**Zeitschrift:** Schweizer Schule
**Herausgeber:** Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
**Band:** 46 (1959)
**Heft:** 6-7

**Artikel:** Geometrische Örter und Funktionsbilder
**Autor:** Pfister, F.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-531335

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 05.08.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Es scheint zwar zunächst nicht naheliegend, den Begriff des ‚geometrischen Ortes' mit dem Begriff der ‚Funktion' zu verknüpfen, weil die beiden an sich so verschiedenen Dinge in der Mathematik nicht gleichzeitig auftreten. Wir haben uns aber stets zu bemühen, schon bekannte Dinge zur Erklärung neuer Beziehungen heranzuziehen, schon damit diese Dinge auch wieder einmal repetiert werden. Durch das stete Wiederaufgreifen vertieft man sich erst richtig in eine Sache und wird mit ihr genügend vertraut.

Der Begriff der Funktion macht den Schülern zunächst immer einige Schwierigkeiten, auch wenn er noch so sorgfältig eingeführt wird. Mit praktischen Beispielen und Zeichnungen wird er erläutert. Es wird unterschieden zwischen der Funktion im algebraischen Sinn und dem Funktionsbild, der graphischen Darstellung der Funktion, ihrer geometrischen Veranschaulichung. Um zu dieser Veranschaulichung zu kommen, begehen wir nun einmal einen neuen Weg. Wir gehen von den *geometrischen Örtern* aus, denn wir möchten vermeiden, daß das Funktionsbild für den Schüler nur über die Wertetabelle entsteht. Das Bild soll vor der Ausrechnung schon vorschweben. Gewiß, dem Lehrer schwebt es vor, aber der Schüler findet allzuoft die Beziehung zwischen der Funktion und ihrer Abbildung nicht direkt. Helfen wir ihm, diesen Weg von der Formel zu ihrer geometrischen Veranschaulichung zu vereinfachen.

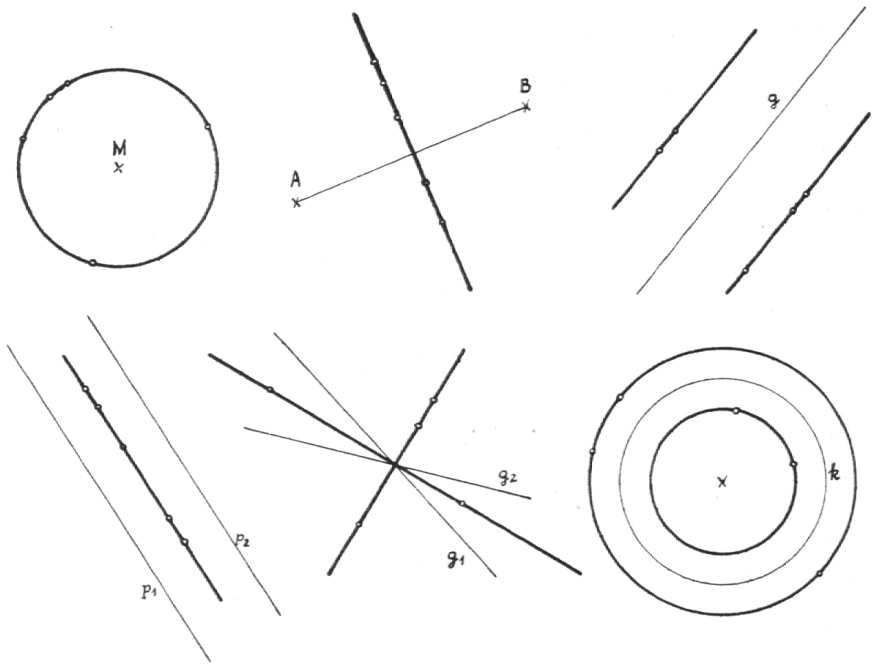



Abb. 1

Wir repetieren: Geometrische Örter sind Linien und nicht Punkte. Jeder Punkt dieser Linie muß eine bestimmte Bedingung erfüllen. Heute verwendet man vermehrt die Bezeichnung ‚Bestimmungslinie' an Stelle des ‚geometrischen Ortes'. Beiden Bezeichnungen haften Mängel an, die dem Schüler das Verständnis der Sache erschweren. Weil bei ‚Ort' so gerne an eine bestimmte Stelle, an einen Punkt, gedacht wird, hat man den Schüler mit dem Begriff des Ortes als *Linie* erst einmal recht vertraut zu machen. Im Wort ‚Bestimmungslinie' fehlt der Begriff der Bedingung, der jeder Punkt unterstellt ist. Nehmen wir diese grundsätzlichen Dinge ja nicht zu leicht: Wir schaffen unseren Schülern und den Lehrern der oberen Klassen sonst manche Mühe, die zu ersparen gewesen wäre.

Kehren wir also vor Einführung des Funktionsbegriffes noch einmal gründlich zu den geometrischen Örtern zurück:

a) Welches ist der g.O. aller Punkte, die von einem festen Punkt M einen bestimmten Abstand a haben?

b) Welches ist der g.O. aller Punkte, die von zwei festen Punkten A und B jeweils den gleichen Abstand haben?

c) Welches ist der g.O. aller Punkte, die von einer Geraden g einen bestimmten Abstand a haben?

d) Welches ist der g.O. aller Punkte, die von zwei Parallelen den gleichen Abstand haben?

e) Welches ist der g.O. aller Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden jeweils den gleichen Abstand haben?

f) Welches ist der g.O. aller Punkte, die von einer gegebenen Kreislinie den Abstand a haben?

Der g.O. ist eine Linie, hier z.B. Geraden oder Kreise. Als g.O. können aber auch zwei Linien in Erscheinung treten (bei c, e und f). Darauf aufmerksam zu machen, ist besonders wichtig. Kehren wir nun aber um und fragen: Wie können die folgenden Linien definiert werden?

1. Kreislinie, 2. Mittelsenkrechte, 3. Parallelenpaar, 4. Mittelparallele, 5. Winkelhalbierenden, 6. Parallelenkreise.

Nun wählen wir als besondere Linien die horizontale X-Achse und die vertikale Y-Achse des Koordinatensystems: Abb. 2.

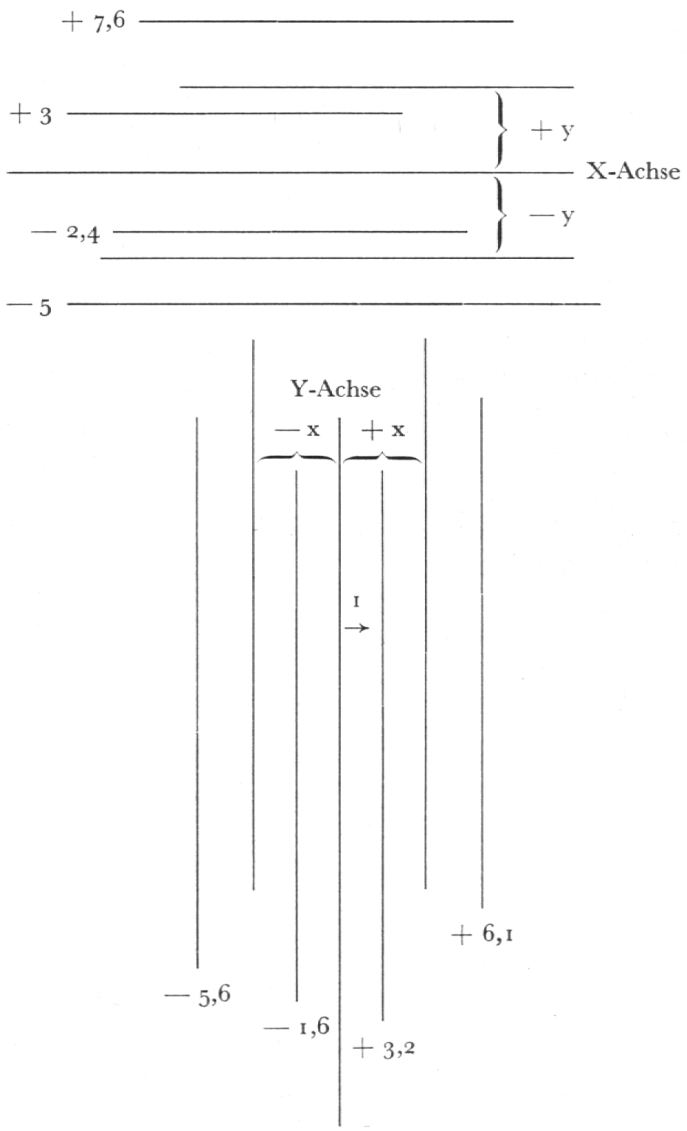



Abb. 2

g) Welches ist der g.O. aller Punkte mit gleichem Abstand von der X-Achse?

h) Welches ist der g.O. aller Punkte mit gleichem Abstand von der Y-Achse?

In beiden Fällen ergeben sich je zwei Geraden. Die in der Y-Richtung gemessenen Abstände bezeichnen wir mit +y nach oben und mit –y nach unten. Zeichne den g.O. aller Punkte mit dem gleichen Ab-

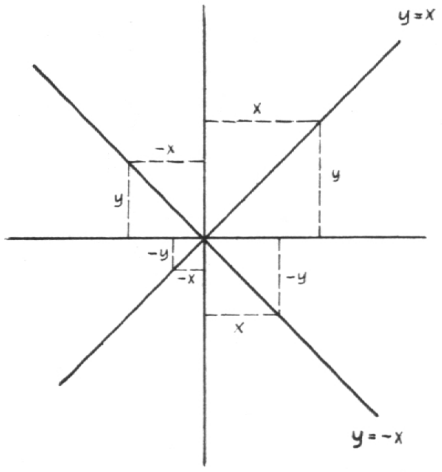



Abb. 3

stand +3 (+7,6 / –2,4 / –5) von der X-Achse! Zeichne desgleichen den g.O. aller Punkte mit dem gleichen Abstand –1,6 (–5,6 / +3,2 / +6,1) von der Y-Achse! Wir erhalten so je nur eine bestimmte Gerade, bestimmt durch ihren Abstand +y oder –y von der X-Achse bzw. +x oder –x von der Y-Achse. Die Bedingung, die jeder Punkt dieser Geraden zu erfüllen hat, ist festgelegt in der kürzesten algebraischen Form durch die Gleichung, z.B. x = +5; y = +7; x = –4,8; y = –2,6; y = 0; x = –0,8; y = ⅔ usw.

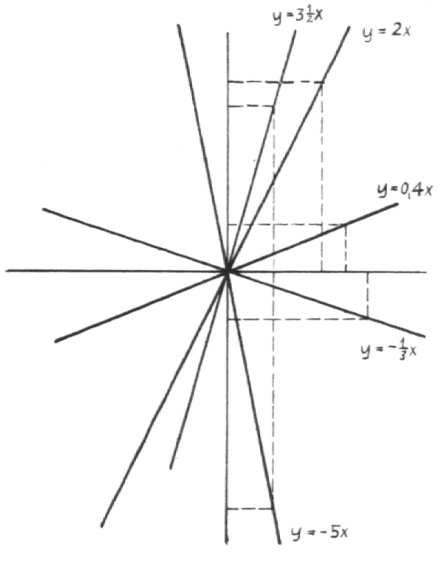



Abb. 4

Erkläre die Lage dieser Geraden!

Wir können aber auch g.O. in Bezug auf beide Achsen festlegen: Abb. 3.

i) Welches ist der g.O. aller Punkte mit jeweils gleichem Abstand von den beiden Koordinatenachsen?

Wir können die beiden Winkelhalbierenden als solche Örter erkennen. Berücksichtigen wir aber die Vorzeichen, so gilt nur für eine Linie $x = y$ bzw. $-x = -y$. Die Winkelhalbierende im ersten Feld ist

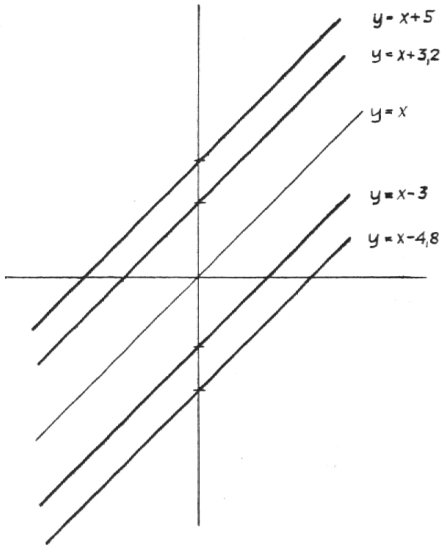



Abb. 5

also durch die Bedingung $y = x$ bestimmt. Für die Winkelhalbierende im zweiten Feld gilt: $y = -x$.
Noch immer reden wir von geometrischen Örtern, die wir aber nun auf das rechtwinklige Koordinatensystem beziehen, was uns ermöglicht, die Bedingungen durch einfache algebraische Gleichungen festzulegen. Daß diese Bedingungen die Gleichungen der entsprechenden Geraden sind, prägt sich mit den Übungen von selbst ein.

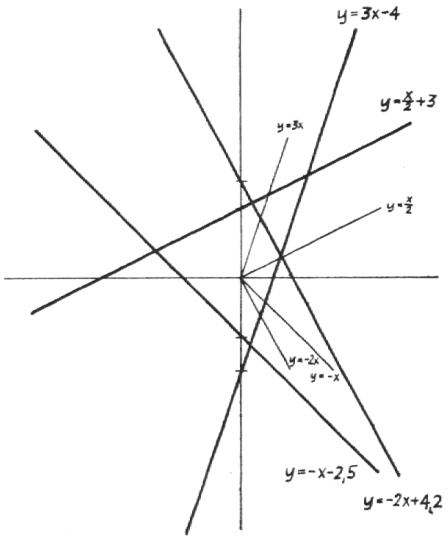



Abb. 6

Wir legen die weiteren Bedingungen für alle Punkte der gesuchten g.O. nun durch die Gleichungen fest: Abb. 4.

k) $y = 2x$, d.h. suche den g.O. aller Punkte, deren Abstand von der X-Achse jeweils doppelt so groß ist wie der Abstand von der Y-Achse!
Zeichne ferner die Geraden:
$y = 3\frac{1}{2}x$; $y = 0{,}4x$; $y = -\frac{1}{3}x$; $y = -5x$ usw.

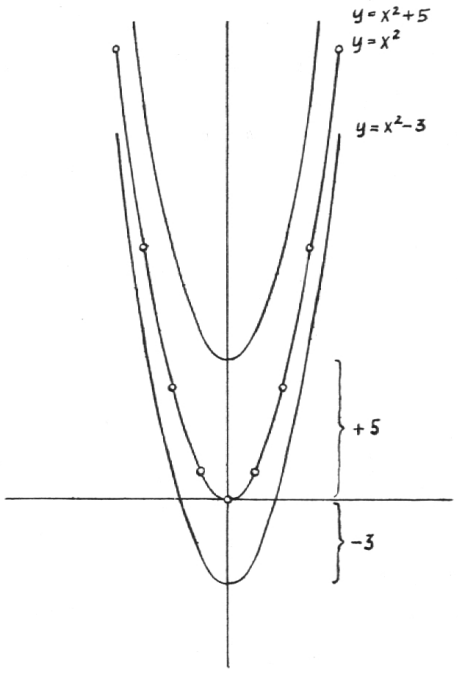



Abb. 7

Die Bedingung $y = mx$ bestimmt Geraden, die durch den Schnittpunkt der Koordinaten gehen. Die Größe m legt die Steigung der Geraden fest. Für $m = 2$ beträgt die Steigung 2 : 1, für $m = 0{,}4$ beträgt sie 0,4 : 1 oder 4 : 10 oder 2 : 5 usw.
Gehen wir nun einen Schritt weiter und zeichnen Linien, für deren Punkte gilt $y = x+c$, dann $y = mx+c$: Abb. 5 / Abb. 6.

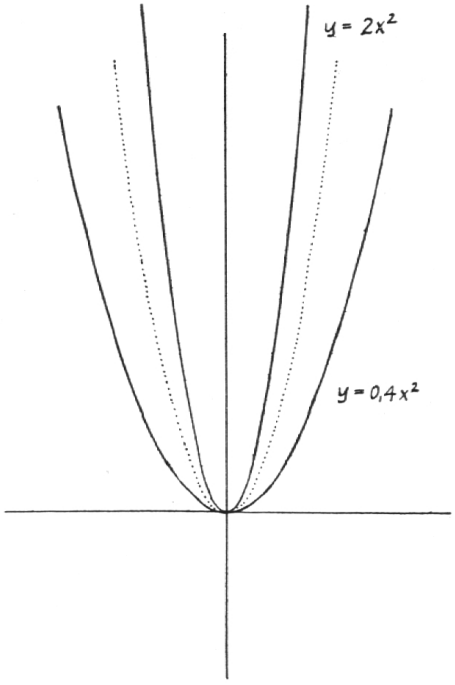



Abb. 8

l) Suche die g.O. aller Punkte, die folgende Bedingungen erfüllen: $y = x+5$; $y = x-3$; $y = x+3{,}2$; $y = x-4{,}8$ usw.!

m) Suche die g.O. aller Punkte, die folgende Bedingungen erfüllen: $y = 3x-4$; $y = x/2+3$; $y = -x-2{,}5$; $y = -2x+4{,}2$ usw.!

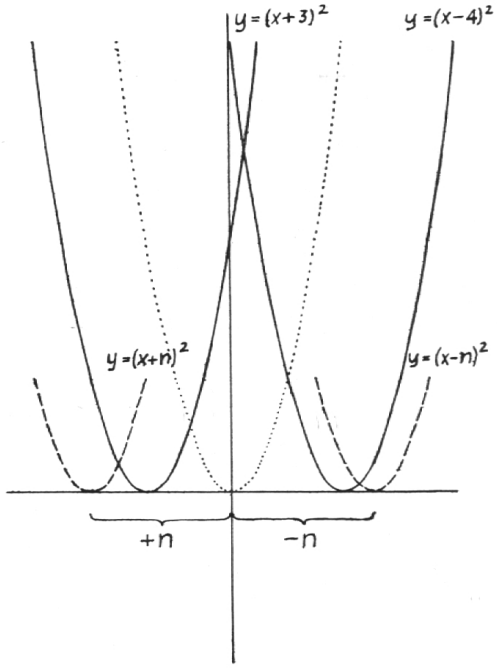



Abb. 9

Daß das Zahlenglied c nur eine Verschiebung in vertikaler Richtung zur Folge hat, entdeckt jeder Schüler leicht. Jede beliebige Gerade in der Koordinatenebene kann also durch eine Gleichung in der Form $y = mx+c$ definiert werden.
Wir dürfen es nicht unterlassen, beliebige Geraden im Koordinatensystem zu zeichnen und deren Gleichungen zu suchen, indem wir die Vertikalverschiebung c und die Steigung m durch Nachmessen oder durch Nachzählen der Häuschen bestimmen.
Wir wollen aber nicht hier stehenbleiben, sondern auch die quadratische Gleichung noch kurz streifen: Abb. 7.

n) Welches ist der g.O. aller Punkte, die die Bedingung erfüllen $y = x^2$?
Auf karriertem Papier oder mm-Papier zeichnen wir nur wenige Punkte auf und erkennen dann, daß als g.O. sich weder eine Gerade noch ein Kreis ergibt, sondern eine neue Kurve. Wir nennen sie *Parabel*.

o) Desgleichen für $y = x^2+5$ / $y = x^2-3$ usw.
Die Gleichung $y = x^2+c$ ergibt die Parabel $y = x^2$, die aber gegenüber dem Nullpunkt auf der Y-Achse um c verschoben ist, entsprechend der Verschiebung der Geraden.

p) Desgleichen für $y = 2x^2$ / $y = 0{,}4x^2$ usw. Abb. 8.
Der Koeffizient a in der Gleichung $y = ax^2$ bewirkt eine Stauchung bzw. Dehnung der Kurve $y = x^2$. Ist a größer als 1, so wird die Kurve schlanker. Ist a kleiner als 1, so wird sie breiter.

q) Desgleichen für $y = (x+3)^2$; $y = (x-4)^2$ usw. Abb. 9.
Die Gleichung $y = (x+n)^2$ ergibt eine Parabel der Form $y = x^2$, die aber auf der X-Achse gegenüber dem Nullpunkt um n Einheiten verschoben ist, und zwar um n Einheiten nach rechts für negative n und um n Einheiten nach links für positive n. Beachte hier die Unterschiede zwischen $y = x^2-3$ und $y = (x-3)^2$, $y = x^2+c$ und $y = (x+c)^2$!

r) Desgleichen für $y = (x+2)^2+3$; $y = (x-4)^2+7$ usw. Abb. 10.
Die Gleichung $y = (x+n)^2+c$ bestimmt eine Parabel der Form $y = x^2$, die gegenüber dem Nullpunkt um n Einheiten nach links und um c Einheiten nach oben verschoben ist. Durch quadratisches Ergänzen kann jede vollständig quadratische Gleichung in die Form $y = (x+n)^2+c$ gebracht werden. Auch der Schüler wird nun den Verlauf der Kurve aus der umgeformten Gleichung sofort erkennen. Er kann auf die Wertetabelle verzichten, denn er ist nun so-

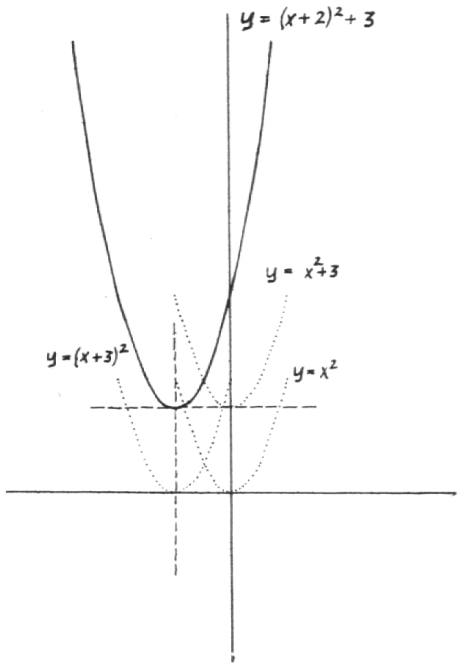



Abb. 10

weit, daß er das Bild der Funktion im Kopf entstehen lassen kann.

Natürlich kann man auf diesem Wege noch weiter gehen. Mir ging es hier nur darum, eine Beziehung

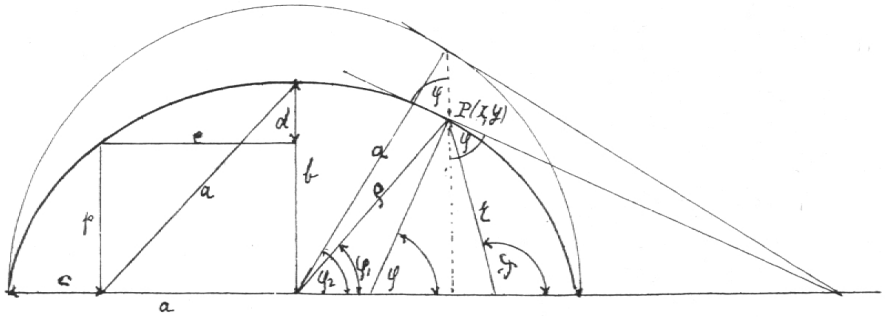
zwischen den Bestimmungslinien und den Funktionsbildern zu zeigen und auszuwerten, um den Zusammenhang zwischen der Gleichung einer Kurve und dem Bild der Kurve inniger werden zu lassen.

## Einige bemerkenswerte Größenbeziehungen bei der Ellipse

P. Dr. Theodor Schwegler OSB, Einsiedeln

*Vorbemerkung:* Über die Bedeutung der in Frage stehenden Größen siehe Zeichnung. Als bekannt sind die folgenden Beziehungen vorausgesetzt:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\,;\ 0 < \varepsilon < 1;\ p = \frac{b^2}{a} = a\,(1 - \varepsilon^2)$$




Dann ergeben sich die folgenden bemerkenswerten Beziehungen:

1) $\frac{c}{p} = \frac{a - e}{p} = \frac{a\,(1 - \varepsilon)}{a\,(1 - \varepsilon^2)} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \begin{cases} < 1 \\ > 1/2 \end{cases}$.

2) $\frac{d}{e} = \frac{b - p}{e} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} - (1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon}$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon + \binom{1/2}{2} \cdot \varepsilon^3 - \binom{1/2}{3} \cdot \varepsilon^5 + \binom{1/2}{4} \cdot \varepsilon^7 \ldots \equiv f(\varepsilon)$$

Wird nun $f(\varepsilon)$ nach der einen oder der anderen Form ausgewertet, so ergibt sich leicht, daß

a) wenn $\varepsilon \to {}^{0}_{1}$, so $f(\varepsilon) \to 0$;

b) daß das Maximum von $f(\varepsilon)$ bei $\varepsilon = 0{,}786$ liegt, daß also $f(\varepsilon)_{max} = 0{,}300\,284$; m. a. W.: $\frac{d}{e}$ kann den Wert von 0,300 284 nicht überschreiten.

Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch, wenn $\sqrt{1 - \varepsilon^2} \equiv z$ gesetzt und von der so entstehenden Funktion $f(z) = \frac{z - z^2}{\sqrt{1 - z^2}}$ das Maximum gesucht wird, also

$$f'(z) = \frac{z^3 - 2z + 1}{(1 - z^2)^{3/2}} \left(\equiv \frac{z^3 + 3pz + q}{(1 - z^2)^{3/2}}\right) = 0.$$

Da im vorliegenden Falle $0 < z < 1$, braucht nur der Zähler von $f'(z)$ berücksichtigt zu werden, und da die Diskriminante dieser kubischen Gleichung: $q^2 - p^2 = (1/2)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 < 0$, ist die *trigonometrische* Lösung anzuwenden. Setzt man

$$\cos\varphi = \frac{-q}{\sqrt{-p^3}} = -\sqrt{27/32} \text{ dann: } \varphi = 156°42'58{,}5''$$

Die drei reellen Lösungen der Gleichung $z^3 - 2z + 1 = 0$ sind dann $z_1 = 2\sqrt{-p} \cdot \cos\frac{\varphi}{3} = 1$

$$z_2 = -2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60°\right) \equiv 0{,}618\,0336;$$

$$z_3 = -2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60°\right) = -1{,}618\,0336$$

Es liegt auf der Hand, daß im vorliegenden Falle nur $z_2$ in Frage kommt, und seinem Wert entspricht $\varepsilon = 0{,}78615$

3) $\frac{d}{c} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} - (1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} - (1 + \varepsilon)$
$\equiv f(\varepsilon)$

Man sieht leicht, daß für $0 < \varepsilon < 1$: $0 < f(\varepsilon) < \infty$. Ferner ergibt sich die folgende Reihe:

$$\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} - (1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} - (1 + \varepsilon)$$
$$= (1 + \varepsilon)^{1/2} \cdot (1 - \varepsilon)^{1/2} - (1 + \varepsilon)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon^2 + \varepsilon^3) + \frac{3}{8} \cdot (\varepsilon^4 + \varepsilon^5) + \frac{5}{16} \cdot (\varepsilon^6 + \varepsilon^7) + \frac{35}{128} \cdot (\varepsilon^8 + \varepsilon^9) + \frac{63}{256} \cdot (\varepsilon^{10} + \varepsilon^{11}) + \ldots$$