Aufgaben über Drehkörpervolumen und Schwerpunktslage

Mittelschule

Friedrich Pfister, Altdorf

Im Schulunterricht wird oft nur recht kurze Zeit bei den Drehkörpern verweilt. Mit der Vermittlung der Guldinschen Regel und einigen Übungen ist recht wenig getan, um dem Inhalt der sich dabei aufdrängenden Probleme gerecht zu werden. Algebraische Kenntnisse sind allerdings vorausgesetzt, will man sich mit den Drehkörpern ausführlicher beschäftigen.

1. Wird ein quadratischer Eisenstab von 2 m Länge und dem Querschnitt 12×12 mm^2 zu einem Ring gebogen, so ändert sich dabei das Volumen nicht, weil die innere Masse ebensosehr zusammengedrückt wird wie die äußere verzogen. Für das Volumen gilt:

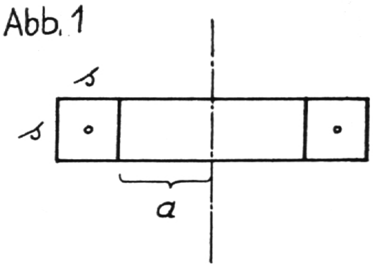
$$V = 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 200 = 288 \ (\mathrm{cm}^3)$$

Die ursprüngliche Länge des Stabes kann aus dem fertigen Ring mit dem mittleren Durchmesser wieder berechnet werden:

$$l = d_m \cdot \pi$$

Es gilt deshalb auch: $\underline{V = s^2 \cdot d_m \cdot \pi}$

Abb. 1



Vergleichen wir die beiden Volumenberechnungen für den Fall des in Abb. 1 gezeigten Ringes, den wir auch als Hohlzylinder anschauen können:

Als Hohlzylinder:

$$V = (a+s)^2\pi s - a^2\pi s$$
$$= (a^2+2as+s^2)\pi s - a^2\pi s$$
$$= (2as+s^2)\pi s = \underline{(2a+s)\pi s^2}$$

Als Drehkörper:

$$V = s^2 \cdot 2(a+s/2)\pi$$
$$= \underline{(2a+s)\pi s^2}$$

Der Körper der Abb. 2 soll ebenfalls auf beide Arten berechnet werden:

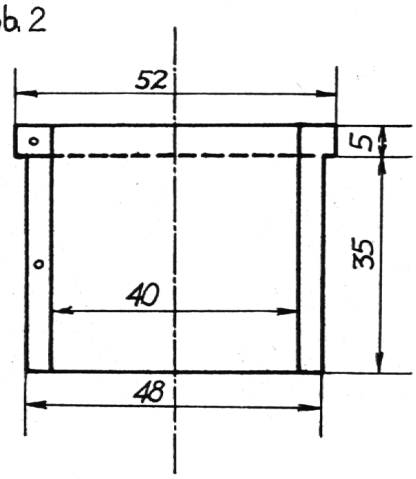
Als Zylinder:

$$V = 48^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 35 + 52^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 5 - 40^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 40$$
$$= 30160 \cdot \frac{\pi}{4} = 7540\pi = \underline{23{,}688} \ (\mathrm{cm}^3)$$

Als Drehkörper:

$$V = 5 \cdot 6 \cdot 46 \cdot \pi + 4 \cdot 35 \cdot 44 \cdot \pi = 7540\,\pi = \underline{23{,}688} \ (\mathrm{cm}^3)$$

Abb. 2



Statt der drei Zylinder der ersten Lösung können die zwei Drehkörper der zweiten Lösung genommen, wodurch schon eine Vereinfachung entsteht. Da die Schwerpunkte bei den Parallelenvierecken in den Diagonalenschnittpunkten liegen, sind die Schwerpunktsabstände von der Drehachse leicht zu ermitteln.

Ein Eisenstab, dessen Querschnitt zum Beispiel ein regelmäßiges Dreieck bildet, wird sich je nach der Stellung des Dreiecks zur Biegungsebene zu verschiedenen Ringen formen lassen (Abb. 3). Bei bestimmter Stablänge wird zwar der Schwerpunktskreis derselbe bleiben, die inneren und äußeren Ringdurchmesser jedoch werden verändert. Als mittlerer Durchmesser ist deshalb der doppelte Abstand x vom Schwerpunkt zur Drehachse zu nehmen.

So gilt:

$$\underline{V = \text{Querschnitt} \cdot \text{Schwerpunktskreis} = Q \cdot 2x\pi}$$

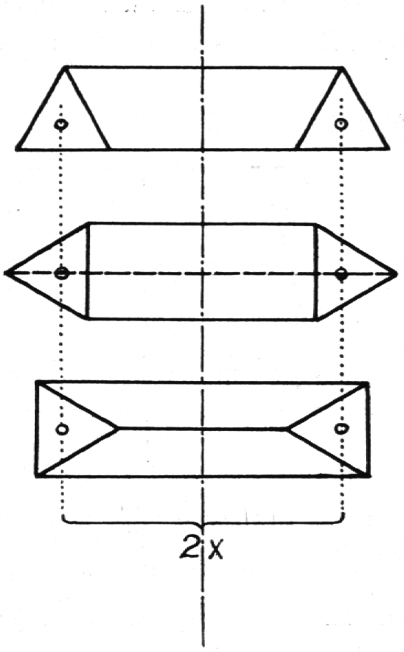
Ein zylindrischer Ring (Torus)[1] mit mittlerem Durchmesser (120 mm) und kreisförmigem Quer-

[1] Oft – nicht ganz genau – als ‚Kreisring' bezeichnet.

schnitt (d = 18 mm) wird direkt nach dieser Formel berechnet:

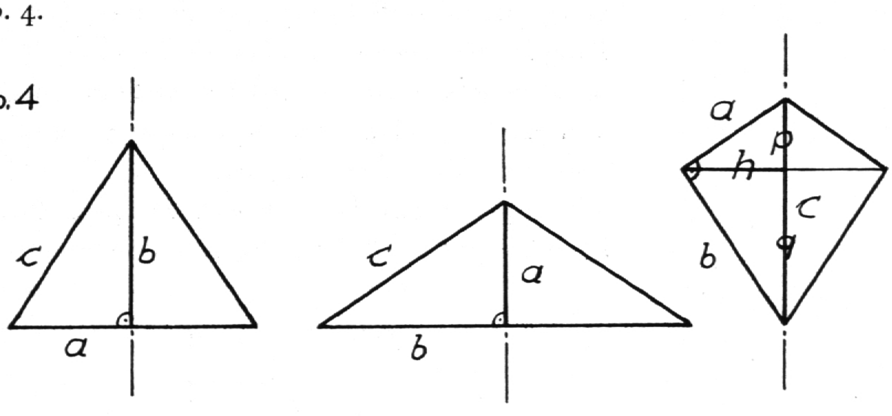
$$V = 18^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 120\pi = 324 \cdot 30\pi^2 = \underline{95{,}933} \ (\text{cm}^3)$$

Abb. 3



2. In diesem Zusammenhang soll auch gezeigt werden, daß zum Beispiel ein rechtwinkliges Dreieck ganz verschiedene Körper ergibt, wenn wir jede der drei Seiten einmal als Drehachse annehmen: Abb. 4.

Abb. 4



$V_1 = {}^1/_3 \cdot a^2\pi b \qquad V_2 = {}^1/_3 \cdot b^2\pi a \qquad V_3 = ?$

Für den dritten Körper ist c und h (oder auch p, q und h) zu bestimmen:

$p = a^2/c \qquad q = b^2/c \qquad h = \sqrt{p \cdot q}$

Es sei zum Beispiel a = 5 cm, b = 8 cm; dann ist c = 9,43 cm, p = 2,65 cm, q = 6,78 cm und h = 4,24 cm.

$\underline{V_1} = {}^1/_3 \cdot 25\pi \cdot 8 = \underline{\frac{200\,\pi}{3}} \qquad \underline{V_2} = {}^1/_3 \cdot 64\pi \cdot 5 = \underline{\frac{320\pi}{3}}$

$\underline{V_3} = {}^1/_3 \cdot h^2\pi p + {}^1/_3 \cdot h^2\pi q = {}^1/_3 \cdot h^2\pi c$

$= {}^1/_3 \cdot 4{,}24^2\pi \cdot 9{,}43 = \underline{\frac{169{,}5\,\pi}{3}}$

Um die Lage des Schwerpunktes für die drei Fälle zu finden, lösen wir die Formel $V = Q \cdot 2x\pi$ nach x auf: $\underline{x = V/2Q\pi}$

Wir erhalten: $x_1 = 1\frac{2}{3}$, $x_2 = 2\frac{2}{3}$, $x_3 = 1{,}413$ (cm)

In jedem Fall hat der Schwerpunkt einen Abstand von der Drehachse, der einem Drittel der auf der entsprechenden Seite stehenden Höhe gleichkommt. Damit wird bestätigt, daß die Schwerlinien den Schwerpunkt im Dreieck bestimmen und daß sich diese im Verhältnis 1 : 2 gegenseitig teilen.

Wir können aber zum Beispiel auch zeigen, daß ein Kreiskegel ein Volumen aufweist, welches einem Drittel des Volumens eines Kreiszylinders von gleichem Radius und gleicher Höhe entspricht: Abb. 5.

Zylinder: $\underline{V} = a \cdot b \cdot 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \pi = \underline{a^2b\pi}$

Kreiskegel: $\underline{V} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \pi = \underline{\frac{a^2b\pi}{3}}$

Darauf hinzuweisen, daß die beiden Körper der Abb. 6 unbedingt sehr verschiedene Volumina aufweisen, ist ebenfalls wichtig. Bei gleichem Querschnitt haben wir beim einen Körper einen doppelt

Abb. 5

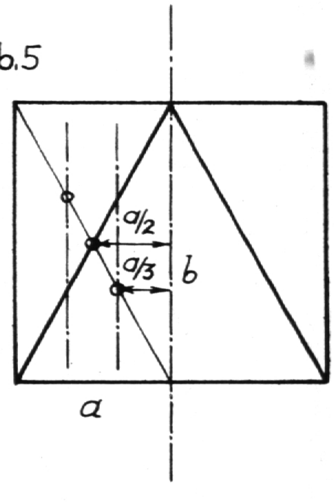
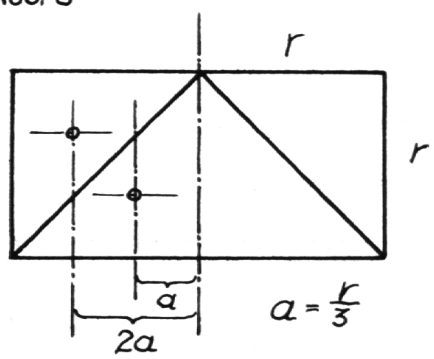


Abb. 6

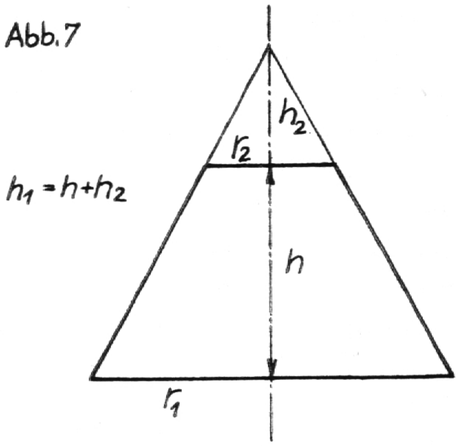


so großen Schwerpunktsabstand wie beim andern. Das Volumen wird deshalb auch doppelt so groß:

$$V_1 = {}^1/_3 \cdot r^2\pi h \qquad V_2 = {}^2/_3 \cdot r^2\pi h \qquad V_2 = 2 \cdot V_1$$

3. Geeignet ist die Guldinsche Regel auch für die Ableitung der Formel zur Volumenberechnung der Kegelstumpfe nach den Abb. 7 und 8:

Abb. 7



$$V = {}^1/_2 \cdot r_1 \cdot h_1 \cdot 2 \cdot {}^1/_3 \cdot r_1 \cdot \pi - {}^1/_2 \cdot r_2 \cdot h_2 \cdot 2 \cdot {}^1/_3 r_2 \cdot \pi$$

$$V = {}^1/_3 \cdot \pi\,(r_1^2 h_1 - r_2^2 h_2)$$

$h_2 : h = r_2 : (r_1 - r_2)$ Ähnlichkeit!

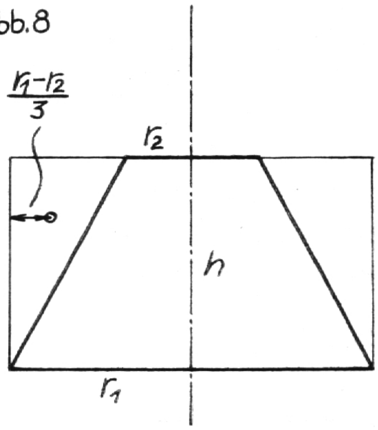
$$h_2 = \frac{h \cdot r_2}{r_1 - r_2} \qquad h_1 = h + h_2 = h + \frac{h \cdot r_2}{r_1 - r_2}$$

$$V = {}^1/_3 \cdot \pi \left[r_1^2 \left(h + \frac{h \cdot r_2}{r_1 - r_2} \right) - r_2^2 \frac{h \cdot r_2}{r_1 - r_2} \right]$$

$$V = \frac{h \cdot \pi}{3} \left[\frac{r_1^2\,(r_1 - r_2 + r_2) - r_2^2 \cdot r_2}{r_1 - r_2} \right]$$

$$= \frac{h \cdot \pi}{3} \left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1 - r_2} \right)$$

Abb. 8



$$V = \frac{h \cdot \pi}{3}\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

Oder einfacher nach Abb. 8:

$$V = r_1 h \cdot 2 \cdot r_1/2 \cdot \pi - \frac{r_1 - r_2}{2} \cdot h \cdot 2 \left(r_1 - \frac{r_1 - r_2}{3} \right) \pi$$

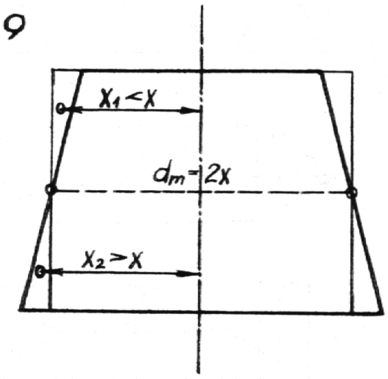
$$V = r_1^2 \pi h - \pi h\,(r_1 - r_2) \left(\frac{3r_1 - r_1 + r_2}{3} \right)$$

$$V = \frac{h \cdot \pi}{3}\,[3r_1^2 - (r_1 - r_2)\,(2r_1 + r_2)]$$

$$\underline{V = \frac{h \cdot \pi}{3}\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}$$

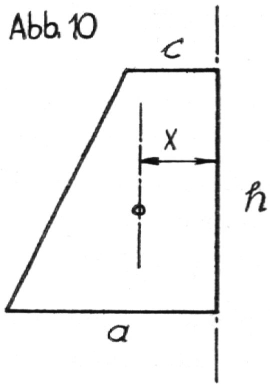
Es soll bei dieser Gelegenheit auch gezeigt werden, daß die ungefähre Formel für Kegelstumpfe eben kein richtiges Resultat ergeben kann: Abb. 9.

Abb. 9



Nimmt man den mittleren Durchmesser und rechnet $V = \frac{d_m^2 \pi h}{4}$ für das Volumen des Kegelstumpfes, weil man ihn mit dem entsprechenden Zylinder vergleicht, wie dies in der Planimetrie zwischen Trapez und Rechteck ja geschehen darf, so übersieht man, daß der oben angesetzte Ring und der unten weggenommene nicht das gleiche Volumen aufweisen, obwohl die Querschnitte gleich groß sind. Verschieden groß sind die Schwerpunktsabstände. Der untere Ring ist deshalb stets größer als der obere. Nimmt die Konzinnität zu, so werden diese Differenzen immer größer, und die Schwerpunktsabstände werden immer deutlicher verschieden.

Wo liegt übrigens der Schwerpunkt im rechtwinkligen Trapez? Aus der Abb. 10 entnehmen wir:



$$V = Q \cdot 2x\pi = \frac{a + c}{2} \cdot h \cdot 2x\pi$$

$$\underline{x} = \frac{V}{(a + c)\,h\pi} = \frac{h\pi\,(a^2 + ac + c^2)}{3\,(a + c)\,h\pi} = \underline{\frac{a^2 + ac + c^2}{3\,(a + c)}}$$

Die Höhe spielt also für diesen Schwerpunktsab-

Fortsetzung siehe Seite 171

5. Nun ist lediglich noch zu ergänzen, daß es auch eine entsprechende Formel zur Berechnung von Drehflächen gibt. Diesbezüglich seien hier nur noch drei Beispiele kurz angeführt: Abb. 14.

$F_1 = l \cdot 2x\pi$ oder als Zylindermantel $\underline{M} = h \cdot 2r\pi = 2r\pi h$

$F_2 = l \cdot 2x\pi$ oder als Kegelmantel mit $x = \frac{r_1 + r_2}{2}$:

$\underline{M} = s \cdot 2 \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot \pi = \underline{(r_1+r_2)\ \pi s}$

Da die Kugeloberfläche bestimmt werden kann aus $O = 4r^2\pi$ oder als Drehkörper $O = r\pi \cdot 2x\pi$, läßt sich der Schwerpunkt für den Halbkreisbogen berechnen:

$$\underline{x} = \frac{4r^2\pi}{2r\pi^2} = \frac{2r}{\underline{\pi}} \qquad \underline{x \approx 0{,}6363r}$$

Also sind auch die Schwerpunkte von Linien bestimmbar, falls die durch die Rotation gebildeten Drehflächen noch auf andere Art berechnet werden können.

Diese und ähnliche Übungen mögen die geometrischen Erkenntnisse erweitern und vertiefen. Sie dienen vor allem auch einer *kurzweiligen Repetition schon bekannter Beziehungen*. Übungsbeispiele und Aufgaben lassen sich in großer Zahl finden. Es könnten zum Beispiel auch Tabellen über die Lage der Schwerpunkte bei den wichtigsten geometrischen Figuren angefertigt werden.

Neue katechetische Literatur *

Von Prof. Franz Bürkli, Luzern

Katechetische Hilfsliteratur und Schriften zur Vertiefung

Vielen Katecheten wird immer klarer, daß der Religionsunterricht allein die Aufgaben der religiösen Erziehung nicht bewältigen kann. Sie erfahren täglich, daß ein gutes Elternhaus mit am Werke sein muß, wenn das Wort Gottes Wurzel fassen und zur Auswirkung kommen soll. Daß bei gewissen Anlässen, z. B. beim Empfang eines heiligen Sakramentes, vor allem der ersten heiligen Kommunion und auch der ersten heiligen Beichte, noch mehr geschehen muß, hat man schon länger eingesehen. Besonders für die erste heilige Kommunion ist darum in bezug auf die außerschulische Vertiefung immer schon allerhand geschehen. Man hat den Kindern entsprechende Bücher in die Hand gegeben und für sie zusagende Zeitschriften geschaffen. So legt uns auch dieses Jahr der Schweizerische Katholische Frauenbund, Luzern, wieder eine Mappe mit sechs Heften vor; sie trägt den Titel ,*Mein Weißer Sonntag*'. Die achtseitigen Hefte enthalten neben vielen mehrfarbigen Bildern kindliche Texte von Robert Lang, Walter Hauser, P. Walter Diethelm, Josy Brunner, Alois von Euw und Bischof von Streng. Diese Texte wollen vor allem auf den Weißen Sonntag vorbereiten, die kindliche Aszese anregen, die heilige Messe in den Mittelpunkt des großen Tages stellen und den Kindern auch den Sinn der heiligen Firmung als ein Wachstum der in der heiligen Kommunion geschenkten Gnaden darstellen. Die religionspädagogische Einstellung ist gut, die kindliche Sprache ebenfalls. So kann die Mappe sehr gute Dienste leisten. Sie ist im Verlag J. Kündig, Zug, zum Preise von Fr. 2.– zu beziehen. – Gleiche Ziele verfolgt das ,*Kommunionglöcklein*', das nun bereits im 60. Jahrgang, aber in neuem Kleide im Patmos-Verlag, Düsseldorf, erscheint. Es besitzt zehn Hefte mit je acht Seiten, einer Beilage und einer Sammelmappe und kostet DM 2.20. Der Text wird von Josef Quadflieg redigiert, die Bilder stammen von Johannes Grüger. Die Themen dieser eher etwas zeitschriftenmäßig aufgezogenen Ausgabe sind Morgen und Abend, Tageslauf des Kindes, Gott ist immer bei uns, Jesus ist mein Hirte, Liebe zu Mensch und Tier, Mission, das heilige Meßopfer (drei Hefte). Man versucht ganz vom kindlichen Leben aus die Seele der Erstkommunikanten zu erfassen. Das moderne Leben ist darin spürbar und fließt in die Darstellungen und Bilder ein. – Nicht bloß die Vorbereitung des Erstkommunionempfanges, sondern die Vertiefung des gesamten religiösen Lebens beabsichtigt die schon längst bekannte Kinderzeitschrift ,*Schutzengel*', die in den beiden Ausgaben ,Freund der Kinder' und ,Freund der Jugend' allmonatlich im Verlag Ludwig Auer, Cassianeum, Donauwörth, erscheint. Die gut redigierte, allseitige und pädagogisch vortreffliche Zeitschrift erfüllt seit Jahren ihren Dienst in ausgezeichneter Weise. Zu jeder Nummer dieser Zeitschrift erscheint auch für beide Ausgaben je ein vierseitiger ,*Methodenschlüssel*' (je 50 Seiten), der nun für den Jahrgang 1958 hübsch in Leinen gebunden als kleines Büchlein vorliegt. Wenn man diesen Methodenschlüssel betrachtet, sieht

* Siehe Nr. 4 vom 15. Juni 1960.