Zeitschrift: Schweizer Schule

Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz

Band: 56 (1969)

Heft: 13

Artikel: Weltraumfahrt mit Sekundarschule-Mathematik

Autor: Hegner, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-533242

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Weltraumfahrt mit Sekundarschul-Mathematik

F. Hegner

1. Vorbemerkung

Diese Arbeit möchte Lehrer und Schüler anregen, die Eroberung des Weltalls mit den Mitteln, welche die Sekundarschulmathematik zur Verfügung stellt, physikalisch mitzuerleben. An Kenntnissen werden vorausgesetzt: Grundrechnungsarten, Potenzieren und Quadratwurzelziehen, Rechnen mit 10er-Potenzen, Proportionen, Umformen und Auflösen einfacher Gleichungen, Satz von Pythagoras. Für die numerischen Berechnungen ist die Verwendung von Rechenscheibe oder Rechenstab vorteilhaft. Von den Kapiteln der Physik werden berührt: Gleichförmige und beschleunigte Bewegung, freier Fall und waagrechter Wurf, Begriff und Einheit der Kraft, Gravitationsgesetz, potentielle und kinetische Energie. Da die vorliegende Arbeit die theo-

retischen Grundlagen bereitstellen möchte, fehlt ein experimenteller Teil. Dies bedeutet nicht, daß nicht der Zusammenhang zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung, der freie Fall und die wichtigsten Konstanten durch Versuche lebendig gemacht werden sollen. Auch die nachstehend zusammengestellten astronomischen Daten könnten zum Teil mit behelfsmäßigen Mitteln in grober Annäherung selbst erworben werden. Da der Zweck der Arbeit die Verwendung der Infinitesimalrechnung verbot, mußten oft Näherungslösungen anstelle exakter Methoden verwendet werden. Die Berechnungen sind meist stark gerundet. Trotzdem ist anstelle des Ungefährzeichens ≈ stets das Gleichheitszeichen = gesetzt.

2. Größenverhältnis im Weltall

Tabelle 1 Radien, Volumen, Maße, mittl. Dichte

		Mond	Erde	Sonne
Radien	km	1740	6370	696000
	cm	1,74.10 ^s	6,37.10 ⁸	6,96.10 ¹⁰
Verhältnis	$ m km^3$ $ m g$ $ m g/cm^3$	0,27	1	110
Volumen		22000 000000	1 080000 000000	1,4.10 ¹⁸
Masse		7,35.10 ²⁵	5,98.10 ²⁷	1,99.10 ³³
Dichte		3,3	5,5	1,4

Tabelle 2 Entfernungen

Erde Mond 384000 3,84.10 ¹⁰	4
Erde Sonne 150 000000 1,5.1013 39 Sonne Pluto 5900 000000 5,9.1014 1500 Sonne a-Centauri 40 000000 000000 4.1018 100 00000	00

Der Durchmesser des Mondes ist also nicht ganz viermal kleiner als jener der Erde. Stellt man sich die Sonne als Ball von 10 cm Durchmesser vor, so wäre die Erde ein Stecknadelköpfchen von nicht ganz 1 mm Durchmesser und die Mondbahn würde mit 5,5 cm Durchmesser gut im Sonnenball Platz haben. Die Reise der drei Ame-

rikaner Bormann, Lovell und Anders an Weihnachten 1968 zum Mond dauerte ungefähr drei Tage. Die Fahrt zur Sonne ergäbe bei gleicher Durchschnittsgeschwindigkeit eine Reise von über drei Jahren. Verkleinert man die Erde zu einem Globus von 30 cm Durchmeser, so würde der Mond in einem Abstand von 9 m seine Kreise

ziehen. Die Vorgänger der drei Mondfahrer umkreisten die Erde in Bahnen, die nur 2 bis 3 mm Abstand von diesem 30 cm-Globus hatten.

3. Die drei Newton'schen Bewegungsgesetze

Nach dem 1. Newton'schen Bewegungsgesetz verharrt ein Körper im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, bis eine Kraft ihn zwingt, diesen Zustand zu ändern. Bei gleichförmiger Bewegung legt ein Körper in gleichen Zeitabständen gleiche Strecken auf gerader Bahn zurück. Es gelten folgende Gleichungen, in denen s den zurückgelegten Weg in cm, t die Zeit in sec

und v die Geschwindigkeit in $\frac{cm}{sec}$ bedeuten.

I
$$v = \frac{s}{t}$$
 II $s = v.t$ III $t = \frac{s}{v}$

Wirkt auf einen Körper eine konstante Kraft, so beschreibt er eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, d. h. seine Geschwindigkeit nimmt pro Zeiteinheit stets um den gleichen Betrag zu

oder ab. Wird die Geschwindigkeit in $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ gemessen und die Zeit in sec, so bekommt die Be-

schleunigung (die Geschwindigkeitsänderung)

die Dimension cm : sec = cm Rei der be-

die Dimension
$$\frac{cm}{sec}$$
 : $sec = \frac{cm}{sec^2}$. Bei der be-

schleunigten Bewegung spielen neben dem Weg s und der Zeit t noch folgende Größen eine Rolle: Die eigentliche Beschleunigung a, die Anfangsgeschwindigkeit v_o , die Endgeschwindigkeit v_e und die mittlere oder Durchschnitts-Geschwindigkeit v_m . Bei einer Beschleunigung von der Größe a nimmt die Geschwindigkeit jede Sekunde um den Wert a zu. In t Sekunden ist die Geschwindigkeitszunahme a.t und die Endgeschwindigkeit $v_e = v_o + a.t$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_o = 0$, so ist

$${\rm IV} \hspace{1cm} v_e = a.t$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit v_m ist gleich dem arithmetischen Mittel von Anfangsgeschwindigkeit v_o und Endgeschwindigkeit v_e . Für v_o = 0 gilt also

$$V v_m = \frac{v_o + v_e}{2} = \frac{0 + a.t}{2} = \frac{a}{2}$$
. t

Für die in der Zeit t zurückgelegte Strecke s gilt nach Formel II

VI
$$s = v_m \cdot t = \frac{a}{2} \cdot t \cdot t = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Für v_e benötigen wir noch eine Formel, welche t nicht enthält.

Aus IV
$$v_e = a$$
. t folgt $t = \frac{v_e}{a}$ und $t^2 = \frac{v_e^2}{a^2}$

Nach Formel VI ist
$$s = \frac{a}{2}$$
. t^2 , daraus folgt $t^2 = \frac{2. s}{a}$

Setzen wir die beiden so gefundenen Werte für t² einander gleich, ergibt sich aus

$$\frac{{\rm v_e}^2}{{\rm a}^2} = \frac{2.{\rm s}}{{\rm a}}$$
 für ${\rm v_e}$ der Wert

$$VII \qquad v_e \, = \, \sqrt{2.a.s}$$

Damit haben wir für die beschleunigte Bewegung vier Formeln gefunden, von denen jede die Größe a und je zwei von den Größen s, t und v enthält. Hier sind sie noch einmal zusammengestellt:

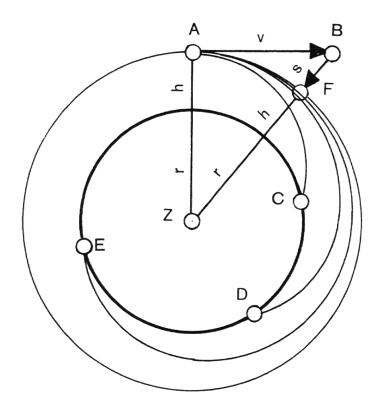
$$\begin{array}{lll} IV\;v_{\rm e}\;=\;a.t & V\;v_{\rm m}\;=\;\frac{a}{2}.\;t & VI\;s\;=\frac{a}{2}.\;t^2\\ VII\;v_{\rm e}\;=\;\sqrt{2.a.s} & \end{array}$$

Wirkt die beschleunigende Kraft in der Bewegungsrichtung eines Körpers, so äußert sich die Beschleunigung als reine Geschwindigkeitsänderung. Wirkt sie senkrecht zur Bahn des Körpers, resultiert eine Richtungsänderung. Auf den Mond wirkt die Anziehungskraft der Erde dauernd senkrecht zu seiner Bahn und zwingt ihn zum Kreisen um die Erde. Aus den Daten dieser Kreisbahn können wir die Beschleunigung des Mondes infolge der Erdanziehung berechnen. Für einen Umlauf um die Erde benötigt der Mond die Zeit t = $27^{1}/_{3}$ Tage = 2 360 000 sec. Der Kreisradius ist gleich der Entfernung Mond-Erde $r = 384\,000$ km und die Bahnlänge gleich dem Kreisumfang s = $2.r.\pi$ = 2.384000.3,14 = 2 400000 km. Die Geschwindigkeit v des Mondes

beträgt nach Formel I
$$v = \frac{s}{t} = \frac{2400000 \text{ km}}{2360000 \text{ sec}}$$

= 1 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$

In der nachstehenden Skizze würde sich der Mond infolge der Trägheit in einer Sekunde von A nach B verschieben. Unter dem zusätzlichen Einfluß der Schwerkraft bewegt er sich aber tatsächlich auf einem Kreisbogen von A nach C. Er fällt also in dieser Sekunde von B nach C um die Strecke BC = s. Mit dem Satz des Pythagoras können wir aus dem Dreieck ABZ die Strecke s berechnen.



$$s + r = \sqrt{r^2 + v^2}$$
 und $s = \sqrt{r^2 + v^2} - r = \sqrt{384000^2 + 1^2} - 384000 = 0,00000013 \text{ km} = 0,13 \text{ cm}$

Er fällt somit in der Zeit t=1 sec um die Strecke s=0,13 cm. Daraus kann nach Formel I die mittlere Geschwindigkeit v_m berechnet werden.

$$v_{m} = -\frac{s}{t} = \frac{0.13 \text{ cm}}{1 \text{ sec}} = 0.13 - \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

Formel V liefert die zur mittleren Geschwindigkeit $v_m = 0.13 \frac{cm}{sec}$ und der Zeit t = 1 sec gehörende Beschleunigung.

Aus
$$v_m = -\frac{a}{2}$$
. t folgt $a = -\frac{2 \cdot v_m}{t} = \frac{2 \cdot 0.13}{1} = 0.26 \frac{cm}{sec^2}$

Nach dem 2. Newton'schen Bewegungsgesetz ist die Kraft K proportional der Masse m eines Körpers und seiner Beschleunigung a.

VIII
$$K = m \cdot a$$

Die Dimensionen von m und a sind g und $\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$

Also hat die Kraft K die Dimension $\frac{\text{gr cn}}{\text{sec}^2}$

Die in diesem Zusammenhang zweckmäßige Maßeinheit für die Kraft ist das Dyn. 1 Dyn ist jene Kraft, welche einem Körper von 1 g Masse die Beschleunigung 1 $\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ erteilt. Die Größe der

Kraft, mit welcher die Erde den Mond anzieht, läßt sich aus der Mondmasse m und ihrer Beschleunigung a herleiten. Aus der Tabelle 1 entnehmen wir für die Mondmasse $m=7,35.10^{25}$ g und oben haben wir für ihre Beschleunigung a =

$$0,26 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$
 gefunden. Setzen wir diese Werte in

Formel VIII ein, erhalten wir die Kraft $K = m \cdot a = 7,35.10^{25} \cdot 0,26 = 1,9.10^{25}$ Dyn.

Das 3. Netwon'sche Bewegungsgesetz sagt, daß zu jeder Kraft eine gleich große Kraft gehört, die in entgegengesetzter Richtung wirkt. Damit können wir auch die Beschleunigung $a_{\rm e}$ ausrechnen, welche die Erde mit der Masse $m_{\rm e}$ vom Mond erfährt, denn die Kraft, mit welcher der Mond die Erde anzieht, ist ebenfalls $K=1,9.10^{25}$ Dyn.

$$\begin{array}{lll} Aus \ K \ = \ m_e \ . \ a_e \ folgt \ a_e \ = \ \begin{array}{ll} \frac{K}{m_e} \ = \\ \hline \frac{1.9 \ . \ 10^{25}}{5.98 \ . \ 10^{27}} = \ 0.0032 & \begin{array}{ll} cm \\ \hline sec^2 \end{array} \end{array} \ = \end{array}$$

In der Formel VIII K = m . a sind K und a gerichtete Größen, Vektoren. Daher sagt diese Formel auch aus, daß die Kraft K die gleiche Richtung hat wie die Beschleunigung a. Zwischen den beiden Himmelskörpern ist also eine Kraft in der Richtung Erde—Mond wirksam. Es ist die Gravitations- oder Schwerkraft.

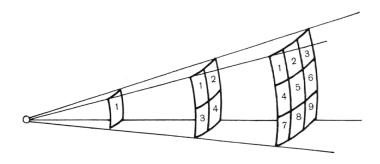
4. Das Newton'sche Gravitationsgesetz

Newton vertrat schon im 17. Jahrhundert die Ansicht, daß die Kraft, welche den Mond in seine Kreisbahn um die Erde zwingt, die gleiche sei wie jene, welche einen vom Baum fallenden Apfel gegen die Erde beschleunigt. Experimentell läßt sich feststellen, daß ein in der Nähe der Erdoberfläche fallender Körper eine Beschleuni-

gung von 980
$$\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2}$$
 aufweist. Hier stellt sich die

Frage, warum der Mond nur mit
$$0.26 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$
 ge-

gen die Erde beschleunigt wird, wenn es sich doch um die gleiche Kraft handelt? Stellt man sich vor, daß sich die Schwerkraft von dem im Erdmittelpunkt liegenden Gravitationszentrum strahlenförmig gleichmäßig nach allen Seiten ausbreitet, begreift man gut, daß sie sich bei Verdoppelung des Abstandes auf eine viermal so große Fläche verteilt und ihre Wirkung daher



viermal kleiner ist. Mit anderen Worten, sie ist umgekehrt proportional dem Abstand vom Erdmittelpunkt. Für den in Erdnähe fallenden Körper ist dieser Abstand gleich dem Erdradius 6370 km. Der Mond ist 384 000 km weit weg. Das ist rund 60mal weiter. Deshalb ist die Anziehungskraft auf den Mond und damit seine Beschleunigung $60^2 = 3600$ mal kleiner. Die Beschleunigung auf der Erde 980 cm/sec^2 : $3600 \text{ gibt } 0,27 \text{ cm/sec}^2$, was recht genau dem oben gefundenen Wert entspricht.

Newton schloß aus der Anziehung zwischen Erde und Mond, die er auch anhand der Sonne und ihrer Planeten überprüfte, auf ein allgemein gültiges Gravitationsgesetz. Danach ziehen sich zwei Körper mit den Massen m₁ und m₂ und dem Abstand s mit einer Kraft an, die proportional dem Produkt ihrer Massen m₁ . m₂ und umgekehrt proportional dem Quadrat s² ihres Abstandes ist. Hundert Jahre später konnte die Größe dieser Gravitationskraft experimentell gemessen werden. Cavendish fand, daß sich zwei Körper von je 1 g Masse und 1 cm Abstand mit der Kraft G

$$=\frac{6.7}{10^8}$$
 Dyn anziehen. Mit Hilfe dieser Zahl, der

Newton'schen Gravitationskonstanten, läßt sich die Anziehungskraft K zweier Körper mit den Massen m_1 und m_2 und dem Abstand s berechnen.

IX
$$K = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{s^2}$$

Überprüfen wir diese Formel am Beispiel Erde—Mond mit der Erdmasse $m_2 = 5,98.10^{27}$ g, der Mondmasse $m_1 = 7,35.10^{25}$ g und der Entfernung s = $3,84.10^{10}$ cm.

$$\begin{split} K &= \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{s^2} &= \frac{6.7 \cdot 7.35.10^{25} \cdot 5.98.10^{27}}{10^8 \cdot (3.84 \cdot 10^{10})^2} \\ &= 2 \cdot 10^{25} \, Dyn. \end{split}$$

Dieser Wert stimmt mit guter Annäherung mit dem oben auf anderem Weg gefundenen Wert von 1,9.10²⁵ Dyn überein.

Mit Hilfe dieses Newton'schen Gravitationsgesetzes, Formel IX, und dem 2. Newton'schen Bewegungsgesetz, Formel VIII, welche beide einen Wert für die Kraft K angeben, erhält man durch Gleichsetzung der beiden Werte

$$m_1 \cdot a = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{s^2}$$

für die Beschleunigung a die Formel

$$X \qquad \quad a = \ \frac{G \cdot m_2}{s^2}$$

Das heißt, es läßt sich die Beschleunigung für irgend einen Körper in beliebigem Abstand vom Erdmittelpunkt berechnen. Die Formel enthält die Masse des fallenden Körpers m₁ nicht. Die Beschleunigung ist also von der Masse des fallenden Körpers unabhängig, alle fallen gleich schnell.

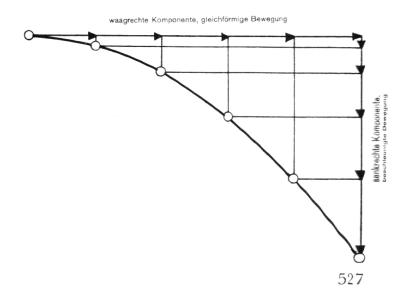
Für einen auf der Erdoberfläche fallenden Körper ist $s=6370 \text{ km}=6,37 \cdot 10^8 \text{ cm}$ und m_2 die Erdmasse $5,98.10^{27} \text{ g}$. Für die Beschleunigung a erhält man

$$a = \frac{G \cdot m_2}{s^2} = \frac{6.7 \cdot 5.98 \cdot 10^{27}}{10^8 \cdot (6.37 \cdot 10^8)^2}$$
$$= 9.9 \cdot 10^2 \cdot \frac{cm}{sec^2}$$

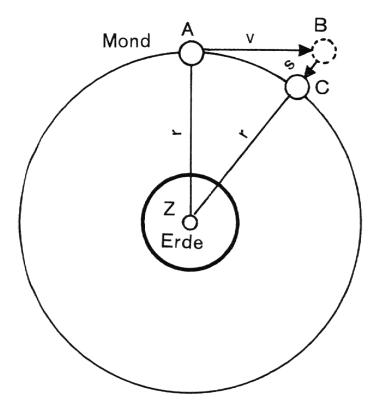
Auch dieser Wert stimmt gut mit dem bekannten Wert von 9,8.10² cm/sec² überein.

5. Die erste kosmische Geschwindigkeit

Man spricht heute oft von der 1. und 2. kosmischen Geschwindigkeit. Unter der ersten wird jene Geschwindigkeit verstanden, die ein in einer bestimmten Höhe um die Erde kreisender Körper besitzen muß, um antriebslos in seiner Kreis-



bahn zu verharren. Die meisten bemannten künstlichen Satelliten benützen Flugbahnen in 100 bis 200 km Höhe über der Erde. Rechnen wir deshalb mit einer mittleren Flughöhe von 150 km. Wir beginnen mit der Betrachtung des waagrechten Wurfs. Die Bewegung eines waagrecht geworfenen Körpers setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Diese können getrennt behandelt werden (Gesetz von der Unabhängigkeit der Bewegug). Die eine Komponente ist nach dem 1. Newton'schen Bewegungsgestz eine gleichförmige, waagrechte Bewegung. Die andere ist infolge der konstant einwirkenden Schwerkraft ein senkrechter, freier Fall, also gleichmäßig beschleunigt.



Wirft man von einem Punkt A in der Höhe h = 150 km einen Körper in Richtung B, so wird er je nach seiner Geschwindigkeit bei C, D oder E auf der Erde aufschlagen. Ist die Wurfgeschwindigkeit groß genug, so kehrt er zum Ausgangspunkt A zurück. Um diese zu berechnen, wenden wir die gleiche Methode an wie bei der ersten Berechnung der Mondbeschleunigung. Nur ist jetzt die Beschleunigung a gegeben und dafür die Geschwindigkeit v gesucht. Da wir uns noch recht nahe der Erdoberfläche befinden, dürfen wir mit guter Annäherung mit dem hier geltenden Wert a = 9,8.10² cm/sec² rechnen. Die Strecke AB entspricht dem in einer Sekunde zurückgelegten Weg der horizontalen Kompo-

nente, der Geschwindigkeit v. Sie wollen wir herausfinden. Nach Formel VI beträgt die zugehörige Fallstrecke s in einer Sekunde

$$s = \frac{a}{2}$$
. $t^2 = \frac{9.8}{2}$. $t^2 = 4.9 \text{ m} = 0.0049 \text{ km}$

Im rechtwinkligen Dreieck ABZ ist ZA = r + h= 6370 + 150 = 6520 km und ZB = r + h + s= 6370 + 150 + 0,0049 = 6520,0049 km. Nach dem Satz von Pythagoras ist

$$AB = v = \sqrt{ZB^2 - ZA^2} = \sqrt{6520,0049^2 - 6520^2} = 8 \text{ km/s} = 29 000 \text{ km/h}$$

Um den Körper auf die gewünschte Flughöhe von 150 km zu befördern, ist die gleiche Anfangsgeschwindigkeit nötig, die ein aus dieser Höhe fallender Körper als Endgeschwindigkeit auf der Erdoberfläche aufweisen würde (bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes).

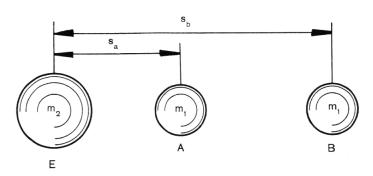
Für v_e liefert die Formel VII

$$v_e = \sqrt{2 \cdot a \cdot s} = \sqrt{2.0,0098.150} = 1,7 \text{ km/sec} = 6000 \text{ km/h}$$

Die Rakete, welche einen solchen Satelliten in seine Umlaufbahn bringt, muß sowohl die Energie für die Erreichung dieser Vertikalgeschwindigkeit von 6000 km/h als auch für die Tangentialgeschwindigkeit von 29 000 km/h aufbringen.

6. Die zweite kosmische Geschwindigkeit

Es ist jene Geschwindigkeit, die man einem Körper erteilen muß, damit er das Schwerefeld der Erde verläßt. Sie ist gleich der Endgeschwindigkeit, die ein aus dem Unendlichen auf die Erde fallender Körper erreichen würde. Ihre Berechnung ist deshalb etwas umständlicher, weil die Beschleunigung nicht mehr auch nur angenähert konstant ist wie in unmittelbarer Erdnähe, sondern mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt.



Hier hilft eine Betrachtung über die Arbeit, die aufgewendet werden muß, um einen Körper von der Masse m₁, der sich in A befindet, von einem Körper der Masse m₂, der sich in E aufhält, weg — unter Überwindung der Gravitationskraft — nach B zu verschieben. Nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz, Formel IX, ziehen sich die beiden Körper in der Entfernung EA = s_a an mit der Kraft

$$K_1 = \frac{{s_a}^2}{G \cdot m_1 \cdot m_2}$$
 und im Abstand $EB = s_b$
mit der Kraft $K_2 = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{{s_b}^2}$

Weil die Gravitationskraft umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes ist, berechnen wir die mittlere Gravitationskraft als geometrisches Mittel:

$$\begin{split} K_{m} &= \sqrt{K_{1} \cdot K_{2}} \, \sqrt{\frac{G \cdot m_{1} \cdot m_{2}}{s_{a}^{2}}} \cdot \frac{G \cdot m_{1} \cdot m_{2}}{s_{b}^{2}} \\ &= \frac{G \cdot m_{1} \cdot m_{2}}{s_{a} \cdot s_{b}} \end{split}$$

Die für diese Verschiebung nötige Arbeit $A_1 = Kraft$ mal Weg beträgt für die Kraft K_m und den Weg von A nach B

$$\begin{split} A_1 &= \, K_m \, . \, AB = \frac{\, G \, . \, m_1 \, . \, m_2}{\, s_a \, . \, \, s_b} \, . \, \, (s_b - s_a) \, \equiv \\ &= \, G \, . \, m_1 \, . \, m_2 \, . \, \, (\frac{\, 1}{\, s_a} \, - \, \frac{\, 1}{\, s_b} \,) \end{split}$$

Soll sich ein Körper aus dem Gravitationsfeld der Erde entfernen, ins Unendliche entweichen, so

wird $s_b = \infty$ und $\frac{1}{s_b} = 0$. Damit erhält A_1 den Wert

$$XI A_1 = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{s_a}$$

Der Körper enthält nach der Verschiebung diesen Betrag in Form potentieller Energie. Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie muß man ihm beim Abschuß den gleichen Betrag an kinetischer Energie zuführen. Sie verwandelt sich dann während dem Entweichen allmählich in potentielle Energie. Für die kinetische Energie A_2 gilt

$$XII A_2 = \frac{m_1 \cdot v^2}{2}$$

Durch Gleichsetzung der Werte A_1 und A_2 für potentielle und kinetische Energie erhält man aus der Gleichung

$$\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{s_a} = \frac{m_1 \cdot v^2}{2} \text{ die Größe von } v$$

$$XIII \qquad v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_2}{s_a}}$$

Wiederum fällt eine Masse aus der Formel heraus. Es ist die Masse m_1 des ins All zu befördernden Körpers. Die zweite kosmische Geschwindigkeit, die Entweichungsgeschwindigkeit, ist also von der Masse des abzuschießenden Dings unabhängig. Den numerischen Betrag erhalten wir, wenn wir für m_2 die Erdmasse und für s_a den Erdradius einsetzen.

$$\begin{array}{l} v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_{2}}{s_{a}}} = \sqrt{\frac{2.6,7 \cdot 5,98.10^{27}}{10^{8} \cdot 6,37.10^{8}}} \\ = 11,2 \; km/sec = 40\;000\; km/h \end{array}$$

Obwohl der Mond nicht unendlich weit weg ist, sondern «nur» 384 000 km, ist die zum Flug zum Mond nötige Abschußgeschwindigkeit praktisch gleich der Entweichungsgeschwindigkeit. Wir haben früher gesehen, daß die Gravitationsbeschleunigung in Mondferne statt wie 980 cm/sec² auf der Erde nur noch 0,26 cm/sec², also praktisch gleich Null ist.

Für die Rückkehr vom Mond ist es von Bedeutung, daß die Entweichungsgeschwindigkeit von ihm weg viel kleiner ist. Setzen wir für m_2 die Mondmasse ein und für s_a den Mondradius, so erhalten wir

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_2}{s_a}} = \frac{2.6,7 \cdot 7,35.10^{25}}{10^8 \cdot 1,74.10^8}$$
$$= 2,4 \text{ km/sec} = 8500 \text{ km/h}$$

Verwendete Literatur

Otto Struve: Astronomie, Einführung in ihre Grundlagen. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 1962 Martin Wagenschein: Natur physikalisch gesehen. Verlag Moritz Diesterweg 1960

Gamov-Cleveland: Physik in unserer Welt, Bd. 1. Ott-Verlag, München 1962