Zeitschrift: Schweizer Schule

Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz

Band: 31 (1944)

Heft: 19

Artikel: Die Kettenlinie

Autor: Schwegler, Theodor

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-537018

Nach dem Einvisieren der Magnetnadel auf die Deklinationsmarke stellt man mit Hilfe der Visiervorrichtung die Richtung fest, die gegen das Ziel weist und bestimmt in dieser Richtung einen Punkt im Gelände, der sich möglichst weit entfernt befindet und den man sich gut merken kann. Hierzu kann ein Baum, eine Hügelspitze, ein Gebäude etc. dienen. Diesen Punkt sucht man nun auf dem bequemsten Wege zu erreichen. Dort angekommen, nimmt man wieder die Bussole in die Hand und sucht mit dieser, einen neuen Geländepunkt zu bestimmen. Dieses etappenweise Vorgehen wird fortgesetzt, bis das Ziel erreicht ist. Im Walde, wo die freie Sicht fehlt, oder bei Nacht und Dunkelheit können keine solchen Zwischenpunkte bestimmt werden. Man muss in diesen Fällen während des Gehens die Marschrichtung durch die in der Hand gehaltene Bussole dauernd kontrollieren.

Anmerkung: Dieser Artikel ist auszugsweise dem empfehlenswerten Büchlein: „Karte und Kompass" von Karl Thöne entnommen, das kürzlich im Verlag Hallwag, Bern, zum Preise von Fr. 2.80 erschienen ist.

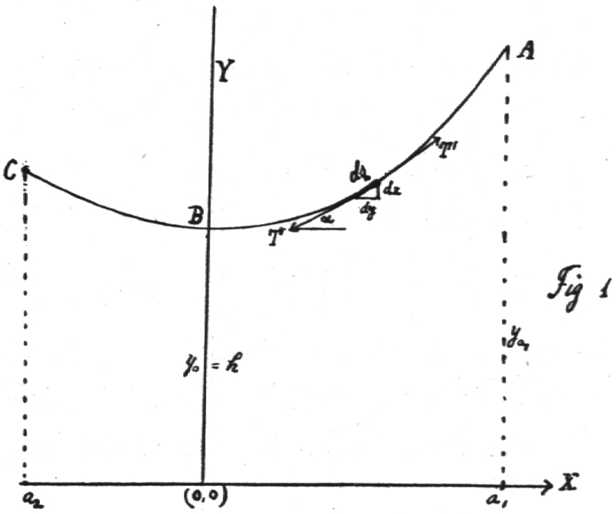
Josef Purtschert.

Mittelschule

Die Kettenlinie

I. Wird eine Kette oder ein (als undehnbar gedachter) Faden an beiden Enden aufgehängt, so werden nach einigem Hin- und Herschwanken die einzelnen Teile bald ins statische Gleichgewicht und damit in die Ruhelage kommen. Die in dieser Gleichgewichtslage gebildete Kurve heisst Kettenlinie. Da die auf sie wirkenden Kräfte sämtlich in der durch diese Linie gehenden Vertikalebene liegen, ist die Gleichgewichtslage für ein Bogenelement ds leicht zu bestimmen. Mittels der Infinitesimalrechnung gewinnt man daraus unschwer die Gleichung der Kurve und damit auch die Möglichkeit, praktische und theoretische Aufgaben zu lösen, die mit der Kettenlinie zusammenhangen.

Auf das unendlich kleine Bogenelement ds (Fig. 1) wirkt die Schwerkraft. Daran, dass



es nicht dem Zug nach unten folgt, hindert es der Zusammenhang mit den anschliessenden höher gelegenen Bogenstücken, und, selber auch mit den anschliessenden tiefer gelegenen Bogenstücken zusammenhangend, hindert es diese, dem Vertikalzug der Schwerkraft zu folgen. Dadurch entsteht in ds eine Spannung, die

1. um so mehr wächst, je mehr Elemente zu tragen sind;
2. in jedem Element ds entgegengesetzt gerichtet ist;

3. jedes Element im statischen Gleichgewicht erhält.

Die an den Enden des Bogenelementes ds angreifenden Spannkräfte T und T' — T nach dem tiefsten Punkte B, T' nach dem Aufhängepunkt A hin — wirken tangential. Wir zerlegen sie in die Horizontal- und Vertikal-komponenten $T \cdot \cos\alpha$ bzw. $T' \cdot \cos\alpha'$ und $T \cdot \sin\alpha$ bzw. $T' \cdot \sin\alpha'$. T und T' sind natürlich Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x, die noch näher zu bestimmen sind; dagegen sind $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$ und $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$. Ferner ist $T' = T + dT$ und $\alpha' = \alpha + d\alpha$, wobei dT und $d\alpha$ die Differenziale von T und α sind, d. h. die unendlich kleinen Zunahmen der Spannung T und des Winkels α, die der unendlich kleinen Abszissenzunahme dx entsprechen.

II. Wegen der Gleichgewichtslage müssen die beiden Horizontalkomponenten der auf das Bogenelement ds wirkenden Spannungen einander gleich sein: also

$$\begin{aligned} T \cdot \cos\alpha = T' \cdot \cos\alpha' &= (T + dT) \cdot \cos(\alpha + d\alpha) = (T + dT)(\cos\alpha \cdot \cos d\alpha - \sin\alpha \cdot \sin d\alpha) \\ &= (T + dT)(\cos\alpha - \sin\alpha \cdot d\alpha) \\ &= T \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot dT - T \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha - \sin\alpha \cdot d\alpha \cdot dT \end{aligned}$$

Da $\sin\alpha \cdot d\alpha \cdot dT$ eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung ist, fällt dieses Glied ausser Betracht, und es bleibt nur noch:

$$\cos\alpha \cdot dT - T \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha = d(T \cdot \cos\alpha) = d\left(T \cdot \frac{dx}{ds}\right) = 0$$

Ein Ausdruck aber, dessen Differenzial = 0 ist, stellt eine Konstante dar; also $T \cdot \frac{dx}{ds} = \sigma \cdot h$, wobei σ das spezifische Gewicht des Fadens bzw. der Kette und h eine von der Lage abhängige und noch näher zu bestimmende feste Grösse (Konstante) sei. Daraus folgt, dass im tiefsten Punkt, wo $\alpha = 0$ ist, T den kleinsten Wert hat: $T_B = \sigma \cdot h$, während allgemein gilt:

$$T = \sigma \cdot h \cdot \frac{ds}{dx}. \qquad \text{(I)}$$

Anderseits ist die Differenz der Vertikalkomponenten $T' \cdot \sin\alpha'$ und $T \cdot \sin\alpha$, also das Differenzial von $T \cdot \sin\alpha$ gleich dem in der Mitte des Bogenelementes angreifenden Gewichte von ds:

$$\begin{aligned} (T + dT)\sin(\alpha + d\alpha) - T \cdot \sin\alpha &= (T + dT)(\sin\alpha + \cos\alpha \cdot d\alpha) - T \cdot \sin\alpha \\ &= \sin\alpha \cdot dT + T \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha + \cos\alpha \cdot d\alpha \cdot dT \end{aligned}$$

$$= d(T \cdot \sin\alpha) = d\left(T \cdot \frac{dy}{ds}\right) = \sigma \cdot ds = \sigma \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sigma \cdot dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Wir ersetzen nun T aus Formel (I) und kürzen mit σ und erhalten:

$$d\left(h \cdot \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dy}{ds}\right) = h \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad \text{(II)}$$

Gleichung (II) ist aber eine einfache Differenzialgleichung der beiden Veränderlichen x und $\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Wir trennen also die Veränderlichen und integrieren; dabei beachten wir, dass für $x = 0$ auch $\alpha = 0$, also auch $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, so dass die Integrationskonstante ebenfalls = 0.

$$\int \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{h} \cdot \int dx = \frac{x}{h}$$

oder $\ln\left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \frac{dy}{dx}\right] = \frac{x}{h}$

oder $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \frac{dy}{dx} = e^{\frac{x}{h}}$ und (Kehrwert!) $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - \frac{dy}{dx} = e^{-\frac{x}{h}}$

Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen erhalten wir

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}}{2}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{x}{h}}-e^{-\frac{x}{h}}}{2} \tag{III}$$

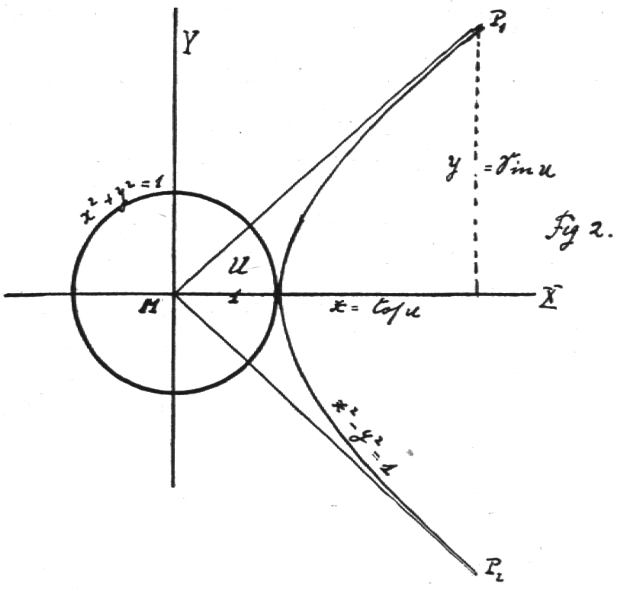
Wir erweitern mit dx und integrieren:

$$\left.\begin{aligned} \int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx = \int ds &= \int \frac{e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}}{2}\cdot dx; \quad s = h\left(\frac{e^{\frac{x}{h}}-e^{-\frac{x}{h}}}{2}\right) \\ \int dy &= \int \frac{e^{\frac{x}{h}}-e^{-\frac{x}{h}}}{2}\cdot dx; \quad y = h\left(\frac{e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

Die Integrationskonstante ist wiederum $= 0$, denn für $x = 0$ ist auch der Bogen $s = 0$, und aus praktischen Gründen nehmen wir $y_0 = h$. Aus den Formeln (IV) folgt unmittelbar: $y^2 - s^2 = h^2$. Nun stellt die Gleichung $y^2 - x^2 = h^2$ eine gleichseitige Hyperbel dar, die nach oben und unten offen ist und deren Halbachse h ist. Einer solchen Hyperbel nähert sich die Kettenlinie um so mehr, je flacher sie ist, d. h. je grösser h ist: an die Stelle der Abszissen tritt bei der Kettenlinie die Bogenlänge.

III. Zwischen Kettenlinie und gleichseitiger Hyperbel besteht aber noch eine weitere Verwandtschaft: Die Kettenlinie lässt sich sehr vorteilhaft durch die sog. hyperbolischen Funktionen ausdrücken, die wir hier in Kürze entwickeln.

Dem Einheitskreis $x^2+y^2=1$ stellen wir die gleichseitige Einheitshyperbel $x^2-y^2=1$ an die Seite. Für die Fläche u des Zwickels (area) P_1MP_2 (Fig. 2) liefert die Integration:



$$\begin{aligned} u &= x_1\sqrt{x_1^2-1} - 2\cdot\int_1^{x_1}\sqrt{x^2-1}\,dx \\ &= x_1\sqrt{x_1^2-1} - 2\cdot\int_1^{x_1}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}} + 2\cdot\int_1^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ldots \\ &= \ln\left(x_1+\sqrt{x_1^2-1}\right) = \ln(x_1+y_1) \end{aligned}$$

also $x_1 + y_1 = e^u$ und (erweiterter Kehrwert!) $x_1 - y_1 = e^{-u}$

$$\left.\begin{aligned} &\text{also } x = {}^1/_2\,(e^u + e^{-u}) \equiv \mathfrak{Cof}\,u \equiv \text{cos hyperbol. } u \\ &\text{und } y = {}^1/_2\,(e^u - e^{-u}) \equiv \mathfrak{Sin}\,u \equiv \text{sin hyperbol. } u \end{aligned}\right\} \tag{V}$$

Daraus ergeben sich ohne weiteres die folgenden, den trigonometrischen Funktionen analogen Beziehungen, soweit wir sie benötigen.

$$\left.\begin{aligned}
&d\,\mathfrak{Cos}\,u = \mathfrak{Sin}\,u \cdot du; \quad d\,\mathfrak{Sin}\,u = \mathfrak{Cos}\,u \cdot du\\
&2\,\mathfrak{Sin}\,u \cdot \mathfrak{Cos}\,u = 1/2\,(e^{2u} - e^{-2u}) = \mathfrak{Sin}\,2u;\\
&\mathfrak{Cos}^2 u + \mathfrak{Sin}^2 u = 1/2\,(e^{2u} + e^{-2u}) = \mathfrak{Cos}\,2u\\
&\mathfrak{Sin}\,u \cdot \mathfrak{Cos}\,v \pm \mathfrak{Cos}\,u \cdot \mathfrak{Sin}\,v = 1/4\,[(e^{u} - e^{-u})(e^{v} + e^{-v}) \pm (e^{u} + e^{-u})(e^{v} - e^{-v})]\\
&\qquad\qquad = 1/2\,(e^{(u \pm v)} - e^{-(u \pm v)}) = \mathfrak{Sin}\,(u \pm v)\\
&\mathfrak{Cos}\,u \cdot \mathfrak{Cos}\,v \pm \mathfrak{Sin}\,u \cdot \mathfrak{Sin}\,v = 1/2\,(e^{(u \pm v)} + e^{-(u \pm v)}) = \mathfrak{Cos}\,(u \pm v)\\
&\mathfrak{Sin}\,u - \mathfrak{Sin}\,v = 2 \cdot \mathfrak{Cos}\,\tfrac{u+v}{2} \cdot \mathfrak{Sin}\,\tfrac{u-v}{2}\\
&\mathfrak{Cos}\,u - \mathfrak{Cos}\,v = 2 \cdot \mathfrak{Sin}\,\tfrac{u+v}{2} \cdot \mathfrak{Sin}\,\tfrac{u-v}{2}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(VI)}$$

Da die üblichen Tafeln die hyperbolischen Funktionen und deren Logarithmen zu einer gegebenen Area (Zwickel) nicht bieten, wird man sie als die oben angegebenen Funktionen von e berechnen. Aber auch die natürlichen Logarithmen und Antilogarithmen werden von den üblichen Schultabellen nur in beschränkter Auswahl geboten; die vorzügliche Logarithmentabelle von Völlmy, unser schweizerisches Lehrmittel, z. B. bietet S. 108—127 die natürlichen Logarithmen der Zahlen 1 bis 1000 und S. 133 die Antilogarithmen für die Hundertstel, Zehntel, Einer und Zehner. Mit Hilfe dieser Angaben lässt sich zwar *theoretisch* leicht der natürliche Logarithmus oder Antilogarithmus zu einer gegebenen gemischten Zahl berechnen, aber *praktisch* ist es viel einfacher, durch Multiplikation mit dem Modulus 0,4342945 die *natürlichen* Logarithmen in *dekadische* umzurechnen. Bei der Berechnung von Ausdrücken wie $1/2 \cdot (e^{u} \pm e^{-u})$ leisten die Gausschen *Additions- und Subtraktionslogarithmen*, wie sie z. B. die Tabelle von Heger (Teubner, 1913) auf 6 Seiten enthält, vorzügliche Dienste.

IV. Nach den obigen Formeln können wir nun die Kettenlinie mittels der *hyperbolischen Funktionen* ausdrücken wie folgt:

$$y = h \cdot \mathfrak{Cos}\,\frac{x}{h} \quad \text{und} \quad s = h \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{x}{h}$$

Für besondere Aufgaben bzw. Bedingungen dienen noch die folgenden Formeln, sowie Tabelle IX, die der Verfasser eigens berechnet hat.

Sei $l = 2s$ bzw. $s_1 - s_2$ die Länge der Kettenlinie; die Horizontal- und Vertikalabstände der Aufhängepunkte A und C seien

$a = a_1 - a_2 = x_1 - x_2$ und $b = y_1 - y_2$; endlich sei $n = \dfrac{\sqrt{l^2 - b^2}}{a}$; ferner $\alpha = \dfrac{a}{2h}$.

$$\text{Dann ist } l = s_1 - s_2 = h\left(\mathfrak{Sin}\,\frac{x_1}{h} - \mathfrak{Sin}\,\frac{x_2}{h}\right) = 2h \cdot \mathfrak{Cos}\,\frac{x_1 + x_2}{2h} \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{x_1 - x_2}{2h}$$

$$= 2h \cdot \mathfrak{Cos}\,\frac{x_1 + x_2}{2h} \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{a}{2h}$$

$$\text{ferner } b = y_1 - y_2 = h\left(\mathfrak{Cos}\,\frac{x_1}{h} - \mathfrak{Cos}\,\frac{x_2}{h}\right) = 2h \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{x_1 + x_2}{2h} \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{x_1 - x_2}{2h}$$

$$= 2h \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{x_1 + x_2}{2h} \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{a}{2h}$$

$$\text{also } \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{a} = \frac{2h}{a} \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{a}{2h} \sqrt{\mathfrak{Cos}^2\,\frac{x_1 + x_2}{2h} - \mathfrak{Sin}^2\,\frac{x_1 + x_2}{2h}} = \frac{2h}{a} \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{a}{2h}$$

$$\text{und} \quad n = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha = f(\alpha) \qquad \text{(VII)}$$

Sind dagegen der Horizontalabstand a und der Vertikalabstand b_0 des (einen) **höchsten und tiefsten** Punktes der Kettenlinie gegeben, so ist

$$b_0 = y_a - y_0 = h \cdot (\mathfrak{Cof}\,\frac{a}{h} - 1) = 2h \cdot \mathfrak{Sin}^2\,\frac{a}{2h}.$$

$$\text{also } \nu = \frac{b_0}{a} = \frac{2h}{a}\,\mathfrak{Sin}^2\,\frac{a}{2h} = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathfrak{Sin}^2\,\alpha = F(\alpha). \qquad \text{(VIII)}$$

Wird $e^{\pm\alpha}$ als Potenzreihe entwickelt, so findet man unschwer

$$n = f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{3!} + \frac{\alpha^4}{5!} + \frac{\alpha^6}{7!} + \ldots$$

Ist nun $n \leq 1{,}1$, so lässt sich aus den drei ersten Gliedern dieser Reihe α und damit auch $h\,(=\frac{a}{2\alpha})$ hinreichend genau bestimmen. Im allgemeinen aber wird man durch Näherung mittels der sog. Regula falsi genauere Werte nach den Formeln (VII) und (VIII) ermitteln. Für die ersten Näherungswerte liefert die folgende, bereits erwähnte Tabelle gute Dienste; sie gestattet auch das Interpolieren, wenn man dabei die zweiten und dritten Differenzen berücksichtigt.

α	$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha$	$F(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathfrak{Sin}^2\,\alpha$	α	$n = f(\alpha)$	$\nu = F(\alpha)$
0,1	1,001 667	0,100 334	1,1	1,214 225	1,621 777
0,2	1,006 680	0,202 681	1,2	1,257 884	1,898 728
0,3	1,015 067	0,309 108	1,3	1,306 448	2,218 848
0,4	1,026 881	0,421 794	1,4	1,360 215	2,590 261
0,5	1,042 190	0,543 081	1,5	1,419 520	3,017 981
0,6	1,061 086	0,675 546	1,6	1,484 730	3,527 077
0,7	1,083 690	0,822 070	1,7	1,556 254	4,117 271
0,8	1,110 132	0,985 915	1,8	1,634 541	4,799 069
0,9	1,140 574	1,170 874	1,9	1,720 085	5,621 521
1,0	1,175 201	1,381 066	2,0	1,813 431	6,540 842
2,1	1,915 194	7,702 517	3,5	4,72647	78,1848
2,2	2,025 975	9,029 908	4,0	6,82248	186,186
2,3	2,146 505	10,597 212	4,5	10,0007	450,070
2,4	2,277 596	12,449 931	5,0	14,8406	1111,41
2,5	2,420 092	14,641 999	5,5	22,2443	2721,61
2,6	2,574 898	17,238 256	6	33,6189	6781,37
2,7	2,743 061	20,315 823	7	78,3309	42950,1
2,8	2,925 675	23,961 113	8	176,310	247 680
2,9	3,130 259	28,301 952	9	450,171	1823910
3,0	3,339 292	33,453 346	10	2206,65	

(IX)

V. Aufgaben.

1. Zwei senkrecht auf der Ebene stehende Stangen sind je 3 m lang und 5 m voneinander entfernt. Ein 7 m langes Seil verbindet die Spitzen. Wie gross ist b_0 und wie hoch liegt der tiefste Punkt über dem Boden?

Da $b = 0$, ist $n = 7/5 = 1,4$ [nach (VII)]. Da nach (IX) $f(1,4) < 1,4 < f(1,5)$, ist α_1 (d. h. der erste Näherungswert von α) $= 1,4$; nach der Regula falsi ist der nächste Näherungswert:

$$\alpha_2 = 1,4 + 0,1 \frac{f(\alpha) - f(1,4)}{f(1,5) - f(1,4)} = 1,46.$$

Die fortgesetzte Anwendung dieser Regel führt zu dem genauen Werte $\alpha = 1,468\,188$; also $h = \frac{5}{2\alpha} = 1,69855$.

Und $b_0 = h\left(\mathfrak{Cof}\frac{a}{h} - 1\right) = 1,69855\,(\mathfrak{Cof}\,1,468\,188 - 1) = 2,184\,086$:

der tiefste Punkt liegt somit $(3 - 2,184)$ m $= 0,816$ m über dem Boden.

2. Von dem Dach eines 16 m hohen Hauses geht eine Telephonleitung aus. Der Draht ist gerissen, und sein freies Ende ist in 1 m Höhe über dem Boden und in 6 m Entfernung vom Hause befestigt. Der Draht ist 18 m lang. Wie hoch über dem Boden und wie weit vom Haus entfernt liegt der tiefste Punkt?

Nach (VII) ist $f(\alpha) = \frac{\sqrt{18^2 - 15^2}}{6} = \frac{\sqrt{99}}{6} = 1,658\,312 \begin{matrix} > f(1,8) \\ < f(1,9) \end{matrix}$

Mittels der Regula falsi findet man $\alpha = 1,82868$ und daraus $h = 1,64053$. Die Lage des tiefsten Punktes findet man wie folgt: nach den oben entwickelten Formeln ist

$$l = s_1 - s_2 = 2h\,\mathfrak{Cof}\frac{x_1 + x_2}{2h} \cdot \mathfrak{Sin}\frac{a}{2h}; \quad b = y_1 - y_2 = 2h \cdot \mathfrak{Sin}\frac{x_1 + x_2}{2h} \cdot \mathfrak{Sin}\frac{a}{2h}$$

folglich $\frac{b}{l} = \mathfrak{Tg}\frac{x_1 + x_2}{2h} = \mathfrak{Tg}\,\beta = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{e^{\beta} + e^{-\beta}} = \frac{e^{2\beta} - 1}{e^{2\beta} + 1}$

also $e^{2\beta} = \frac{l + b}{l - b}$, $\qquad \beta = 1/2 \cdot \ln\left(\frac{l + b}{l - b}\right)$,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{somit} & x_1 + x_2 = 2h \cdot \beta \\ \text{anderseits ist} & x_1 - x_2 = a \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_1 = 1/2\,(2h\beta + a) \\ x_2 = 1/2\,(2h\beta - a) \end{array}$$

Nun ist $\qquad \beta = 1/2 \cdot \ln\left(\frac{18 + 15}{18 - 15}\right) = 1/2 \cdot \ln 11 = 1,198\,948$

$$\text{also} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3,933\,623 \\ x_1 - x_2 = 6. \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 = 4,967 \\ x_2 = -1,033 \end{array}\right\}.$$

ferner ist $b_0 = h\left(\mathfrak{Cof}\frac{x_1}{h} - 1\right) = 15,336$

Der tiefste Punkt liegt also $(16 - 15,336)$ m $= 0,664$ m über dem Boden und ist 4,967 m vom Hause entfernt.

3. Der tiefste Punkt eines aufgehängten Seiles hat von dem einen Aufhängepunkt den Horizontalabstand 10 m und den Vertikalabstand 2 m. Wie lange ist das Seil?

Da $b\ (= b_0) = 2$ und $a = (1/2\ l =)\ 10$, ist nach Formel (VIII) $\nu = 0,2 = F(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathfrak{Sin}^2\,\alpha$. Nach Tabelle (IX) ist der erste Näherungswert $\alpha_1 = 0,1$; der zweite 0,19. Verfährt man mit der Regula falsi weiter, so findet man $\alpha = 0,197\,422$,

also $h = \frac{10}{2\alpha} = 25,326\,487$, $\qquad s = h \cdot \mathfrak{Sin}\frac{10}{h} = 10,263$ m (halbe Länge).

4. Die Länge der Kette sei $l = 2s$, die Aufhängepunkte A und C liegen gleich hoch. Wie gross muss ihr Abstand 2a genommen werden, damit die von der Kettenlinie und der Strecke AC begrenzte Fläche ein Maximum wird?

Im Falle des Maximum muss das Totaldifferenzial sowohl der Flächenfunktion wie der Längenfunktion $= 0$ sein; jenes, weil es sich um ein Maximum handelt, dieses, weil die Länge konstant ist. Die genannten Funktionen sind aber

$$\Phi(a, h) = [a y_a' - \int_0^a y\, dx] = [a \cdot h \cdot \mathfrak{Cof}\frac{a}{h} - h \int_0^a \mathfrak{Cof}\frac{x}{h}\, dx] = ah \cdot \mathfrak{Cof}\frac{a}{h} - h^2 \cdot \mathfrak{Sin}\frac{a}{h}$$

$$s(a, h) = h \cdot \mathfrak{Sin}\frac{a}{h}$$

also $$d\Phi = \frac{\delta\Phi}{\delta a} \cdot da + \frac{\delta\Phi}{\delta h} \cdot dh = 0; \qquad ds = \frac{\delta s}{\delta a} \cdot da + \frac{\delta s}{\delta h} \cdot dh = 0$$

Dieses homogene Gleichungssystem kann nur bestehen, wenn die Partialdifferenziale proportional sind, also $\frac{\delta\Phi}{\delta h} : \frac{\delta\Phi}{\delta a} = \frac{\delta s}{\delta h} : \frac{\delta s}{\delta a}$

Nun ist $$\frac{\delta\Phi}{\delta h} = a \cdot \mathfrak{Cof}\frac{a}{h} - \frac{a^2}{h} \cdot \mathfrak{Sin}\frac{a}{h} - 2h \cdot \mathfrak{Sin}\frac{a}{h} + a \cdot \mathfrak{Cof}\frac{a}{h}$$

$$= 2a \cdot \mathfrak{Cof}\frac{a}{h} - \left(\frac{a^2}{h} + 2h\right)\mathfrak{Sin}\frac{a}{h}$$

$$\frac{\delta\Phi}{\delta a} = h \cdot \mathfrak{Cof}\frac{a}{h} + a \cdot \mathfrak{Sin}\frac{a}{h} - h \cdot \mathfrak{Cof}\frac{a}{h} = a \cdot \mathfrak{Sin}\frac{a}{h}$$

$$\frac{\delta s}{\delta h} = \mathfrak{Sin}\frac{a}{h} - \frac{a}{h} \cdot \mathfrak{Cof}\frac{a}{h}; \qquad \frac{\delta s}{\delta a} = \mathfrak{Cof}\frac{a}{h}$$

Also $$2\,\mathfrak{Cotg}\frac{a}{h} - \left(\frac{a}{h} + \frac{2h}{a}\right) = \mathfrak{Tg}\frac{a}{h} - \frac{a}{h} \qquad \left(\frac{a}{h} = \alpha\right)$$

$$2\,\mathfrak{Cotg}\frac{a}{h} - \mathfrak{Tg}\frac{a}{h} - \frac{2h}{a} = 2\,\mathfrak{Cotg}\,\alpha - \mathfrak{Tg}\,\alpha - \frac{2}{\alpha} = 0$$

Die Näherung liefert hiefür den Wert $\alpha = 1{,}6011$

also $a = \alpha \cdot h = \frac{\alpha \cdot s}{\mathfrak{Sin}\,\alpha} = \frac{\alpha \cdot l}{2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha} = 0{,}335\,817\,l$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Sin}\,\alpha &= 2{,}391\,334 \\ \mathfrak{Cof}\,\alpha &= 2{,}592\,003 \end{aligned}\right\}$$

und $$2\Phi(a, h) = 2h^2\left[\frac{a}{h} \cdot \mathfrak{Cof}\frac{a}{h} - \mathfrak{Sin}\frac{a}{h}\right] = 2h^2[\alpha \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha - \mathfrak{Sin}\,\alpha] = 0{,}155\,266\,l^2$$

Diese Lösung der Aufgabe 4 verdanke ich Dr. P. Bonaventura Thürlemann O. S. B., Engelberg. Die Aufgaben 1—3 zeigen aber, wie Probleme der Wissenschaft und des täglichen Lebens, die mit der Kettenlinie zusammenhangen, exakt gelöst werden können.

Einsiedeln. Dr. P. Theodor Schwegler O. S. B.

Umschau

Unsere Toten

Professor Joh. Etlin, Luzern.

Am 19. Januar starb im 73. Lebensjahr Herr Johann Etlin, Professor an der Kantonsschule Luzern. Geboren 1872 in Sarnen, studierte der Verstorbene nach Absolvierung des Kollegiums Sarnen am Konservatorium in Genf und Stuttgart speziell Musik für Blasinstrumente, siedelte dann noch zu gleichem Zwecke nach Paris über und kam 1897 als Professor für Musik, Abteilung Blasinstrumente,