Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 45 (1958)
Heft: 20: Der Mathematikunterricht in der Sekundarschule

Artikel: Tempo trügt
Autor: Eigenmann, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-539239

Halbmonatsschrift für Erziehung und Unterricht

Schweizer Schule

Olten, den 15. Februar 1959 45. Jahrgang Nr. 20

Zu unserer Nummer «Der Mathematikunterricht in der Sekundarschule»

R. In.

Im Unterricht der Sekundarschule ist die Mathematik – in der Regel aufgeteilt in Rechnen, Geometrie und eventuell Algebra – eines der zentralen Fächer; ein Fach, das zudem heute, da die Welt immer ,mathematischer' wird, auch für jene Kreise stark an Bedeutung gewinnt, die noch vor wenigen Jahren glaubten, mit dem ganz gewöhnlichen, landläufigen Rechnen auszukommen. Dabei stehen nicht so sehr irgendwelche Fertigkeiten im Vordergrund, sondern eher das, was man als ,mathematisches Denken' zu bezeichnen pflegt, ein Denken, das heute zum Beispiel im Gefolge der Automation auf Probleme angewandt wird, die vor kurzem noch kaum einer mathematischen Behandlung fähig schienen. – Einige Anregungen zur Gestaltung des Mathematikunterrichtes möchte der reiche, doch nur locker gebundene Strauß von Artikeln bringen, die im vorliegenden Heft vereinigt sind. Sie betreffen die verschiedensten Gebiete des Unterrichtes und bringen sowohl Gedanken, die sich unmittelbar im Unterricht verwenden lassen, wie auch solche, die eher auf die größeren Zusammenhänge, auf den mathematischen ,Hintergrund', der dem sorgfältig unterrichtenden Lehrer vertraut sein muß, Bezug nehmen. Wir möchten bei dieser Gelegenheit nicht unterlassen, den an der *Methodik und Didaktik des Mathematikunterrichtes* dieser Stufe interessierten Leser auf eine äußerst wertvolle Neuerscheinung aufmerksam machen. Im Verlag Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen erschien 1958 die reich dokumentierte Publikation ,*Der mathematische Unterricht für die sechs- bis fünfzehnjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland*', herausgegeben von F. Drenckhahn auf Veranlassung des deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission. Aus dem mannigfaltigen Material, das von zahlreichen Bearbeitern in diesem Band vereinigt wurde, möchten wir einige uns in diesem Zusammenhange interessierende Kapitel herausgreifen: Unter ,Psychologie und mathematischer Unterricht' werden unter anderm der Begabungswandel der Gegenwart, dann der Mathematikunterricht im Lichte der allgemeinen Psychologie und schließlich der Beitrag der Entwicklungspsychologie zum mathematischen Unterricht dargelegt, und zwar – das scheint uns besonders erfreulich – in einer Art, die nicht nur Vertrautheit mit den psychologischen Gegebenheiten, sondern auch mit der modernen mathematischen Begriffsbildung zeigt. Sehr bemerkenswert sind dann weiter die Betrachtungen über den Rechen- und Raumlehreunterricht an der Volksschuloberstufe, an den (deutschen) Mittelschulen (zum Teil unsern Sekundar-, Bezirks- oder Realschulen entsprechend) und schließlich auf der Unterstufe des Gymnasiums. Endlich wird auch dem Mathematikunterricht der Mädchen ein besonderer Abschnitt gewidmet. Alle Beiträge sind unseres Erachtens sehr geeignet, dem Lehrer mathematischer Fächer einen Querschnitt durch den gegenwärtigen Stand des Unterrichts in Deutschland, dessen Wege und Ziele, manche Reformbestrebungen und seine Stellung im Rahmen einer allgemeinen Unterrichtslehre zu geben. Das Werk wird weiter auch mit dem ausgebauten Literaturverzeichnis, das viele einschlägige Lehrmittel enthält, gute Dienste leisten. Der umfangreiche Band von rund 380 Seiten kann sehr empfohlen werden!

Tempo trügt

P. Eigenmann, St. Gallen

Unter diesem Titel habe ich ein kleines Kapitel zum Rechnungsunterricht zusammengestellt. Es eignet sich zum Tabellenrechnen, zur graphischen Darstellung sowie zur Behandlung von Formeln. Am besten dürfte es in der dritten Sekundarklasse Anwendung finden.

Wenn auch die vielen Unfälle im Straßenverkehr nicht auf ungenügende Aufklärung, sondern auf menschliche Haltlosigkeit zurückzuführen sind, so dürfte doch dieses Rechnungskapitel die angehenden Motorfahrzeugführer anregen, über das ‚Tempo' nachzudenken.

1. Die Tempo-Umrechnung

V = Anzahl Kilometer pro Stunde   s = Anzahl Meter pro Sekunde

Es gilt:

$$s = \frac{V \cdot 1000}{60 \cdot 60} = \frac{5 \cdot V}{18} = 0{,}2777\ldots \cdot V \qquad V = \frac{s \cdot 60 \cdot 60}{1000} = \frac{18 \cdot s}{5} = 3{,}6 \cdot s$$

Rechnet man in der Formel $s = 0{,}277 \cdot V$ angenähert mit 0,3, so ergibt sich ein Fehler von 8%.

Fehlerrechnung: $^5/_{18} : {}^3/_{10} = 100\% : x\%$ $x = 108\%$

2. Die Reaktionszeit

Als Reaktionszeit vor dem Bremsen beim Auftauchen eines Hindernisses wird eine Sekunde angenommen. Also gilt auch

Reaktionsweg $= 0{,}2777\ldots \cdot V$

Tabelle dazu:

Tempo V	Reaktionsweg s (m)	Tempo V	Reaktionsweg s (m)
10 km	$2^7/_9 = 2{,}888\ldots$	90 km	25
20 km	$5^5/_9 = 5{,}555\ldots$	100 km	$27^7/_9 = 27{,}777\ldots$
30 km	$8^3/_9 = 8{,}333\ldots$	110 km	$30^5/_9 = 30{,}555\ldots$
40 km	$11^1/_9 = 11{,}111\ldots$	120 km	$33^3/_9 = 33{,}333\ldots$
50 km	$13^8/_9 = 13{,}888\ldots$	130 km	$36^1/_9 = 36{,}111\ldots$
60 km	$16^6/_9 = 16{,}666\ldots$	140 km	$38^8/_9 = 38{,}888\ldots$
70 km	$19^4/_9 = 19{,}444\ldots$	150 km	$41^6/_9 = 41{,}666\ldots$
80 km	$22^2/_9 = 22{,}222\ldots$		

Beachte die Zählerreihe des Bruches!

3. Der Bremsweg

Der Bremsweg in m wird berechnet mit der Formel:

$b = \left(\frac{V}{10}\right)^2 \times$ Faktor. Der Faktor hängt ab von den Bremsen und der Beschaffenheit der Straße.

Als Faktor wird eingesetzt:

Zweiradbremse oder Vierradbremse mit ungünstigen Verhältnissen = 1;
Vierradbremse, mittlere Verhältnisse = $^2/_3$;
Vierradbremse, sehr günstige Verhältnisse = $^1/_2$.

In den folgenden Rechnungen wird die Formel $b = \left(\frac{V}{10}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}$ verwendet.

Die graphische Darstellung zum Reaktionsweg und zum Bremsweg zeigt, daß s linear und b quadratisch wächst. Tabelle zum Bremsweg im folgenden Abschnitt.

4. Der Anhalteweg

Anhalteweg a = Reaktionsweg + Bremsweg (in m).

$$a = s + b = \frac{5V}{18} + \left(\frac{V}{10}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{V \cdot (125 + 3V)}{450}$$

Tabelle dazu:

Tempo V	Reaktionsweg s	Bremsweg b	Anhalteweg a
10 km	$2^7/_9$ m	$^2/_3$ m	$3^4/_9$ m
20 km	$5^5/_9$ m	$2^2/_3$ m	$8^2/_9$ m
30 km	$8^3/_9$ m	6 m	$14^3/_9$ m
40 km	$11^1/_9$ m	$10^2/_3$ m	$21^7/_9$ m
50 km	$13^8/_9$ m	$16^2/_3$ m	$30^5/_9$ m
60 km	$16^6/_9$ m	24 m	$40^2/_3$ m
70 km	$19^4/_9$ m	$32^2/_3$ m	$52^1/_9$ m
80 km	$22^2/_9$ m	$42^2/_3$ m	$64^8/_9$ m
90 km	25 m	54 m	79 m
100 km	$27^7/_9$ m	$66^2/_3$ m	$94^4/_9$ m
110 km	$30^5/_9$ m	$80^2/_3$ m	$111^2/_9$ m
120 km	$33^3/_9$ m	96 m	$129^1/_3$ m
130 km	$36^1/_9$ m	$112^2/_3$ m	$148^7/_9$ m
140 km	$38^8/_9$ m	$130^2/_3$ m	$168^5/_9$ m
150 km	$41^6/_9$ m	150 m	$191^2/_3$ m

5. Tempo errechnen aus der Bremsspur

Aus $b = \left(\frac{V}{10}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}$ erhalten wir $V = 5 \cdot \sqrt{6b}$

Tabelle dazu rechnen.

Bei Unfällen ist selten die ganze Bremsspur vorhanden, weil noch ein weiteres Hindernis bremst.

6. Die Bremszeit

Zeit = Weg:Tempo (als Tempo muß s/2 gesetzt werden) *.

Bremszeit $z = b:s/2 = 2b:s = \frac{2 \cdot V^2 \cdot 2 \cdot 18}{100 \cdot 3 \cdot 5V} = \frac{48\,V}{1000}$

Tabelle und graphische Darstellung dazu herstellen.

7. Der notwendige Abstand in der Kolonne

Der Abstand beim Kolonnenfahren muß so groß sein, daß bei einem Stop des vorderen Wagens (A), der nachfolgende Wagen (B) nicht in A hineinfährt. Da A und B das gleiche Tempo haben, haben sie auch den gleichen Bremsweg. Sieht B das Stoplicht des A, so hat A seine Reaktionszeit schon vorbei, also muß B den Abstand s = Reaktionsweg einhalten. Der zeitliche Abstand muß also eine Sekunde sein. Daraus läßt sich auch errechnen, wie viele Fahrzeuge eine Fahrspur von bestimmter Länge fassen kann. Wagenlänge durchschnittlich 5 m.

Zahlenbeispiel: Straße St. Gallen–Rorschach = 12 km. Kolonnentempo = 60 km/Std.

Anzahl Wagen in einer Fahrrichtung: Anzahl = 12 000:(s+5) = 12 000:($16^2/_3$+5) = 553,8.

Der notwendige Abstand wird praktisch kaum eingehalten. Wenn ein Fahrer ihn einhalten will, so schlüpft sofort ein Wagen zwischenhinein. Daß aber die heutige Praxis gefährlich ist, beweisen die Unfälle auf stark befahrenen Überlandstraßen. Im November 1958 waren auf der deutschen Reichsautobahn an *einem Unfall 63 Wagen* beteiligt.

* Erklärung mit dem Wegdiagramm oder mit dem durchschnittlichen Tempo.

8. Das Überholen

Beim Überholen muß der hintere Wagen B die Ausbiegestrecke, beide Wagenlängen und die Einbiegestrecke fahren, und zwar mit seinem Tempoüberschuß über den A. Die drei Strecken zusammen sind der Überholungsweg u. Das Manöver benötige c Sekunden. Ausbiege- und Einbiegestrecke müßten dem Reaktionsweg des B resp. des A entsprechen. In den verwendeten Formeln wird aber für beide Strecken zusammen das Kilometer-Tempo des B in m eingesetzt. Wenn B also 80 km/Std. fährt, so sind die beiden Strecken zusammengerechnet 80 m.

A hat das Tempo V_1 und die Länge L_1 (Wagenlänge)

B hat das Tempo V_2 und die Länge L_2 (Wagenlänge)

Weg des A $= \frac{10 \cdot V_1}{36} \cdot c$

Weg des B $= \frac{10 \cdot V_2}{36} \cdot c =$ Weg des $A + V_2 + L_1 + L_2$

Aus $\frac{10 \cdot V_2}{36} \cdot c = \frac{10 \cdot V_1}{36} \cdot c + V_2 + L_1 + L_2$ erhalten wir Überholungszeit $c = \frac{36\,(V_2 + L_1 L_2)}{10\,(V_2 - V_1)}$

Wir setzen den Ausdruck für c ein in $\frac{10 \cdot V_2}{36} \cdot c$ und erhalten: Überholungsweg $u = \frac{V_2\,(V_2 + L_1 + L_2)}{(V_2 - V_1)}$.

Mit dieser Formel können wir nun für jedes Überholmanöver den Überholungsweg berechnen. Dabei gelten folgende Längen:

Personenwagen	5 m
Pferdefuhrwerk	8 m
Lastwagen	10 m
Gesellschaftswagen (Autocar, Trolleybus)	11 m
Lastwagen mit Anhänger	18 m
Trolleybus mit Anhänger	20 m

Einige Zahlenbeispiele:

a) Ein Pw im Tempo 70 km überholt ein Pferdefuhrwerk im Tempo 6 km/Std.

$$u = \frac{70 \cdot (70 + 5 + 8)}{70 - 6} = 90{,}7 \text{ (m)}$$

b) Ein Pw im Tempo 90 km überholt einen Lastenzug im Tempo 50 km/Std.

$$u = \frac{90 \cdot (90 + 5 + 18)}{90 - 50} = 254{,}2 \text{ (m)}$$

c) Ein Pw im Tempo 110 km will einen anderen Pw im Tempo 90 km/Std. überholen.

$$u = \frac{110 \cdot (110 + 5 + 5)}{110 - 90} = 660 \text{ (m), verboten!}$$

Überholungswege über 500 m sind verboten. Überdies muß die Überholungsstrecke übersichtlich sein, es darf kein Gegenverkehr sein, keine Kreuzung, keine Kurven. Wo in der Schweiz gibt es solche Straßenstücke? Die ganze Problematik des Überholens wird hier sichtbar.

d) Ein Pw im Tempo 80 km/Std. will einen Trolley mit Anhänger im Tempo 50 km/Std. überholen.

$$u = \frac{80 \cdot (80 + 20 + 5)}{80 - 50} = 210 \text{ (m)}$$

Diese Beispiele können beliebig vermehrt werden.

Da beim Überholen meistens Pw beteiligt sind, können wir eine Tabelle für diesen Fall anlegen, wobei $L_1 + L_2 = 10$ m ist.

Tabelle für die Formel $u = \frac{V_2 \cdot (V_2 + 10)}{V_2 - V_1}$

V_2 / V_1	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
10	60	60	67	75	84	94	103	113	123	132	142	152	162
20	∞	120	*100*	*100*	105	112	120	129	138	147	156	166	175
30		∞	200	150	*140*	*140*	144	150	157	165	174	182	191
40			∞	300	210	187	*180*	*180*	184	189	195	202	210
50				∞	420	280	240	225	*220*	*220*	223	228	234
60					∞	560	360	300	275	264	*260*	*260*	263
70						∞	720	450	367	330	312	304	*300*
80							∞	900	550	440	390	364	350
90								∞	1100	660	520	455	420
100									∞	*1320*	*780*	*607*	*525*

Es zeigt sich, daß bei einem bestimmten V_1 das Minimum der Überholungsstrecke etwa bei $V_2 = 2 \cdot V_1$ liegt.

Die Ableitung ergibt für das Minimum von u: $V_2 = \sqrt{V_1 \cdot (V_1 + 10)} + V_1$.

Die Zahlen der Tabelle eignen sich sehr gut für graphische Aufzeichnung. Auch kann durch Probieren das Minimum jeder Zeile ermittelt werden.

Es empfiehlt sich auch, eine Tabelle für die Überholungszeit anzulegen.

9. Tempo und freier Fall

Im freien Fall gilt $v = g \cdot t$ und $h = \frac{g}{2} \cdot t^2$; daraus $h = \frac{v^2}{2g}$; $g = 9{,}81$ m/sek².

Welcher Fallhöhe h entspricht ein Tempo V?

$v = \frac{5V}{18}$, einsetzen in obiger Formel für h; $h = \frac{25 \cdot v^2}{18 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 9{,}8} = \approx 0{,}004 \cdot V_2$.

Tabelle zu $h = V^2 \cdot 0{,}003936 \approx 0{,}004 \cdot V^2$.

V in km/Std.	h in m	V in km/Std.	h in m
10	0,4	110	48,4
20	1,6	120	57,6
30	3,6	130	67,6
40	6,4	140	78,4
50	10	150	90
60	14,4	160	102,4
70	19,6	170	115,6
80	25,6	180	129,6
90	32,4	190	144,4
100	40	200	160

Zahlenbeispiel dazu:

Zwei Pw mit den Tempi 70 und 60 km/Std. fahren ineinander. Dies entspricht einem Fall aus 67,6 m Höhe.

10. Das Kreuzen

Auf einer Straße fahren zwei Wagen einander entgegen. Ihre Distanz ist d, ihre Tempi V und W in km. Wie viele Sekunden verstreichen, bis die beiden Wagen kreuzen?

Zeit bis zum Kreuzen = k Sekunden. $k = d : \left(\frac{5V}{18} + \frac{5W}{18}\right) = \frac{18d}{5(V+W)}$

Zahlenbeispiel: d = 700 m, V = 50 km/Std., W = 80 km/Std. $k = \frac{18 \cdot 700}{5\,(50 + 80)} = 19{,}3$ Sek.

Wie lange dauert das Kreuzen? $(L_1 + L_2) : \frac{5}{18} \cdot (V + W)$.

Zahlenbeispiel:

Zwei Lastenzüge mit den Tempi 40 km/Std. und 50 km/Std. kreuzen. Dauer $(18 + 18) : \frac{5}{18}\,(40 + 50)$
$= 1{,}2$ [Sek.]

Kreuzen und Überholen:

Auf einer Straße fahren hintereinander in gleicher Richtung Pw A und Pw B im Tempo 60 km/Std. In entgegengesetzter Richtung kommt Pw C im Tempo 70 km/Std., im Abstand von 400 m von A. B will A im Tempo 90 km/Std. überholen. Reicht die Zeit?

Überholungszeit $c = \frac{36 \cdot (90 + 10)}{10 \cdot (90 - 60)} = 12$ [Sek.]

Zeit bis zum Kreuzen $k = \frac{18 \cdot 400}{5\,(60 + 70)} = 11{,}1$ [Sek.] Es reicht nicht.

Dieses Beispiel eignet sich auch dazu, den Ablauf von Sekunde zu Sekunde durchzurechnen, wenn nötig auch in kleineren Intervallen.
Rechnung von Sekunde zu Sekunde, von dem Zeitpunkt an, da B sein Tempo auf 90 gesteigert hat und von A noch den Abstand $16^2/_3$ m hat.

Sekunde	A bei m	B bei m	C bei m
0	$16^2/_3$	0	$416^2/_3$
1	$33^1/_3$	25	$397^2/_9$
2	50	50	$377^7/_9$
3	$66^2/_3$	75	$358^3/_9$
4	$83^1/_3$	100	$338^8/_9$
5	100	125	$319^4/_9$
6	$116^2/_3$	150	300
7	$133^1/_3$	175	$280^5/_9$
8	150	200	$261^1/_9$
9	$166^2/_3$	225	$241^6/_9$
10	$183^1/_3$	250	$222^2/_9$
11	200	275	$202^7/_9$
12	$216^2/_3$	300	$183^3/_9$
13	$233^1/_3$	375	$163^8/_9$
14	250	300	$144^4/_9$

Man sieht: B kreuzt C nach 9 Sekunden, wenn er noch nicht einschwenken dürfte. A kreuzt C nach 11 Sekunden.

Es empfiehlt sich auch, die Situation aufzuzeichnen.

Zum Thema Kreuzen und Überholen lassen sich die verschiedensten Ausgangslagen durchrechnen.
Eine Ausgangslage dazu:

1. Auf einer Straße fahren

a) in Richtung Ost–West
ein Lastwagen A mit Anhänger, Tempo 36 km, Spitze bei 48 m; hinter ihm ein Pw B im Abstand 30 m, Tempo 90 km, setzt zum Überholen an;

b) in Richtung West–Ost
ein Lastwagen C, Tempo 54 km, Spitze bei 348 m; hinter ihm ein Pw D im Tempo 72 km, setzt zum Überholen an, Spitze bei 378 m.

Rechne die Situation von Sekunde zu Sekunde und bestimme durch Verfeinerung der Rechnung alle Ereignisse!

Tabelle zu dieser Ausgangslage

	Spitze des Wagens bei			
nach A	A	B	C	D
0 Sek.	48 m	5 m	348 m	378 m
1 Sek.	58 m	30 m	333 m	358 m
2 Sek.	68 m	55 m	318 m	338 m
3 Sek.	78 m	80 m	303 m	318 m
4 Sek.	88 m	105 m	288 m	298 m
5 Sek.	98 m	130 m	273 m	278 m
6 Sek.	108 m	155 m	258 m	258 m
7 Sek.	118 m	180 m	243 m	238 m
8 Sek.	128 m	205 m	228 m	218 m
9 Sek.	138 m	230 m	213 m	198 m
10 Sek.	148 m	255 m	198 m	178 m
11 Sek.	158 m	280 m	183 m	158 m
12 Sek.	168 m	305 m	168 m	138 m
13 Sek.	178 m	330 m	153 m	118 m
14 Sek.	188 m	355 m	138 m	98 m

Man kann ablesen:

B überholt A während der 2. und 3. Sekunde; D überholt C während der 5. und 6. Sekunde.
A kreuzt C in der 12. Sekunde; A kreuzt D in der 11. Sekunde; B kreuzt C in der 9. Sekunde; B kreuzt D in der 9. Sekunde.

Zur Verfeinerung wird man nun die Rechnung von 8 Sekunden an von Fünftelsekunde zu Fünftelsekunde durchrechnen und dabei auch die Position des Wagenendes angeben.

nach	A		B		C		D	
	Spitze	Ende	Spitze	Ende	Spitze	Ende	Spitze	Ende
8 Sek.	128	110	205	200	228	238	218	223
8,2 Sek.	130	112	210	205	225	235	214	219
8,4 Sek.	132	114	215	210	222	232	210	215
8,6 Sek.	134	116	*220*	215	*219*	229	206	211
8,8 Sek.	136	118	*225*	220	216	*226*	202	207
9 Sek.	138	120	230	*225*	213	*223*	198	203
9,2 Sek.	140	122	235	230	210	230	194	199
9,4 Sek.	142	124	240	235	207	217	190	195
9,6 Sek.	144	126	245	240	204	214	186	191
9,8 Sek.	146	128	250	245	201	211	182	187
10 Sek.	148	130	255	250	198	208	178	183

Aus diesen Zahlen kann nun wieder viel abgelesen werden: Spitze B kreuzt Ende von C nach 8,8 Sek. Das Nebeneinanderfahren von B und C dauert von 8,6–9 Sek.

Will man Brüche üben, so nimmt man in der Ausgangslage andere Tempi an.

Alle angeführten Beispiele sollen nur Anregungen sein, wie man eine Rechnung anlegen kann, durchrechnen als Tabelle, Kontrolle mit den Formeln über Weg und Zeit, graphische Darstellung und wenn möglich algebraische Lösung.