits in den Zwanzigerjahren versuchte WITTMANN in seiner ersten Konzeption zum *«ganzheitlichen Rechnen»*, den Mathematikunterricht der Grundschule aus seiner mechanistischen Einseitigkeit zu befreien, indem er forderte, der Rechenunterricht müsse vom tätigen Operieren mit Mengen ausgehen und den Kindern durch Mächtigkeitsvergleiche von Mengen den Zahlbegriff erst einsichtig machen. Rechnen definiert er als ein «Ordnen von Mengen mit Hilfe der Zahlbegriffe und der Operationen unter Verwendung von Symbolen für Zahlbegriffe und Operationen» (WITTMANN 1958, 95). Damit steht der Zahlbegriff nicht mehr am Anfang des Rechenunterrichts, am wenigsten der recht schwierige Zahlbegriff «eins». Nach WITTMANN müssen die Kinder erst lernen, Mengen in ihrer Umwelt aufzufassen und zu ordnen durch Vergleich, Gliederung, Vereinigung und Trennung usw., um diese sodann in einem zweiten Schritt in bezug auf ihre Mächtigkeit zu vergleichen und durch Vergleich zum Kardinalzahlbegriff zu gelangen. Rechnen steht demnach am Ende eines sorgfältig vorbereiteten Abstraktionsprozesses. WITTMANN wendete sich weiter gegen die starren Zahlbilder, ein methodisches Mittel, das nur zu mechanistischem Rechnen verleitet. Er betonte, daß v.a. durch Zählen keine Einsicht in Zahlbegriffe gewonnen werden kann.

Allerdings blieb WITTMANN die Begründung seiner psychologisch bestimmten Hypothesen und Entscheidungen weitgehend schuldig. Er beschränkte sich auf eine Beschreibung der Denkvorgänge, die sich bei der Bildung des Zahlbegriffs und der arithmetischen Operationen abspielen, eine Beschreibung, die zudem ganzheitsideologisch verengt war. Dabei hat WITTMANN unter Berufung auf psychologische Motive die Fachstruktur der Mathematik insofern vernachlässigt, als die von ihm geforderte vorzahlige Mengenbehandlung keineswegs der naiven Mengenlehre entspricht (BREIDENBACH 1969, 319). Er ist dem Fehler verfallen, einseitig aufgrund psychologischer Informationen Entscheidungen über den Mathematikunterricht zu treffen.

3.1.2. Soweit neuere Modelle des Mathematikunterrichts entwicklungs- und denkpsychologische Information berücksichtigen, stützen sie sich alle mehr oder weniger explizit auf das Werk von PIAGET. Im Gegensatz zu WITTMANN hat PIAGET nicht nur Denkvorgänge beschrieben; seine *genetische Psychologie* deckt vielmehr die Entwicklungslinie mathematischen Denkens auf.

PIAGET ist in seinen klinischen Versuchen den Bedingungen mathematischer Denkprozesse nachgegangen und hat mit seinen Untersuchungen einen wesentlichen Beitrag geleistet zur Bestimmung der Lernvoraussetzungen der Kinder für Mathematikunterricht.

Bevor wir im folgenden einige seiner Untersuchungen kurz skizzieren, müssen wir eine *einschränkende Bemerkung* zu seinen Ergebnissen vorausschicken: PIAGET stellte in seinen Experimenten meist fest, in welchem Alter Kinder zu welchen mathematischen Einsichten fähig sind. Er nimmt an, die Denkentwicklung vollziehe sich in zeitlich mehr oder weniger fixierbaren Stufen. Dieser Versuch zeitlicher Fixierung durch die Entwicklungspsychologie ist neuerdings vonseiten der Sozialisationstheorie sehr in Frage gestellt worden. Welche Leistungen ein Kind im einzelnen erbringen kann, ist weniger eine Frage der Altersstufe, auf der sich das Kind befindet, als eine Frage der bisherigen Lernerfahrungen u. a. Faktoren. Von verschiedener Seite ist PIAGETs Stufentheorie dahin kritisiert worden, daß der zeitliche Entwicklungsverlauf des Denkens abhängig ist von der Häufigkeit der Lernsituationen, in denen das Kind mit mathematischen Problemen konfrontiert wurde, 2. von schichtenspezifischen Bedingungen, die mit der unterschiedlichen Lernwelt von Kindern der Unter-, Mittel- und Oberschicht gegeben sind, 3. von persönlichkeitsbedingten Merkmalen wie Motivation, Lernstil, Lerntempo usw., die unter Kindern gleicher Altersstufe stark differieren. Zudem hängt die Fähigkeit der Kinder einer bestimmten Altersstufe, mathematische Probleme zu lösen, vom Veranschaulichungsgrad der Problemstellung ab (AEBLI 1968, AEBLI 1969, OERTER 1967, LAUX 1969). Trotz dieser Einschränkungen ergeben sich aus den Untersuchungen PIAGETs wertvolle Informationen für didaktische Entscheidungen über den Mathematikunterricht, Informationen, die weniger in zeitlichen Angaben sich erschöpfen, sondern den Entwicklungsverlauf mathematischen Denkens betreffen. Am *Beispiel des Zahlbegriffs* sollen im folgenden einige Ergebnisse PIAGETs referiert werden:

Die Genese des Zahlbegriffs setzt nach PIAGET zwei Operationen voraus: die Kardinierungsoperation (=Zuordnung der entsprechenden Kardinalzahl zu einer vorliegenden Menge) und die Reihenbildungsoperation oder Seriation (= Bildung der Ordnungsstruktur, die mit der Anordnung der ganzen Zahlen gegeben ist, also Bildung des Ordinalzahlbegriffs).

Für die Bildung des Kardinalzahlbegriffs (Kardinierungsoperation) ist die Einsicht in die Erhaltung einer Menge unabhängig von ihrer wahrgenommenen Anordnung, d. h. die *Invarianz* eine erste Vorbedingung. Es gibt kein numerisches Denken ohne Invarianz der Mengen. Wie PIAGET nachweisen konnte, ist die Einsicht in die Invarianz das Ergebnis eines langwierigen Lernprozesses. Werden z. B. Perlen aus einem Gefäß A mit großem Durchmesser und geringer Höhe in ein höheres Gefäß B mit kleinerem Durchmesser umgefüllt (Abb. 1), so verneinen Kleinkinder aufgrund der veränderten wahrgenommenen Gegebenheiten die quantitative Gleichwertigkeit. Das anschauliche Denken ahmt die Gegebenheiten der Warhnehmung nach. Erst nach einem Zwischenstadium, in welchem das Kind meist durch handelndes Probieren zur empirisch festgestellten Gleichwertigkeit gelangt (z. B. Zurückschütten der Perlen aus Gefäß B in Gefäß A), erreicht das Kind nach PIAGET etwa mit 7 Jahren die Einsicht in die logisch evidente Invarianz (PIAGET/SZEMINSKA 1969, 15–57).

Zum selben Ergebnis gelangte PIAGET in einem weiteren Versuch, in welchem Kinder zu einer Reihe roter Spielmarken ebensoviele blaue Spielmarken hinsetzen mußten. (Abb. 2): die Kleinkinder waren auf einer ersten Stufe nicht imstande, die logisch-numerische Entsprechung (die eindeutige Zuordnung) zu vollziehen. Sie setzten eine nur qualitativ wahrnehmungsgebundene Entsprechung, d. h. sie setzten eine ebenso lange Reihe und vernachlässigten die Dichte der Spielmarken (vgl. auch Abb. 3). Selbst durch Abzählen gelangen die Kinder nicht zur Feststellung der Invarianz, ehe die Zuordnung operativ geworden ist, d. h. ein umkehrbares System von Beziehungen (PIAGET 1967, 149 ff.).

Die Einsicht in die logisch evidente Invarianz baut auf der Umkehrbarkeit oder Reversibilität operativer Denkprozesse; d. h. die Kinder haben die Stufe des numerischen Denkens erreicht, wenn sie im Perlenversuch die quantitative Gleichwertigkeit nicht mehr handelnd-empirisch, durch Zurückschütten der Perlen aus Gefäß B in A feststellen, sondern diese Umkehrung im Denken vollziehen. PIAGET geht davon aus, daß Denkprozesse auf tatsächlichen Handlungen aufbauen, die als solche irreversibel (nicht umkehrbar) sind, als verinnerlichte Handlungen im Denken aber reversibel werden.

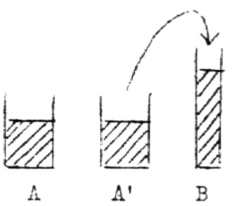

Abb. 1

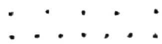

Abb. 2

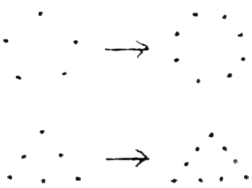

Abb. 3

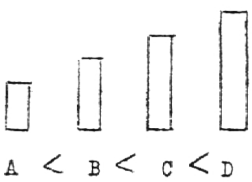

Abb. 4

Den Weg vom irreversiblen Handeln zum reversiblen Denken zeigt folgender Versuch: Es wurden Kindern Holzperlen (Menge B) vorgelegt, bestehend aus einer größeren Teilmenge dunkler Holzperlen (A) und einer kleineren Teilmenge weißer Holzperlen (A'). Die Kinder wurden gefragt, ob mit den dunklen Holzperlen (A) oder mit den Holzperlen (B) die längere Kette gebildet werden könne. Die Kinder behaupteten nach PIAGET bis zum Alter von 5 bis 6 Jahren, die aus den dunklen Perlen (A) gebildete Kette sei die längere, d. h. sie konnten nicht gleichzeitig die Teilmengen (A und A') und die Gesamtmenge denken und zueinander in Beziehung setzen. Das zeigt, wie sehr die Überlegungen der Kinder noch an irreversible Handlungen in der Vorstellung gebunden sind; ist die Kette der dunkeln Perlen, die gegenüber den weißen in der Mehrzahl sind, einmal gebildet, so bleiben nurmehr die weißen übrig und verfügbar. Die Bildung zweier Hypothesen (d. h. Kette A zuerst bilden, dann mit Kette B vergleichen) ist erst in einem späteren Stadium operativen Denkens möglich, durch welches das Ganze und seine Teile aufeinander bezogen werden. An die Gesamtmenge (B) und gleichzeitig an die Teilmengen (A und A') denken, setzt die Reversibilität des Denkens voraus. Diese ist nach PIAGET keineswegs bei allen Schulanfängern gegeben (PIAGET 1964, S. 57 ff.).

Die Bildung des Kardinalzahlbegriffs ist erst möglich, wenn das Kind die logische Invarianz von Mengen unabhängig von qualitativen Unterschieden der Elemente und unabhängig von deren wahrnehmungsmäßiger Anordnung erkennt, was wiederum die Reversibilität des Denkens voraussetzt. Nun setzt der Aufbau des Zahlbegriffs nicht nur die Operation der Kardination (den Kardinalzahlbegriff) voraus, sondern auch die Operation der Reihenbildung, d.h. die Einsicht in die Anordnung der ganzen Zahlen als einer Ordnungsstruktur. Diese bildet die Voraussetzung für den *Aufbau des Ordinalzahlbegriffs*. Die für die Zahlbegriffsbildung notwendige Reihenbildungsoperation untersuchte PIAGET u. a. in einem Versuch, bei welchem Kinder aus 10 verschieden langen Stäbchen A bis K eine gleichmäßige Treppe bilden mußten (Abb. 4). PIAGET fand, daß noch 5- bis 6jährige Kinder zum Teil erhebliche Schwierigkeiten in der Reihenbildungsoperation hatten. Der Grund liegt darin, daß jedes Stäbchen, das hinzugelegt wird, gleichzeitig unter der doppelten Beziehung betrachtet werden muß: «länger als das zuletzt hingelegte» ($B > A$) und «kürzer als die noch übrig gebliebenen» $B < C, D, \ldots$). Die Operation der Reihung gelingt erst, wenn die Kinder die Transitivität der Größenbeziehung ($A < B < C$) erkennen, eine Einsicht, über die nach PIAGET nicht alle Schulanfänger verfügen. Diese Einsicht ist aber eine Voraussetzung für die Bildung des Ordinalzahlbegriffs und damit für den Zahlbegriff erst recht (PETTER 1966, S. 211 ff.).

Der Aufbau des Zahlbegriffs setzt voraus, daß die Operationen der Kardination und der Seriation zugleich mit denselben Elementen vorgenommen werden, denn jedes Element in der Folge der ganzen Zahlen ist gleichzeitig Kardinalzahl und Ordinalzahl. Die Synthese der Kardinierungs- und Reihenbildungsoperation im Aufbau des Zahlbegriffs setzt nach PIAGET voraus, daß jede der beiden Operationen über längere Zeit zuerst getrennt geübt werden. Auf dieser Grundlage erst gelangt das Kind zum Zahlbegriff, der «zugleich die Reihenfolge im allgemeinen wie auch die Gleichwertigkeit im allgemeinen» ist (PIAGET 1964, S. 63).

Die dargestellten Versuche PIAGETs zur Genese der Zahl beim Kind zeigen einige Merkmale und Bedingungen operativen Denkens. Die Entwicklung des Denkens wird nur verständlich vom Begriff der Operation her. Die Entwicklungslinie des Denkens geht vom wirklichen (irreversiblen) Handeln zum verinnerlichten Handeln (actions intériorisées), das als Denkoperation reversibel wird. Hat das Kind die Stufe operativen Denkens erreicht, so steht es nach PIAGET zunächst auf der *Stufe der konkreten Operationen:* d. h. das Kind ist fähig zu operativem Denken, sofern dieses Denken ausgeht vom Operieren mit gegebenem Material.

3.1.3. Es stellt sich nun die Frage, welche *Informationen über Lernvoraussetzungen* der Grundschüler für den Mathematikunterricht sich aus den denkpsychologischen Untersuchungen PIAGETs ergeben und welche Entscheidungen über Lernziele, Methoden und Medien durch diese Informationen nahegelegt werden. Es muß vorausgeschickt werden, daß PIAGET sich weitgehend auf die denk- und entwicklungspsychologische Problemstellung beschränkt hat. Eine didaktische Auswertung seiner Ergebnisse für den Mathematikunterricht versuchten u. a. AEBLI (1968), A. FRICKE (1964), Z. B. DIENES/E. W. GOLDING (1970) und H. SKOWRONEK (1970). Die wichtigsten Informationen über Lernvoraussetzungen und einige didaktische Konsequenzen sollen im folgenden in einigen Punkten zusammengefaßt werden:

a. Der erste Mathematikunterricht darf den *Zahlbegriff nicht voraussetzen,* auch wenn die Kinder bereits zählen können.

b. Durch *Zählen* gelangt das Kind nicht zum Zahlbegriff; Zählen setzt lediglich eine assoziative Verknüpfung von Benennungen voraus, der Zahlbegriff aber beinhaltet Operationen, die zuerst mit Gegenständen ausgeführt werden müssen.

c. *Veranschaulichungsmittel,* die nur eine passive visuelle Wahrnehmung der Zahlen ermöglichen, sind wenig bedeutsam für die Bildung mathematischer Begriffe. Der Zahlbegriff bildet sich nicht durch schrittweise Abstraktion von Form, Farbe und Größe veranschaulichender Gegenstände, wie es Vertreter der Wahrnehmungs- und Gestaltpsychologie behauptet haben, sondern durch Operationen. (Im Gegensatz zu den Operationsstäbchen führen etwa die farbigen Strukturstäbchen in KERNs Rechenkasten lediglich zu einem wahrnehmungsmäßigen Ablesen, einer «lecture perciptive».)

d. Der Aufbau eines mathematischen Begriffs (z. B. des Zahlbegriffs) bedarf der *handelnden Ausführung* der ihn konstituierenden Operationen. Alle Operationen, die einem Begriff oder Verfahren zugrunde liegen, müssen die Kinder handelnd ausgeführt haben. Wesentlich ist im Mathematikunterricht nicht das Veranschaulichen im visuellen Sinn, sondern das Handeln.

«Die Intelligenz ist ein System von Operationen, die ganze Mathematik ist ein System von Operationen. Die Operation ist nichts anderes als ein Handeln; es ist ein wirkliches Handeln, das sich innerlich vollzieht und ‚reversibel' geworden ist.» Darum müssen Kinder auch zuerst mit wirklichem Material gehandelt und operiert haben, ehe sich ihre Handlungen verinnerlichen können (PIAGET 1964, 72).

DIENES hat diesem Sachverhalt im sog. «dynamischen Prinzip» Rechnung getragen, wonach Kinder einen mathematischen Begriff lernen durch spielenden Umgang mit den Elementen des Begriffs anhand von strukturiertem Material. Das Handeln und Spielen mit Material ist als solches irreversibel, wird aber reversibel im Denken und damit quantitativ begriffsbildend (DIENES 1965, 31–48).

e. Die Bildung mathematischer Begriffe erfolgt nicht im Sinne plötzlicher Einsicht, sondern ist abhängig von *vielfältigen und oft langwierigen Lernprozessen.* Der Einsicht in mathematische Begriffe voraus geht eine Phase probierenden Handelns, wobei der *Variation der Problemstellung* entscheidende Bedeutung zukommt (Prinzip der mathematischen Variabilität nach DIENES 1970, 46).

f. Im Mathematikunterricht sollten stets *ganze Systeme von Operationen und Umkehroperationen,* zusammengehörige Begriffe und Verfahren unter Beobachtung ihrer wechselseitigen Beziehung *gleichzeitig* und geschlossen erarbeitet werden. Es geht um die «operative Gesamtbehandlung einer mathematischen Einheit» (FRICKE 1964, 92). Es widerspricht dem Aufbauprozeß operativer

Denkstrukturen, mathematische Lernstoffe allzu sehr in Teilgebiete zu zergliedern und diese je getrennt von der Veranschaulichung zur Abstraktion zu führen. Durch die Gesamtbehandlung mathematischer Einheiten wird der Gefahr des eingleisigen stereotypen Denkens und der Ausbildung blinder mechanistischer Rechenverfahren entgegengewirkt. DIENES konnte in seinen Untersuchungen zum mathematischen Lernprozeß nachweisen, daß das methodische Prinzip des Elementarisierens für den Mathematikunterricht nur beschränkte Gültigkeit hat. Es ist nach ihm häufig besser, dem Schüler die umfassendere kompliziertere Struktur einsichtig zu machen, weil damit die einfacheren Strukturen ebenfalls einsichtig und nicht blind gelernt werden (Theorie vom «tiefen Ende», DIENES/JEEVES 1968, 107–110). In analoger Weise dürften mathematische Begriffe und Operationen einsichtiger erfaßt werden, wenn sie nicht isoliert, sondern im Zusammenhang mit verwandten Begriffen und Operationen eingeführt und unter Variierung der Problemstellung geübt werden.

3.2. *Schichtenspezifische und persönlichkeitsbedingte Voraussetzungen:*

Wir haben versucht, aufgrund entwicklungs- und denkpsychologischer Untersuchungen einige Lernvoraussetzungen der Grundschüler für Mathematikunterricht zu ermitteln und einige didaktische Konsequenzen anzudeuten. Diese für die Entscheidung über Lernziele, Methoden und Medien notwendigen Informationen bedürfen der Ergänzung und Relativierung durch Informationen über schichtenspezifische Merkmale und persönlichkeitsbedingte Differenzen der Schüler. Aufschlußreich sind in diesem Zusammenhang die vorliegenden Ergebnisse des Frankfurter Mathematik-Projekts: die Erhebung der Lernvoraussetzungen betrafen u. a. Merkmale der Kinder aus verschiedenen sozio-ökonomischen Schichten sowie einzelne Dimensionen ihrer Ausgangsintelligenz. – Die möglichst umfassende Erhebung der schichtenspezifischen und persönlichkeitsbedingten Lernvoraussetzungen ist nicht nur bedeutsam für Entscheidungen über Lernziele und die methodische Organisation des Unterrichts, sondern auch für Fragen der Evaluation: Wie wirkt sich moderner Mathematikunterricht gegenüber dem traditionellen Rechenunterricht aus auf Kinder verschiedener sozialer Herkunft? Welche kognitiven Lernstile werden besonders gefördert? Welche kognitiven Leistungen werden vernachlässigt? Welche Auswirkungen ergeben sich für das sprachliche Verhalten der Kinder? (BAUERSFELD/WEIS/WOLFF 1971).

Informationen über schichtspezifische Differenzen wurden in bisherigen Lehrplanreformen kaum berücksichtigt. Sie erweisen sich aber als unabdingbar notwendige Voraussetzung für die didaktische Planungsarbeit in einem demokratisch verstandenen Schulwesen. Soll die Schule nicht weiterhin privilegierte Institution der Mittelschicht sein, so muß sie sich vermehrt auch an den Lernvoraussetzungen und am Leistungsverhalten der Unterschichtkinder orientieren. Für unseren Zusammenhang heißt dies konkret, daß Unterschiede in kognitiven Leistungen, im Sprachverhalten und im Sozialverhalten, welche durch schicht-spezifische Faktoren bedingt sind, in Entscheidungen über Lernangebot und Lernorganisation berücksichtigt werden müssen (ROLFF 1967, ROEDER 1967, AEBLI 1969, BERNSTEIN 1959).

II. Didaktische Entscheidungen

Die Informationen über soziokulturelle Gegebenheiten (1.), über die fachspezifische Struktur der Mathematik (2.), und über die Lernvoraussetzungen der Schüler (3.) bilden die Basis für die Entscheidungen über Lernziele, Methode und Medien. Der Begriff der Entscheidung legt nahe, daß es sich hier nicht um eine Deduktion aus fachspezifischen, denkpsychologischen u. a. Gegebenheiten handeln kann, sondern daß stets verschiedene Alternativen denkbar sind, Mathematikunterricht zu planen, zwischen welchen man wählen muß.

4. Fachdidaktischer Kommentar (Leitideen)
Der erste Bereich der Entscheidungen betrifft die Grundsätze oder Leitideen für den Mathematikunterricht, welche in Anlehnung an die ermittelten Informationen formuliert werden. Insbesondere die Informationen über fachspezifische Gegebenheiten und Lernvoraussetzungen der Schüler legen eine Reihe von Leitideen nahe, die im folgenden an Beispielen dargelegt werden sollen.

4.1. Denkspsychologisch orientierte Leitideen:

Als Beispiele für denk- und lernpsychologisch orientierte Leitideen sollen hier einige Prinzipien angeführt werden, welche DIENES – unter Berücksichtigung der Fachstruktur der Mathematik – im Anschluß an PIAGET formuliert hat:

– Jede mathematische Struktur oder Idee soll auf vielfältige Art dargeboten werden: Prinzip der Variation der Veranschaulichung.

– Das Auffassungsvermögen der Kinder soll möglichst vielseitig angesprochen werden: Prinzip der Variabilität der Wahrnehmung. Jede Beschränkung auf nur ein Material hemmt den Abstraktionsvorgang und begünstigt assoziative Schrankenbildung.

– Mathematische Konzepte können Kinder leichter abstrahieren, wenn alle Variablen häufig geändert werden (z. B. Einsicht in das Dezimalsystem durch Einführung anderer Stellenwertsysteme): Prinzip der mathematischen Variabilität.

– Das Kind soll durch Manipulation mit konkretem Material mathematische Sachverhalte induktiv entdecken lernen: Prinzip des konstruktiven Denkens usw.

Diese vier von DIENES angeführten Prinzipien haben lediglich Beispielcharakter; sie bedürfen der Ergänzung durch Leitideen über die Motivation der Schüler, die Art der Berücksichtigung schichtspezifischer Unterschiede der Schüler u.a.m.

4.2. Fachspezifische Leitideen:

Leitideen, die sich an den fachspezifischen Gegebenheiten orientieren, sollen auch an einigen Beispielen dargelegt werden. Diese Leitideen können freilich nicht isoliert von den Lernvoraussetzungen und den soziokulturellen Gegebenheiten bestimmt werden.

– Der Mathematikunterricht fördert das Denken in Strukturen, indem er die Kinder die verschiedenen Situationen und Darstellungen gemeinsamer Strukturen möglichst selbständig entdecken läßt.

– Ein spezifisches Ziel des Mathematikunterrichts besteht im Erlernen einer stark symbolisierten Sprache.

– Der Weg führt vom Operieren mit Material zunächst zum Verbalisieren und zur Erfindung einer den Problemen angemessenen Zeichensprache. Erst in einem dritten Schritt wird die mathematische Symbolsprache eingeführt.

– Eine erste Einführung in naive Mengenlehre und Logik gehört zur mathematischen Grundbildung.

– Die naive Mengenlehre bildet die Grundlage für die Erarbeitung und das Verständnis zahlreicher mathematischer Begriffe und Operationen. So werden Zahlbegriff und arithemtische Operationen mengentheoretisch begründet (die Zahl als gemeinsame Eigenschaft gleichmächtiger Mengen, Operationen aus Mengenoperationen).

– Die Einsicht in verschiedene Stellenwertsysteme fördert das Verständnis für das Dezimalsystem usw. usw.

Die Leitideen müssen im einzelnen spezifiziert und begründet werden. Wenn im folgenden Abschnitt die Frage nach den Lernzielen gestellt wird, so dienen die Leitideen bei der Ermittlung und Entscheidung über Lernziele gleichsam als eine Art Richtschnur.

5. Lernziele

Mit der Bestimmung der Leitideen werden bereits die ersten Entscheidungen getroffen. Allerdings sagen diese Entscheidungen noch wenig Konkretes für den Unterricht aus, da die Leitideen meist sehr allgemein und relativ vage formuliert sind. Die Konkretisierung erfolgt erst im Zusammenhang der Entscheidungen über Lernziele und Stoffinhalte. Dieser Abschnitt beschäftigt sich zunächst mit der Ermittlung von Lernzielen und der Entscheidung über Lernziele, sodann mit der Frage der Operationalisierung und Klassifizierung von Lernzielen.

5.1. Ermittlung von Lernzielen und Entscheidung über Lernziele:

Es besteht eine spezifische Gefahr bei jeder Revision eines Unterrichtsfaches, daß die Auswahl der Lernziele und Stoffinhalte weitgehend willkürlich erfolgt aufgrund persönlicher Erfahrungen und einseitiger Präferenzen der mit der Revision beauftragten Entscheidungsträger. Um den Auswahlprozeß von diesen u. a. unkontrollierten subjektiven Einflüssen zu befreien und damit transparenter zu gestalten, ist es erforderlich, zunächst ein breites Spektrum möglicher alternativer Lernziele anzustreben. Für die *Ermittlung einer möglichst umfassenden Ge-*

samtmenge alternativer Lernziele bieten sich verschiedene Verfahren an:
- Berücksichtigung einzelner Mathematikprojekte
- Analyse neuerer Lehrpläne zum Mathematikunterricht
- Ermittlung der Lernziele von Lehrmitteln für moderne Mathematik
- Analyse und Vergleich der Wirkung traditionellen Rechenunterrichts und des modernen Mathematikunterrichts in Schulversuchen
- Arbeitsplatzanalyse (Analyse von in der gegenwärtigen und künftigen Berufswelt geforderten mathematischen Leistungen)
- Befragung von Experten der Mathematik, der weiterführenden Schulen usw. (siehe Abschnitt 1)
- Fachwissenschaftliche Ableitung von Lernzielen
- Erfindung von Lernzielen in Gruppendiskussion oder individuell (vgl. FLECHSIG 1969/70, FLECHSIG 1970).

Wir haben z. B. versucht, mittels einer Analyse neuerer französischer, schweizerischer, deutscher und schwedischer Lehrpläne zum Mathematikunterricht der Grundschule Lernziele zu ermitteln. Die Analyse ergab eine Fülle von Lernzielalternativen; sie brachte zum Bewußtsein, wie unterschiedlich Entscheidungen über Leitideen, Lernziele und Stoffinhalte getroffen werden, obschon diesen Entscheidungen dieselben oder doch ähnliche Informationen zugrundeliegen.

Die Ermittlung alternativer Lernziele verhindert, daß Entscheidungen für bestimmte Lehrpläne oder Lehrmittel vorschnell und willkürlich getroffen werden; sie weckt in den Entscheidungsträgern ein kritisches Bewußtsein für die Auswahlprozesse und läßt nach Kriterien suchen, welche die Entscheidungsprozesse rational gestalten helfen.

Für den Prozeß der *Entscheidung über Lernziele* hat FLECHSIG ein theoretisches Modell entwickelt, das sich als Versuch versteht, die verschiedenen Determinanten der Auswahl von Lernzielen zu systematisieren (FLECHSIG 1970). In Anlehnung an dieses Modell, das hier nicht weiter erläutert werden soll, kann die Entscheidung über Lernziele des Mathematikunterrichts als Prozeß verstanden werden, der darin besteht, daß verantwortliche Entscheidungsträger (z. B. Mitglieder einer Lehrplankommission) nach bestimmten Regeln aus der Gesamtmenge alternativer Lernziele eine Teilmenge von Lernzielen auswählen, wobei diese Auswahl sich einerseits abstützt auf Informationen über soziokulturelle Gegebenheiten (Abschnitt 1) und über die Lernvoraussetzungen der Schüler (Abschnitt 2), andererseits beeinflußt ist durch persönliche Präferenzen einzelner Entscheidungsträger hinsichtlich der Lernziele, Methoden und Medien des Mathematikunterrichts.

Mit dem Hinweis auf die Präferenzen einzelner Entscheidungsträger als bestimmender Faktor der Auswahl von Lernzielen ist auch bereits angedeutet, wie wesentlich die Frage ist, wer Entscheidungen vornimmt. Die Wahl bestimmter Entscheidungsträger sowie die Zusammensetzung des Entscheidungsgremiums bestimmt zum voraus die Richtung der Lernzielentscheidungen. Würden z. B. in ein Gremium, das über die Revision des Mathematikunterrichts der Volksschule zu entscheiden hat, v. a. Lehrer gewählt, die noch kaum Einblick haben in die Gebiete der naiven Mengenlehre und der Logik, so würden die Lernzielentscheidungen wohl eher die Fortführung eines traditionellen Rechenunterrichts begünstigen. Im übrigen ist die Wahl einer heterogenen Gruppe von Entscheidungsträgern einem konformen Gremium von Entscheidungsträgern vorzuziehen, weil die Lernzielentscheidung in der heterogenen Gruppe weit eher eine Klärung der Standpunkte der einzelnen Mitglieder notwendig macht. FLECHSIG betont in diesem Zusammenhang, wie entscheidend die Klärung der eigenen Positionen (Präferenzen) der Entscheidungsträger ist, will man den Auswahlprozeß transparenter gestalten und damit optimieren.

5.2. Operationalisierung und Klassifizierung von Lernzielen:

Entscheidungen über Lernziele sind nur möglich, wenn diese eindeutig und präzise formuliert werden (Problem der Operationalisierung) und wenn die einzelnen alternativen Lernziele auch wirklich als Alternativen auf der gleichen Ebene formuliert sind (Problem der Klassifizierung). Im allgemeinen sind die Zielangaben in unseren Lehrplänen sehr vage und vieldeutig. So heißt es z. B. in einem st. gallischen Lehrplan zum Schulfach Rechnen (1958):

«Der Schüler ist im mathematischen Denken auszubilden und damit zu befähigen, rechnerische Probleme zu erfassen und Aufgaben, die das Leben im allgemeinen stellt, selbständig zu lösen. Die Kenntnisse über Zahlsystem und Grundoperationen werden vertieft. Grundoperationen und bürgerliche Rechenarten sind bis zu einer angemessenen Fertigkeit zu üben, ebenso auch das Kopfrechnen und Schätzen. Wichtig ist, daß der Schüler lernt, sich kurz und eindeutig auszudrücken und das Erfaßte auch schriftlich knapp, sorgfältig und übersichtlich darzustellen.»

Diese Zielangabe gibt keine Auskunft über Art und Schwierigkeitsgrad der rechnerischen Probleme, die der Schüler erfassen und lösen soll. Es bleibt offen, welche Aufgaben «das Leben im allgemeinen stellt» und welche Fertigkeit bezüglich Grundrechenoperationen und bürgerlichen Rechenarten als «angemessen» zu bezeichnen ist. Es bleibt im einzelnen unklar, welche Ziele der Lehrer im Rechenunterricht erreichen soll. Und es ist u. a. eine Folge solch vager Zielformulierungen, daß objektive Lernkontrollen durch Prüfungen nicht durchführbar sind und daß damit die Selektion der Schüler aufgrund von Zufälligkeiten erfolgt.

Der Schwerpunkt unserer Lehrpläne liegt nicht in einer Präzisierung der Unterrichtsziele, sondern in der Aufzählung der zu behandelnden Lehrstoffe. Damit wird eindeutig «die Tendenz gefördert, die Bedeutung der Lehrinhalte zu überschätzen und Kenntnisse stofflicher Art als Selbstzweck anzusehen, jedoch auch die Fähigkeiten zu vergessen, die mit ihrer Hilfe erreicht werden sollen. Es ist überhaupt zu bemerken, daß im Lehrplan für viele Gebiete entweder sehr allgemeine Ziele oder konkrete Lehrstoffe angegeben werden. Dazwischen klafft eine Lücke, die mit den operationalisierten Lehrzielen komplexerer Art auszufüllen wäre». (MESSNER/POSCH 1969, 40)

Ebenso wichtig wie die Erstellung eines Katalogs von Stoffinhalten, die im Mathematikunterricht behandelt werden sollen, ist die Frage, was der Schüler denn eigentlich können soll, der mit diesen Lerninhalten konfrontiert wurde. Mit der Bestimmung der Stoffinhalte müßten demnach insbesondere im Bereich des Mathematikunterrichts immer folgende Fragen beantwortet werden: Welche Leistungen werden vom Schüler im Zusammenhang einzelner Lerninhalte gefordert? Welche Aufgaben soll der Schüler imstande sein zu lösen? Die Beantwortung der gestellten Fragen fordert eine *Operationalisierung der Lernziele:* Operationalisierte Lernziele umschreiben in Kategorien beobachtbaren Schülerverhaltens (MAGER 1969) oder in Form einer Aufgabenbeschreibung (FLECHSIG 1969/70) das Endverhalten des Schülers, d. h. sie beschreiben, was der Schüler tun können muß, wenn er das intendierte Lernziel erreicht hat.

Damit ist auch eine erste grobe *Klassifikation* der Lernziele gegeben: die Lerninhalte gehören zur Inhalts- oder Themenklasse der *Stoffziele,* die operationalisierten Lernziele (formuliert z. B. als Aufgabenbeschreibung) zur Funktionsklasse der *Verhaltensziele.* Die Bestimmung der Lernziele für den Mathematikunterricht muß demnach stets in zwei Dimensionen erfolgen: in der Dimension der Stoffziele und in der Dimension der Verhaltensziele. Die *Stoffziele* werden weitgehend fachdidaktisch begründet. Im Bereich des Mathematikunterrichts umfassen sie z. B. Begriffe wie Menge, Element, Schnittmenge, Leermenge, Operationen wie Vereinigung, Durchschnitt, algebraische Begriffe wie Gleichung, Ungleichung, Relation oder geometrische Begriffe wie Würfel, Dreieck, Kugel usw. (vgl. MAIER, 1970, 213–224). Aus diesen Beispielen geht hervor, daß eine weitere Klassifizierung der Stoffziele nach fachwissenschaftlichen Kriterien erfolgt. – Die *Verhaltensziele* beziehen sich auf Lernleistungen (z. B. mathematische Begriffe abstrahieren, mit Mengen oder Zahlen operieren, Sachverhalte symbolisieren, Probleme lösen, Strategien entwickeln usw.); sie bedürfen einer psychologischen Begründung und Klassifizierung. Den umfassendsten bisherigen Versuch, die Lernleistungen vom verhaltenstheoretischen Ansatz her zu klassifizieren, bilden die Taxonomien von BLOOM, KRATHWOHL und Mitarbeitern (BLOOM 1956, KRATHWOHL u. a. 1964). Die Autoren dieser Taxonomien haben eine Klassifizierung der Lernleistungen (möglicher Verhaltensziele) für drei unterscheidbare Bereiche menschlichen Verhaltens vorgenommen: für den kognitiven Bereich des Wissens und der intellektuellen Fähigkeiten und Fertigkeiten, für den affektiven Bereich der Interessen, Einstellungen und Haltungen sowie für den psychomotorischen Bereich der motorischen Fertigkeiten. Die Taxonomien des für den Mathematikunterricht besonders relevanten kognitiven Bereichs umfassen in hierarchischer Ordnung sechs Kategorien zunehmender Komplexität, die von Leistungen einfacher Reproduktion bis zu komplexen Leistungen des Problemlösens und Begründens reichen. Wir verweisen auf die teilweise gekürzten Darstellungen der Taxonomien in deutscher Übersetzung bei MESSNER (1969), BLANKERTZ (1969) und MÖLLER (1969).

Die Taxonomien von BLOOM und seinen Mitarbeitern sind primär für die Bedürfnisse der Leitsungsmessung in der Schule geschaffen worden; sie ermöglichen eine eindeutige und einheitliche Klassifikation schulischer Lernleistungen auf verhaltenstheoretischer Grundlage. – Es bestehen neben BLOOMs Taxonomien eine Reihe weiterer Modelle für die Klassifizierung von Lernzielen; es sei hier lediglich auf den Versuch GAGNEs hingewiesen, ein Versuch, der insoweit über BLOOM hinausgeht, als GAGNE nicht nur Lernleistungen (im Sinne des Endverhaltens) klassifiziert hat, sondern auch die Lernprozesse, die zu bestimmten Lernleistungen führen, für den kognitiven Bereich nach einem hierarchischen Schema geordnet hat (GAGNE 1970).

Es stellt sich nun die Frage nach der didaktischen Bedeutung der Taxonomien für die Planung des Mathematikunterrichts, insbesondere für die Bestimmung der Lernziele. Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß man den Mathematikunterricht der Volksschule nicht revidieren und verändern kann mit einer bloßen Neufassung des Stoffkatalogs, in welchen nun auch die Bereiche der Mengenlehre und Logik aufgenommen sein wollen. Vielmehr geht es um die Frage, was denn der Schüler Neues und Anderes lernen soll, welche Lernprozesse ingang gebracht und welche Leistungen intendiert werden. Das heißt, es geht um die Bestimmung der Verhaltensziele, die in der Auseinandersetzung mit den verschiedenen Lerninhalten erreicht werden sollen. In diesem Zusammenhang ermöglichen die Taxonomien eine präzisere Beschreibung der geforderten Verhaltensformen und Leistungen der Schüler, die der Mathematikunterricht aufbauen soll. Ein Beispiel: Nehmen wir an, der Stoffkatalog für den Mathematikunterricht des zweiten Schuljahres beinhalte das Stoffziel «Division»; erst durch das zugeordnete Verhaltensziel wird eindeutig festgelegt, ob es (nur) darauf ankomme, daß der Schüler die Division als Rechenverfahren zu speichern, zu reproduzieren und anzuwenden imstande sei, oder ob vielmehr die Einsicht des Schülers in die Division als einer mathematischen Operation intendiert wird. In diesem Sinn ist bei der Bestimmung der Lernziele jedem Stoffziel ein Verhaltensziel zuzuordnen, das präzis umschreibt, was der Schüler an den einzelnen Stoffinhalten eigentlich lernen soll.

Wir haben zu Beginn dieses Abschnittes gesagt, daß die Formulierung der Leitideen bereits erste fachlich wie psychologisch begründete Entscheidungen über den Mathematikunterricht beinhalte. Diese Entscheidungen, die zunächst allgemein und noch mehrdeutig sind, konkretisieren sich in Entscheidungen über Lernziele in den Dimensionen der Stoffinhalte (Themenklasse) und der Verhaltensziele (Funktionsklasse). Werden zudem zu jedem Themenbereich schließlich eine Reihe von Testaufgaben für die objektive Prüfung des Lernerfolges konstruiert, so ergibt sich für die Bestimmung der Lernziele im Sinne der Operationalisierung eine Spezifizerung auf vier Ebenen (FLECHSIG 1969/70): Lernziele werden formuliert

1. als *Leitideen* (z. B. «Herleitung des Zahlbegriffs aus gleichmächtigen Mengen»),

2. als *Stoffziele* (fachwissenschaftlich begründete Begriffe und Operationen wie «Vergleich von Mengen durch Zuordnung», «Gleichmächtigkeit von Mengen», «Pfeildiagramm», «Kardinalzahlbegriff»)

3. als *Verhaltensziele* im Sinne einer *Aufgabenbeschreibung* (z. B. «Der Schüler soll imstande sein, zwischen zwei gleichmächtigen Gegenstandsmengen mit höchstens 5 Elementen paarweise eine Zuordnung der Elemente vorzunehmen und diese Zuordnung zeichnerisch darzustellen.»)

4. als *Testaufgaben.*

Im Prozeß der Operationalisierung konkretisieren sich die Lernziele soweit, daß die angestrebten Leistungen in den einzelnen Items der Testaufgaben schließlich objektiv feststellbar und meßbar werden. Diesen Prozeß zu realisieren, ist zwar eine mühsame und zeitraubende Arbeit; er bietet aber die Möglichkeit, die Kluft zwischen allgemeinen und mehrdeutigen Bildungszielen einerseits und Stoffplänen andererseits in den Lehrplänen zu schließen und dem Unterricht konkrete und wirksame Zielvorstellungen voranzustellen. Zudem wird sich im letzten Abschnitt über Evaluation erweisen, daß eine empirische Überprüfung des Unterrichts illusorisch ist, wenn nicht präzise Lernziele vorliegen.

6. Methode

Entscheidungen über Lernziele betreffen das «Was» des Unterrichts, Entscheidungen über die Methode das «Wie». Diese Aussage muß gleich eingeschränkt werden: methodische Entscheidungen dürfen die Zielfrage nicht ausklammern, sie implizieren häufig selbst Lernzielentscheidungen. Wenn etwa für den modernen Mathematikunterricht ein Abbau des Frontalunterrichts zugunsten gruppenbezogener Unterrichtsformen gefordert wird, so verbindet sich mit dieser Forderung die Zielvorstellung einer vermehrten Selbsttätigkeit und Kooperationsfähigkeit der Schüler. – In diesem Abschnitt sollen einzelne Aspekte methodischer Entscheidungen knapp skizziert werden; sie betreffen vier Bereiche: die Großgliederung des Unterrichts, die Gliederung der Unterrichtseinheiten, die Sozialformen des Unterrichts und die technisch-organisatorischen Probleme.

6.1. Die Großgliederung des Unterrichts

Mit der Großgliederung des Unterrichts wird die Anordnung bezeichnet, nach welcher die Lernstoffe über ein oder mehrere Jahre verteilt werden. Nehmen wir an, der Stoffkatalog für den Mathematikunterricht der Grundschule (Klassen 1–6) umfasse die vier Themenbereiche «Mengen», «Zahlen», «Zahlsysteme», «Größen» und «Geometrie»; es wäre sinnwidrig, diese Themenbereiche im Unterricht in linearer Abfolge zu behandeln. Vielmehr drängt sich eine Anordnung der Inhalte nach dem Modell der *konzentrischen Kreise* auf. Darnach ließen sich z. B. die Lerninhalte der naiven Mengenlehre so gliedern, daß einer ersten Stufe Erfahrungen durch Spiele und vormathematisches Verbalisieren», einer zweiten Stufe das «mathematische Verbalisieren und Symbolisieren» und einer dritten Stufe die «Vertiefung mengentheoretischer Begriffe und Operationen und ihre Anwendung» zugeordnet würde. Die Großgliederung der Inhalte nach dem Modell konzentrischer Kreise setzt eine stufenübergreifende vertikale Planung voraus.

6.2. Die Gliederung der Unterrichtseinheiten:

Unterrichtseinheiten sind thematisch abgrenzbare Einheiten, die meist mehrere Unterrichtsstunden beanspruchen. Sie gliedern sich nach sachlogischen und psychologischen Kriterien. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf DIENES, der unter dem Begriff des «Lernzyklus» ein sachlich wie lernpsychologisch begründetes Modell für die Gliederung der thematischen Einheiten im Mathematikunterricht geschaffen hat (DIENES/GOLDING 1970, 85–94).

6.3. Sozialformen des Unterrichts:

Es sind v. a. zwei Gründe, die DIENES bewogen haben, für den modernen Mathematikunterricht den Kleingruppenunterricht zu fordern: der Kleingruppenunterricht ermöglicht eine weitgehende Individualisierung und Differenzierung des Mathematikunterrichts unter Berücksichtigung der individuellen Lernvoraussetzungen der Schüler und er fördert andererseits die Kooperationsbereitschaft der Kinder. DIENES fordert nachdrücklich den Abbau direktiver Aktionsformen des Lehrers, wie sie in fragend-entwikkelnden Verfahren des Frontalunterrichts vorherrschen. Die Schüler sollen im Mathematikunterricht selbständig Entdeckungen machen, indem sie einzeln oder in Gruppen mit vielfältigen Problemen konfrontiert werden (DIENES 1970). Dieser Unterricht verlangt aber die Bereitstellung von Lehr- und Lernmitteln, welche die Lernprozesse der Schüler anregen und lenken.

6.4. Die technisch-organisatorischen Fragen:

Die technisch-organisatorischen Fragen, die sich im Zusammenhang eines arbeitsmittelintensiven Kleingruppenunterrichts stellen, bedürfen einer sorgfältigen Planung und Lösung. Diese Fragen sind keineswegs Nebensache, vielmehr hängt der Lernerfolg zu einem nicht unerheblichen Teil von zweckmäßigen technischen Einrichtungen und der Art und Weise der Organisation des Unterrichts ab.

7. Medien

Unter Medien werden Lehrmittel (Lehrgänge), Spiel- und Arbeitsmaterialien, Arbeitskarten, Arbeitsblätter usw. verstanden. Wir haben eingangs gesagt, daß eine Revision des Mathematikunterrichts in der Volksschule nicht durch die unreflektierte Wahl und und Einführung bestehender Lehr- und Lernmittel zu realisieren sei. Lehrmittel beinhalten meist sehr detaillierte Entscheidungen über Lernziele, Inhalte und Fragen der methodischen Organisation, über deren didaktische Begründung man in der Regel nur wenig erfährt. Solche Lehrmittel vorschnell und unbesehen einzuführen, kommt einem Verzicht auf didaktische Planung gleich.

Was die bestehenden Medien zum Mathematikunterricht betrifft, so ist ihr Angebot in den letzten Jahren beträchtlich angewachsen; es bedarf zu ihrer sorgfältigen Beurteilung eines umfassenden Kriterienschemas, das auch geeignet ist, die Zielvorstellungen und methodischen Konzeptionen, die den Medien zugrunde liegen, im einzelnen aufzudecken und zu prüfen. Lehrmittel, die keinerlei Angaben enthalten über die Lernvoraussetzungen der Adressaten, über die Lernziele, über die fachspezifische Konzeption und über Evaluationsergebnisse sollten in die Schule keinen Eingang finden.

Die Entwicklung neuer Medien wird sich dann als notwendig erweisen, wenn keines der bestehenden Lehr- und Lernmittel der eigenen didaktischen Konzeption entspricht. Aus dem bisher gesagten wird offensichtlich, daß weder ein Mathematiker noch ein mit der modernen Mathematik vertrauter Lehrer imstande sein wird, ein Lehrmittel im Alleingang zu schaffen. Vielmehr bedarf es dazu eines Teams, dem Mathematiker, Lehrer und die an der Entwicklung des Curriculum beteiligten Fachexperten angehören. Wie das neu entwickelte Lehrmittel im einzelnen geprüft wird, ist eine Frage der Evaluation.

III. Evaluation

Es kann in diesem letzten Abschnitt nicht darum gehen, ein fertiges Evaluationsprogramm zur didaktischen Planung des Mathematikunterrichtes vorzulegen; ein solches Programm kann erst im konkreten Zusammenhang eines Mathematikprojekts von den an der didaktischen Planungsarbeit beteiligten Fachexperten sowie von einer eigens gebildeten Evaluationsgruppe entwickelt werden. Hier sollen lediglich Begriff und Formen der Evaluation geklärt und einige Aufgaben angedeutet werden, die der Evaluation innerhalb der Entwicklung eines Curriculum für den Mathematikunterricht zufallen.

Begriff und Funktion der Evaluation

Das im Begriff Evaluation enthaltene Wort «value» deutet darauf hin, daß etwas bewertet werden soll. Nun wird in der Schule immer schon bewertet, aber Gegenstand der Bewertung ist ausschließlich die Schülerleistung. Evaluation umfaßt nun mehr als Leistungsmessung und -beurteilung; es wird zwar auch die Leistung der Schüler hinsichtlich der Lernziele gemessen, darüber hinaus aber bezieht sich die Messung auf folgende Fragen: Was leistet die Methode? Was leisten die eingesetzten Medien? Was die Lehrer? Was das dem Unterricht zugrunde liegende Curriculum usw.?

Evaluation zielt auf Sammlung, Verarbeitung und Interpretation von Daten mit dem Ziel, Lernziele zu revidieren, Methoden zu verbessern, Lehr- und Lernmittel zu bewerten, die Lehreraktivität zu beurteilen, erfolgreiche resp. nicht erfolgreiche Adressatengruppen zu ermitteln usw. Sie fordert einerseits eine objektive *Beschreibung* der im Unterricht untersuchten Ereignisse und Wirkungen, andererseits die *Beurteilung* der festgestellten Tatsachen (HUHSE 1968, 167–179, WULF 1971, FLECHSIG 1969/70).

Formen der Evaluation

Unter den mannigfaltigen Formen der Evaluation kommt der Unterscheidung von SCRIVEN in formative und summative Evaluation besondere Bedeutung zu (SCRIVEN 1967). Die *formative Evaluation* erfolgt während der Entwicklung des Curriculum und der zugehörigen Lehr- und Lernmittel. So werden etwa Arbeitsblätter zur Mengenlehre, die zum entsprechenden Curriculumabschnitt geschaffen wurden, im Sinne eines Vorversuchs an kleinen Schülergruppen erprobt, ehe die endgültige Fassung entwickelt wird. Es wird z. B. geprüft, ob die intendierten Lernziele erreicht wurden und welche nicht intendierten Wirkungen (nichttriviale Effek-

te) feststellbar sind. Die Resultate führen zu einer Revision nicht nur der besagten Arbeitsblätter, sondern vielleicht auch der Lernziele oder der methodischen Anweisungen. Es ist mit anderen Worten Aufgabe der formativen Evaluation, möglichst vielseitige Informationen zu sammeln über die Wirkung des in Entwicklung befindlichen Curriculum. Durch die *summative Evaluation* (auch Produkt- oder Endevaluation) wird lediglich das fertige Endprodukt geprüft durch Messung des Endverhaltens der Schüler. Im einzelnen läßt sich aus dem Resultat summativer Evaluation schwer ermitteln, worauf bestimmte Lerneffekte zurückzuführen sind, ob auf die Lernvoraussetzungen der Schüler, auf die Eigenart verwendeter Medien, auf das methodische Vorgehen oder andere Faktoren. Die summative Evaluation kann erst sinnvoll erfolgen, wenn zu Beginn des zu evaluierenden Unterrichts das Eingangsverhalten der Schüler erhoben wurde.
Auf die Darstellung weiterer Formen der Evaluation soll hier verzichtet werden. Es sei einzig noch darauf hingewiesen, daß man bei der sog. *vergleichenden Evaluation* (z. B. zwischen Lehrmitteln des traditionellen Rechenunterrichts und solchen des modernen Mathematikunterrichts) unbedingt darauf achten muß, ob die Ziele (in unserem Fall der beiden Lehrmittel) dieselben sind. Die Gefahr eines verfälschenden Resultates ist groß, wenn eine vergleichende Evaluation einseitig Ziele des neuen Lehrmittels berücksichtigt, die im traditionellen Lehrgang nicht intendiert sind; das neue Lehrmittel wird sich sodann notwendig als besser erweisen.

Instrumente der Evaluation

Als Instrumente der Evaluation eignen sich alle in der sozialwissenschaftlichen Forschung verbreiteten Verfahren, also Tests, Verfahren der Beobachtung, der Befragung usw. Für die formative Evaluation eines Curriculums für Mathematikunterricht dürften sich z. B. die Verfahren der Unterrichtsbeobachtung, Interviews, Fragebogen, lernzielorientierte Tests usw. eignen. In der summativen Evaluation ist darauf zu achten, daß Tests nicht nur eingesetzt werden für die Messung spezifisch mathematischer Lernleistungen, sondern daß darüber hinaus auch Instrumente zur Verfügung stehen für die Erhebung nichttrivialer Lerneffekte in den Bereichen des Sprachverhaltens, der Kooperationsfähigkeit usw.
WULF weist darauf hin, daß «die vorhandenen Tests sich selten für die Zwecke der Evaluation eignen. Die meisten von ihnen sind standardisierte Leistungstests, die zwar zur Feststellung von individuellen Leistungsunterschieden bei Schülern geeignet sind, nicht aber zur Evaluation eines Curriculum» (WULF 1971, 180). Die standardisierten Leistungstests messen mit anderen Worten den relativen Stand des Einzelnen in der Gruppe, sie sind *normgruppenbezogen.* Demgegenüber bedarf die Evaluation vermehrt *lernzielorientierter Tests,* deren Items die Lernziele des Curriculum repräsentativ abdecken. Entscheidend für die Beurteilung des Resultats ist dabei die quantitativ bestimmbare Annäherung an die Lernziele. Lernzielorientierte Tests setzen aber voraus, daß die Lernziele des Curriculum operationalisiert sind; auf diesen Zusammenhang wurde im Abschnitt Lernziele hingewiesen.

Schlußbemerkungen

Das vorliegende didaktische Modell zur Revision des Mathematikunterrichts stellt einen Versuch dar, einige für die didaktische Planung relevante Gesichtspunkte der Informationsgewinnung, der Entscheidungsprozesse und der Evaluation zu erläutern. Es will die Zusammenhänge sichtbar machen, die zwischen den einzelnen Bedingungen und Variablen des Mathematikunterrichts bestehen. Abschließend sei nochmals betont, daß eine nach den Intentionen des Modells konzipierte didaktische Planung eine rollende *Revision* des Unterrichts bedingt. Mit jeder Evaluation setzt eine neue Phase der Planung ein: Informationen über soziokulturelle Gegebenheiten und über die Lernvoraussetzungen der Schüler werden präzisiert, korrigiert oder ergänzt; es wird sich weiter als notwendig erweisen, neue Entscheidungen zu treffen über die Lernziele, über die Gliederung und Strukturierung der Inhalte, über methodische Fragen der Differenzierung oder über die Gestaltung der zu verwendenden Medien. Damit wird offensichtlich, daß sich der Mathematikunterricht nicht zu einem bestimmten Zeitpunkt für Jahre endgültig planen und festlegen läßt, sondern einer permanenten Revision bedarf.

Literaturverzeichnis

Das folgende Verzeichnis beinhaltet nur Literatur, auf welche der Aufsatz unmittelbar Bezug nimmt. Auf ein umfassenderes Literaturverzeichnis wird verzichtet.

F. ACHTENHAGEN/P. MENCK (1970): Langfristige Curriculumentwicklung und mittelfristige Curriculumforschung. In: Zts. f. Päd. 3/70, 407—429.

H. AEBLI (1968): Über die geistige Entwicklung des Kindes. Stuttgart. 2. Auflage.

H. AEBLI (1968): Psychologische Didaktik. Stuttgart. 3. Auflage.

H. AEBLI (1969): Die geistige Entwicklung als Funktion von Anlage, Reifung, Umwelt- und Erziehungsbedingungen. In: Begabung und Lernen, hg. H. ROTH. Stuttgart. 151—192.

B. BERNSTEIN (1959): Determinanten des Lernens. In: Soziologie der Schule, hg. P. HEINTZ. Köln.

H. BLANKERTZ (1969): Theorien und Modelle der Didaktik. München.

B. S. BLOOM (1956): Taxonomy of Educational Objectives: Handbook I: Cognitive Domain. New York.

W. BREIDENBACH (1969): Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschulen. Hannover.

Z. P. DIENES/M. A. JEEVES (1968): Denken in Strukturen. Eine psychologische Untersuchung mathematischer Lernprozesse. Freiburg i. Br.

Z. P. DIENES/E. W. GOLDING (1970): Methodik der modernen Mathematik. Freiburg.

Z. P. DIENES (1965): Aufbau der Mathematik. Freiburg i. Br.

K.-H. FLECHSIG (1969/70): Leitfaden zum Kolleg «Theorie des Unterrichts»; I Probleme der didaktischen Theorienbildung, II Lehrplantheorie, III Adressatentheorie, IV Evaluation. Unveröffentlichtes Manuskript. Konstanz.

K.-H. FLECHSIG u. a. (1970): Probleme der Entscheidung über Lernziele. Begründung und Aufriß des Forschungsplanes zum LOT-Projekt. In: Programmiertes Lernen 1/70, 1—32.

K.-H. FLECHSIG (1970): Die Bedeutung von Klassifikations- und Kriteriensystemen für die Auswahl von Curriculumelementen. In: Kriterien in der Curriculumkonstruktion, hg. K. FREY, 25—45. Weinheim.

A. FRICKE (1964): Operatives Denken im Rechenunterricht als Anwendung der Psychologie von Piaget. In: Rechenunterricht und Zahlbegriff, 73—104. Braunschweig.

R. M. GAGNE (1970): Die Bedingungen des menschlichen Lernens (aus dem Amerikan. übersetzt). Hannover.

K. HUHSE (1968): Theorie und Praxis der Curriculumentwicklung. Studien und Berichte des Instituts für Bildungsforschung in der Max-Planck-Gesellschaft 13. Berlin.

D. R. KRATHWOHL/B. S. BLOOM/B. S. MASIA (1964): Taxonomy of Educational Objectives: Handbook II: Affective Domain. New York.

J. LAUX (1969): Die Bildung des Zahlbegriffs in den ersten drei Schuljahren. Stuttgart.

R. F. MAGER (1969): Lernziele und Programmierter Unterricht. Weinheim. 9. Auflage.

H. MAIER (1970): Didaktik der Mathematik 1—9. Sachlogische Analyse der Lehr- und Lernziele für die ersten neun Schülerjahrgänge. Donauwörth.

R. MESSNER/P. POSCH (1969): Lehrplan von morgen. In: IBB 1 (1969), 31—52.

R. MESSNER (1970): Funktionen der Taxonomien für die Planung von Unterricht. Kritische Anmerkungen zur Verwendung der Taxonomien von BLOOM, KRATHWOHL und ihren Mitarbeitern in didaktischen Entscheidungsprozessen. In: Zts. f. Päd. 6/70, 755—779.

C. MÖLLER (1969): Technik der Lernplanung. Weinheim.

K. E. NIPKOW (1971): Curriculumdiskussion. In: Zts. f. Päd. 1/71, 1—10.

W. NEUNZIG/P. SORGER (1969): Einstieg in die Mathematik. Freiburg i. Br.

R. OERTER (1967): Moderne Entwicklungspsychologie. Donauwörth.

G. PETTER (1966): Die geistige Entwicklung des Kindes im Werk von J. Piaget. Bern.

J. PIAGET (1964): Die Genese der Zahl beim Kind. In: Rechenunterricht und Zahlbegriff. Braunschweig.

J. PIAGET/A. SZEMINSKA (1969): Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. Stuttgart. 2. Auflage.

J. PIAGET (1967): Psychologie der Intelligenz. Zürich. 3. Auflage.

S. B. ROBINSOHN (1971): Bildungsreform als Revision des Curriculum. Darmstadt. 2. Auflage.

S. B. ROBINSOHN (1969): Ein Strukturkonzept für Curriculumentwicklung. In: Zts. f. Päd. 6/69, 631—653.

P. M. ROEDER u. a. (1967): Sozialstatus und Schulerfolg. Heidelberg.

G. ROLFF (1967): Sozialisation und Auslese durch die Schule. Heidelberg.

W. SCHULZ (1965): Unterricht — Analyse und Planung. In: Unterricht — Analyse und Planung, hg. P. HEIMANN/W. SCHULZ/G. OTTO, Hannover.

W. SCHULZ (1969): Unterrichtsplanung heute. In: Unterrichtsplanung, hg. U. J. KLEDZIK. Hannover.

M. SCRIVEN (1967): The Methodology of Evaluation. In: TAYLER/GAGNE/SCRIVEN: Perspectives on Curriculum Evaluation. Chicago.

H. SKOWRONEK (1970): Psychologische Grundlagen einer Didaktik der Denkerziehung. Hannover. 2. Auflage.

J. WITTMANN (1958): Einführung in die Praxis des ganzheitlichen Gesamtunterrichts, insbesondere des ganzheitlichen Rechenunterrichts im 1. Schuljahr. Dortmund.